МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-4-7-13

УДК 511.334

Дата: поступления статьи: 06.09.2021
после рецензирования: 08.10.2021
принятия статьи: 25.11.2021

Г.В. Воскресенская
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: galvosk@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6288-5372

О ПРИРОДЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВА ПРИ РАССЕЧЕНИИ ПРОСТРАНСТВ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ФОРМ

АННОТАЦИЯ

В статье исследуется пространство параболических форм методом рассечения. Это пространство является прямой суммой подпространства, состоящего из форм, делящихся на фиксированную параболическую форму, которую называют рассекающей функцией. Если дополнительное пространство нулевое, то возникает ситуация точного рассечения. В общем случае рассечение не является точным, и важно изучить природу дополнительного пространства. Доказывается, что базис дополнительного пространства может быть описан с помощью пространства параболических форм малого веса. Этот вес не превосходит 14 и часто равен 4. Приведены примеры рассекающих функций для каждого уровня. Доказана также теорема о базисе дополнительного пространства к пространству параболических форм в пространстве модулярных форм. Мы используем свойства эта-функций, формулу Биаджиоли для порядков в параболических вершинах и формулу Коэна — Остерле для размерностей.

Ключевые слова: модулярные формы; параболические формы; эта-функция Дедекинда; параболические вершины; ряды Эйзенштейна; структурные теоремы; формула Коэна — Остерле; формула Биаджиоли.

Цитирование. Воскресенская Г.В. О природе дополнительного пространства при рассечении пространств параболических форм // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2021. Т. 27, № 4. С. 7–13. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-4-7-13.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Воскресенская Галина Валентиновна — доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и геометрии, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

1. Предварительные сведения

Основные понятия и цитируемые факты можно найти в [1; 4].

Для уровня 1 известна классическая структурная теорема:

$$S_k(\Gamma) = \Delta(z) \cdot M_{k-12}(\Gamma), \Delta(z) = \eta^{24}(z).$$

Для высших уровней ситуация усложняется, и ее изучение является актуальной задачей.

Мы можем представить пространство $S_k(\Gamma_0(N), \chi)$ в виде

$$S_k(\Gamma_0(N), \chi) = g(z) \cdot M_{k-l}(\Gamma_0(N), \chi_2) \oplus W,$$

где $g(z) \in S_l(\Gamma_0(N), \chi_1), \chi = \chi_1 \cdot \chi_2$. Функция $g(z)$ называется *рассекающей функцией.*

Ее вес можно выбрать не превосходящим 12. Если пространство W нулевое, то говорят о *точном рассечении.*

Полное исследование точного рассечения в случае тривиального или квадратичного характера проведено в работах автора [5; 6]. Важную роль в этих исследованиях играют мультипликативные эта-произведения (функции МакКея) [7; 8] . Размерности пространств и поведение параболических форм в параболических вершинах вычисляются по формулам, приведенным в [9; 10]. В этой статье мы изучим структуру дополнительного пространства. Мы покажем, что его структура выражается через информацию о пространстве параболических форм веса $l+2$. Далее, используя тот факт, что η - произведения имеют нули только в параболических вершинах, мы приведем примеры рассекающих функций для каждого уровня. Построены таблицы. Также доказывается теорема о пространстве, дополняющем $S_k(\Gamma_0(N),\chi)$ до $M_k(\Gamma_0(N),\chi)$.

Теорема 2.1. цитируется по статье [9]. Остальные теоремы статьи (теоремы 3.1, 3.2, 5.1) являются новыми.

2. Формула Коэна — Остерле

Пусть χ — характер Дирихле, $\chi(-1)=(-1)^k$, f — его кондуктор. Для $p|N, r_p : p^{r^p}\|N$, $p^{s_p}\|f$.

$$\lambda(r_p,s_p,p)=\begin{cases} p^{r'}+p^{r'-1}, & 2s_p\leqslant r_p=2r',\\ 2p^{r'}, & 2s_p\leqslant r_p=2r'+1,\\ 2p^{r_p-s_p}, & 2s_p\geqslant r_p,\end{cases}$$

$$n_k=\begin{cases} 0, & k\equiv 1 \pmod 2,\\ -\frac14, & k\equiv 2 \pmod 4,\\ \frac14, & k\equiv 0 \pmod 4,\end{cases}$$

$$m_k=\begin{cases} 0, & k\equiv 1 \pmod 3,\\ -\frac13, & k\equiv 2 \pmod 3,\\ \frac13, & k\equiv 0 \pmod 3.\end{cases}$$

$$D_0=\frac{|\Gamma:\Gamma_0(N)|}{12}=\frac{N}{12}\prod_{p|N}\left(1+\frac1p\right),\qquad D_{1,\chi}=\prod_{p|N}\lambda(r_p,s_p,p),$$

$$D_{2,\chi}=\sum_{x:x^2+1\equiv 0(N)}\chi(x),\qquad D_{3,\chi}=\sum_{x:x^2+x+1\equiv 0(N)}\chi(x).$$

Если характер $\chi=\chi_0$ — единичный характер, то будем писать $D_{j,\chi}=D_j$.

Число $D_{2,\chi}=0$, если N делится на 4 или на простое число $p\equiv 3(mod\,4)$, число $D_{3,\chi}= 0$, если N делится на 2 или на 9, или на простое число $p\equiv 2(mod\,3)$. Эти числа учитывают эллиптические точки, лежащие над i и над $\omega=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt3}{2}i$ соответственно. Мы будем называть их "добавками"в формуле Коэна — Остерле, учитывая то, что при многих уровнях их нет. Число $D_{1,\chi}$ равно количеству параболических вершин $\mu_\infty(N)$ относительно группы $\Gamma_0(N)$, если для любого простого числа p выполнены условия $2s_p\leqslant r_p$.

В этих обозначениях теорема Коэна — Остерле формулируется следующим образом.

Теорема 2.1

$$dim\, S_k(\Gamma_0(N),\chi)-dim\, M_{2-k}(\Gamma_0(N),\chi)=(k-1)D_0-\frac12 D_{1,\chi}+n_kD_{2,\chi}+m_kD_{3,\chi}.$$

Отсюда получаем при $k>2$

$$dim\, S_k(\Gamma_0(N),\chi)=(k-1)D_0-\frac12 D_{1,\chi}+n_kD_{2,\chi}+m_kD_{3,\chi}.$$

$$dim\, M_k(\Gamma_0(N),\chi)=(k-1)D_0+\frac12 D_{1,\chi}-n_{2-k}D_{2,\chi}-m_{k-2}D_{3,\chi}.$$

Для $k=1$ эта формула не позволяет сразу найти размерности пространств.

Если $\chi=\chi_0$, то $dim\, M_0(\Gamma_0(N))=1$, если $\chi\neq\chi_0$, то $dim\, M_0(\Gamma_0(N),\chi)=0$.

$$dim\, S_2(\Gamma_0(N))=1+D_0-\frac12 D_1-\frac14 D_2-\frac13 D_3.$$

$$dim\, S_2(\Gamma_0(N),\chi) = D_0 - \frac{1}{2}D_{1,\chi} - \frac{1}{4}D_{2,\chi} - \frac{1}{3}D_{3,\chi},\ \chi \neq \chi_0.$$

$$dim\, M_2(\Gamma_0(N),\chi) = D_0 + \frac{1}{2}D_{1,\chi} - \frac{1}{4}D_{2,\chi} - \frac{1}{3}D_{3,\chi}.$$

3. Теоремы о дополнительном пространстве

Теорема 3.1

Пусть
1) N — такое натуральное число, что $D_2 = D_3 = 0$,
2) k, l — положительные целые четные числа , $k \geqslant l + 8$,
3) параболическая форма $g(z) \in S_l(\Gamma_0(N))$ и не имеет нулей в точках римановой поверхности $(H/\Gamma_0(N))^*$, эквивалентных i или ω относительно Γ,
4) $\{u_1(z), ..., u_t(z)\}$ — базис ортогонального дополнения U к пространству $g(z)M_2(\Gamma_0(N))$ в пространстве $S_{l+2}(\Gamma_0(N))$.
Тогда

$$S_k(\Gamma_0(N)) = g(z)M_{k-l}(\Gamma_0(N)) \oplus W,$$

где $W = h(z)U$,

$$h(z) = \begin{cases} E_4^{\frac{k-l-2}{4}}(z), & k \equiv l + 2(4), \\ E_4^{\frac{k-l-8}{4}}(z) \cdot E_6(z), & k \equiv l(4). \end{cases}$$

Доказательство

Сначала покажем, что $dim\, W = dim\, S_k(\Gamma_0(N),\chi) - dim\,(g(z)\cdot M_{k-l}(\Gamma_0(N))$ при условии $D_2 = D_3 = 0$.
Действительно,
$dim\, S_k(\Gamma_0(N)) = (k-1)D_0 - \frac{1}{2}D_1$,
$dim\,(g(z)M_{k-l}(\Gamma_0(N)) = dim\, M_{k-l}(\Gamma_0(N)) = (k-l-1)D_0 + \frac{1}{2}D_1$,
$dim\, W = dim\, S_{l+2}(\Gamma_0(N)) - dim\, M_2(\Gamma_0(N)) = (l+1)D_0 - \frac{1}{2}D_1 - (D_0 + \frac{1}{2}D_1) = l\cdot D_0 - D_1$.
Равенство верно. Заметим также, что $dim\, W = l|\Gamma : \Gamma_0(N)| - \mu_\infty(N)$, где $\mu_\infty(N)$ — число параболических вершин относительно группы $\Gamma_0(N)$. Рассматриваемая размерность зависит только от уровня и веса рассекающей функции, но не от веса k всего пространства, при возрастании веса все большее количество функций "делятся"на рассекающую в смысле деления функций в теории модулярных форм.
Функции $u_j(z)h(z), j = \overline{1,t}$ линейно независимы, они образуют базис W.
Осталось показать, что

$$W \cap g(z)M_{k-l}(\Gamma_0(N)) = \{0\}.$$

Любая функция из W имеет вид $u(z)h(z)$, где

$$u(z) = \sum_{j=1}^{t} c_j u_j(z),$$

для некоторых $c_j \in \mathbf{C}$.
Если $u(z)h(z) \in g(z)M_{k-l}(\Gamma_0(N))$, $u(z)$ не является тождественно нулевой, то из того , что $h(z)$ не имеет нулей вне точек i и ω относительно Γ, следует , что в любой точке β римановой поверхности $(H/\Gamma_0(N))^*$

$$ord_\beta\, u(z) \geqslant ord_\beta\, g(z).$$

Следовательно, $u(z) \in g(z)\cdot M_2(\Gamma_0(N))$, а это по условию теоремы не так. Полученное противоречие завершает доказательство.

Теорема 3.2

Пусть
1) N — такое натуральное число, что $D_2 = D_{2,\chi} = D_3 = D_{3,\chi} = 0$,
2) k, l — положительные целые нечетные числа , $k \geqslant l + 8$,
3) χ — характер Дирихле по модулю N такой, что $\chi(-1) = -1$,
4) параболическая форма $g(z) \in S_l(\Gamma_0(N), \chi)$ и не имеет нулей в точках, эквивалентных i или ω относительно Γ,
5) $\{u_1(z), ..., u_t(z)\}$ — базис ортогонального дополнения U к пространству $g(z)M_2(\Gamma_0(N))$ в пространстве $S_{l+2}(\Gamma_0(N), \chi)$.
Тогда

$$S_k(\Gamma_0(N), \chi) = g(z)M_{k-l}(\Gamma_0(N)) \oplus W,$$

где $W = h(z) \cdot U$,

$$h(z) = \begin{cases} E_4^{\frac{k-l-2}{4}}(z), & k \equiv l + 2(4), \\ E_4^{\frac{k-l-8}{4}}(z) \cdot E_6(z), & k \equiv l(4). \end{cases}$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.1.

4. Явный вид рассекающих функций

Мы приведем в этом параграфе явно примеры рассекающих функций для всех уровней и четных весов. В табл. 4.1 приведены примеры рассекающих функций для уровней N таких, что $D_2 = D_{2,\chi} = D_3 = D_{3,\chi} = 0$. Мы можем опереться на теорему 2, и дополнительные исследования не требуются. Для вышеназванных рассекающих функций указанный уровень N является минимальным. Далее рассмотрим случаи, когда возникают добавки. Заметим , что для всех пространств допустимо рассечение функцией $\Delta(z) = \eta^{24}(z)$. Ее минимальный уровень равен 1. Но для многих уровней можно подобрать рассекающие меньшего веса.

Таблица 4.1

Table 4.1

Условия на уровень	Рассекающая функция	Вес
$N \equiv 0\,(mod\,24)$	$\eta(\frac{N}{2}z)\eta(\frac{N}{4}z)\eta(\frac{N}{6}z)\eta(\frac{N}{12}z)$	2
$N \equiv 4\,(mod\,24)$	$\eta^{12}(\frac{N}{2}z)$	6
$N \equiv 6\,(mod\,24)$	$\eta^6(Nz)\eta^6(\frac{N}{3}z)$	6
$N \equiv 8\,(mod\,24)$	$\eta^4(\frac{N}{2}z)\eta^4(\frac{N}{4}z)$	4
$N \equiv 9\,(mod\,24)$	$\eta^6(Nz)\eta^6(\frac{N}{3}z)$	6
$N \equiv 11\,(mod\,24)$	$\eta^2(Nz)\eta^2(z)$	2
$N \equiv 12\,(mod\,24)$	$\eta^2(Nz)\eta^2(\frac{N}{3}z)\eta^2(\frac{N}{2}z)\eta^2(\frac{N}{6}z)$	4
$N \equiv 14\,(mod\,24)$	$\eta(Nz)\eta(\frac{N}{2}z)\eta(2z)\eta(z)$	2
$N \equiv 15\,(mod\,24)$	$\eta(Nz)\eta(\frac{N}{3}z)\eta(3z)\eta(z)$	2
$N \equiv 16\,(mod\,24)$	$\eta^2(\frac{N}{2}z)\eta^2(\frac{N}{8}z)$	2
$N \equiv 18\,(mod\,24)$	$\eta^2(Nz)\eta^2(\frac{N}{3}z)$	2
$N \equiv 20\,(mod\,24)$	$\eta^2(\frac{N}{2}z)\eta^2(2z)$	2
$N \equiv 22\,(mod\,24)$	$\eta^2(Nz)\eta^2(2z)$	2
$N \equiv 23\,(mod\,24)$	$\eta^2(Nz)\eta^2(z)$	2

Далее рассмотрим ситуацию, когда уровень таков, что возможна только первая добавка. Результат приведен в таблице 4.2. Это возможно, когда N сравнимо с 2, 5,10 или 17 по модулю 24.

Для того чтобы выполнялось равенство размерностей в описанном в теореме разложении, должно выполняться условие

$$n_k = -n_{2-k+l} + n_{l+2} + n_0.$$

Таблица 4.2

Table 4.2

Условия на уровень	Рассекающая функция	Вес
$N \equiv 2\,(mod\,24)$	$\eta^8(Nz)\eta^8(z)$	8
$N \equiv 5\,(mod\,24)$	$\eta^4(Nz)\eta^4(z)$	4
$N \equiv 10\,(mod\,24)$	$\eta^4(\frac{N}{2}z)\eta^4(z)$	4
$N \equiv 17\,(mod\,24)$	$\eta^4(Nz)\eta^4(z)$	4

Непосредственно проверяется, что при $l = 4$ или $l = 8$ условие $n_k = -n_{2-k+l} + n_{l+2} + n_0$ выполняется при любом k.

Теперь рассмотрим ситуацию, когда уровень таков, что возможна только вторая добавка. Результат приведен в таблице 4.3. Это возможно, когда N сравнимо с 7, 19 или 21 по модулю 24.

Для того чтобы выполнялось равенство размерностей в описанном в теореме разложении, должно выполняться условие

$$m_k = -m_{2-k+l} + m_{l+2} + m_0.$$

Таблица 4.3

Table 4.3

Условия на уровень	Рассекающая функция	Вес
$N \equiv 7\,(mod\,24)$	$\eta^6(Nz)\eta^6(z)$	6
$N \equiv 6\,(mod\,24)$	$\eta^6(Nz)\eta^6(z)$	6
$N \equiv 21\,(mod\,24)$	$\eta^6(Nz)\eta^6(3z)$	6

Непосредственно проверяется, что при $l = 6$ условие $m_k = -m_{2-k+l} + m_{l+2} + m_0$ выполняется при любом k.

Если N сравнимо по модулю 24 с 1 или 13, то возможны обе добавки. Рассекающей может служить параболическая форма веса 12 $\eta^{24}(Nz)$.

Условия

$$n_k = -n_{14-k} + n_{14} + n_0$$

и

$$m_k = -m_{14-k} + m_{14} + m_0$$

выполняются для любого k.

5. О дополнении к пространству параболических форм

Теорема 5.1

Пусть $l > 2$ таково, что $S_l(\Gamma_0(N), \chi) \neq \{0\}$, $k \geqslant l + 4$,
χ — характер Дирихле по модулю N такой, что $\chi(-1) = (-1)^k = (-1)^l$.
Тогда

$$M_k(\Gamma_0(N), \chi) = S_k(\Gamma_0(N), \chi) \oplus W,$$

базис W образуют функции $u_1(z)h(z) \ldots u_t(z)h(z)$, где $u_1(z) \ldots u_t(z)$ — базис ортогонального дополнения к пространству $S_l((\Gamma_0(N), \chi)$ в $M_l((\Gamma_0(N), \chi)$,

$$h(z) = \begin{cases} E_4^{\frac{k-l-2}{4}}(z), & k \equiv l + 2(4), \\ E_4^{\frac{k-l-8}{4}}(z)E_6(z), & k \equiv l(4). \end{cases}$$

Доказательство

Если $l > 2$,

$$dim\, M_k(\Gamma_0, \chi) - dim\, S_k(\Gamma_0, \chi) = dim\, M_l(\Gamma_0, \chi) - dim\, S_l(\Gamma_0, \chi) = D_{1,\chi} = dim\, W.$$

Система

$$\{u_j(z)h(z)\}\; j = \overline{1,t} = dim\, W$$

линейно независима. Осталось показать, что $S_k(\Gamma_0, \chi) \cap W = \{0\}$. Если бы это было не так, то пространство $Span\,(u_1(z) \dots u_t(z)) \cap S_l(\Gamma_0, \chi) \neq \{0\}$, а это не так по условию теоремы.

Результаты статьи показывают важность нахождения базисов пространств параболических форм веса, не превосходящего 12. Для произвольного уровня это открытая проблема.

Выводы

Таким образом в статье доказывается, что базис дополнительного пространства к пространству параболических форм, рассекаемых фиксированной параболической формой, может быть описан с помощью пространства параболических форм малого веса. Приведены примеры рассекающих функций для каждого уровня. Показывается, что рассекающая функция имеет вес, не превосходящий 12. Доказана также теорема о базисе дополнительного пространства к пространству параболических форм в пространстве модулярных форм.

Литература

[1] Ono K. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series. A.M.S., Providence, 2004, 216 p. DOI: http://doi.org/10.1090/CBMS%2F102

[2] Коблиц Н. Введение в эллиптические кривые и модулярные формы. Москва: Мир, 1988. 320 с. URL: http://ega-math.narod.ru/Books/Koblitz.htm.

[3] Кнэпп Э. Эллиптические кривые. Москва: Факториал Пресс, 2004, 488 с. URL: http://ega-math.narod.ru/Books/Knapp.djv.

[4] Воскресенская Г.В. Эта-функция Дедекинда в современных исследованиях // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. ВИНИТИ РАН. 2017. Т. 136. С. 103–137. URL: http://mi.mathnet.ru/into201.

[5] Воскресенская Г.В. Точное рассечение в пространствах параболических форм с характерами // Матем. заметки. 2018. Т. 103, № 6. С. 818–830. DOI: http://doi.org/10.4213/mzm11732.

[6] Воскресенская Г.В. Функции МакКея в пространствах высших уровней // Вестник СамГУ. Естественнонаучн. сер. 2018. Т. 24. Вып. 4. С. 13–18. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-13-18.

[7] Gordon B., Sinor D. Multiplicative properties of $\eta-$products // In: Alladi K. (eds) Number Theory, Madras 1987. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1395. Springer, Berlin, Heidelberg, 1987, vol. 1395, pp. 173–200. DOI: http://doi.org/10.1007/BFb0086404.

[8] Dummit D., Kisilevsky H., MacKay J. Multiplicative products of $\eta-$ functions // Contemp. Math. 1985. V. 45. P. 89–98.

[9] Cohen H., Oesterle J. Dimensions des espaces de formes modulaires // Lecture Notes in Mathematics. 1976. Vol. 627. P. 69–78. DOI: http://doi.org/10.1007/BFB0065297.

[10] Biagioli A.J.F. The construction of modular forms as products of transforms of the Dedekind eta-function // Acta Arithmetica. 1990. V. LIV. № 4. P. 273–300. DOI: http://doi.org/10.4064/AA-54-4-273-300

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-4-7-13

Submited: 06.09.2021
Revised: 08.10.2021
Accepted: 25.11.2021

G.V. Voskresenskaya
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: galvosk@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6288-5372

ON THE NATURE OF ADDITIONAL SPACE AT CUTTING OF SPACES OF CUSP FORMS

ABSTRACT
In the article we study a space of cusp forms by the method of cutting. This space is a direct sum of the subspace of forms divided by the fixed cusp form named the cutting function and the additional space. If the additional space is zero we have the situation of exact cutting. In common case the cutting is not exact and it is important to research the nature of the additional space. We prove that the basis of the additional space can be described by the space of cusp forms of small weight. This weight is not more than 14 and often is equal to 4. We give examples of all cutting functions for all levels. We prove the theorem about the basis of the additional space to the space of cusp forms in the space of modular forms of the same level, weight and character. We use properties of eta-products, Biagioli formula for orders in cusps and Cohen — Oesterle formula for dimensions.

Key words: modular forms; cusp forms; Dedekind eta–function; cusps; Eisenstein series; structure theorem; Cohen — Oesterle formula; Biagioli formula.

Citation. Voskresenskaya G.V. On the nature of additional space at cutting of space of cusp forms. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 4, pp. 7–13. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-4-7-13. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

Galina V. Voskresenskaya — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Algebra and Geometry, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

References

[1] Ono K. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series. A.M.S., Providence, 2004, 216 p. DOI: http://doi.org/10.1090/CBMS%2F102.

[2] Koblitz N. Introduction To Elliptic Curves and Modular Forms. Moscow: Mir, 1988, 320 p. Available at: http://ega-math.narod.ru/Books/Koblitz.htm (in Russ.)

[3] Knapp A. Elliptic Curves. Moscow: Faktorial Press, 2004, 488 p. Available at: http://ega-math.narod.ru/Books/Knapp.djv (in Russ.)

[4] Voskresenskaya G.V. Dedekind η—Function in Modern Research. *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 235, pp. 788–833. DOI: http://doi.org/10.1007/s10958-018-4093-5. (English; Russian original)

[5] Voskresenskaya G.V. Exact Cutting in Spaces of Cusp Forms with Characters. *Mathematical Notes*, 2018, vol. 103, no. 6, pp. 881–891. DOI: http://doi.org/10.1134/S0001434618050243. (English; Russian original).

[6] Voskresenskaya G.V. MacKay functions in spaces of higher levels. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2018, vol. 24, issue 4, pp. 13–18. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-4-13-18 (in Russ.)

[7] Gordon B., Sinor D. Multiplicative properties of $\eta-$products. In: Alladi K. (eds) Number Theory, Madras 1987. Lecture Notes in Mathematics, vol 1395. Springer, Berlin, Heidelberg, 1987, vol. 1395, pp. 173–200. DOI: http://doi.org/10.1007/BFb0086404.

[8] Dummit D.,Kisilevsky H., MacKay J. Multiplicative products of $\eta-$ functions. *Contemporary Mathematics*, 1985, vol. 45, pp. 89–98.

[9] Cohen H., Oesterle J. Dimensions des espaces de formes modulaires. In: Lecture Notes in Mathematics, 1976, Vol. 627, pp. 69–78. DOI: http://doi.org/10.1007/BFB0065297.

[10] Biagioli A.J.F. The construction of modular forms as products of transforms of the Dedekind eta-function. *Acta Arithmetica*, 1990, vol. LIV, no 4, pp. 273–300. DOI: http://doi.org/10.4064/AA-54-4-273-300.