DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-3-74-82

УДК 531.011

Дата: поступления статьи: 27.09.2021
после рецензирования: 28.10.2021
принятия статьи: 15.11.2021

В.М. Савчин
Российский университет дружбы народов,
г. Москва, Российская Федерация
E-mail: savchin-vm@rudn.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3850-6747
Ф.Т. Чинь
Российский университет дружбы народов,
г. Москва, Российская Федерация
E-mail: tr.phuoctoan@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7707-322X

О ПОТЕНЦИАЛЬНОСТИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ[1]

АННОТАНЦИЯ

Основная цель данной статьи — исследование потенциальности дискретной системы, полученной из системы вида $C(t,u)\dot{u}(t) + E(t,u) = 0$ с непрерывным временем. Введено определение потенциальности соответствующей дискретной системы. Получены необходимые и достаточные условия потенциальности относительно заданной билинейной формы. Изложен алгоритм построения соответствующего функционала — аналога действия по Гамильтону. Дан иллюстрирующий пример.

Ключевые слова: потенциальные операторы; дискретные системы.

Цитирование. Савчин В.М., Чинь Ф.Т. О потенциальности дискретных систем // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2021. Т. 27, № 3. С. 74–82. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-74-82.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Владимир Михайлович Савчин — профессор, доктор физико-математических наук, Математический институт им. С. М. Никольского, Российский университет дружбы народов, 117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6.

Фьюк Тоан Чинь — аспирант, Математический институт им. С. М. Никольского, Российский университет дружбы народов, 117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6.

1. Предварительные сведения

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$N(u) \equiv C(t,u)\,\dot{u}(t) + E(t,u) = 0, \;\; 0 < t < l, \tag{1.1}$$

$$u(0) = a_1, u(l) = a_2, \tag{1.2}$$

где $C(t,u)$ — заданная матрица $[C_{\mu\nu}(t,u)]_{2n\times 2n}$; $u = \left(u^1, u^2, \cdots, u^{2n}\right)^T$ — неизвестная вектор-функция; $E(t,u) = \left(E_1(t,u), E_2(t,u), \cdots, E_{2n}(t,u)\right)^T$; $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^{2n}$.

Предположим, что $C_{\mu\nu}(t,u) : [0,l] \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ и $E_\mu(t,u) : [0,l] \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ — заданные непрерывно дифференцируемые функции.

Запишем систему (1.1) в виде

$$A(u) + E(t,u) = 0,$$

[1]Публикация выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН.

где A — оператор, определяемый дифференциальными выражением

$$A(u) \equiv C(t,u)\,\dot{u}(t).$$

Пусть область определения $D(A)$ оператора A состоит из непрерывно дифференцируемых вектор-функций на $(0,l)$ — пространство X, удовлетворяющих граничным условиям (1.2).

Разобьем $[0,l]$ на m равных частей узлами $t_k = k\tau$ $(k = 0,1,\cdots,m)$, где $\tau = m^{-1}l$. Введем операторы сужения [1]

$$T_p u(t) = \big(u^1(t_1),\cdots,u^{2n}(t_1),u^1(t_2),\cdots,u^{2n}(t_2),\cdots,$$
$$\cdots,u^1(t_{m-1}),\cdots,u^{2n}(t_{m-1})\big)^T$$

(столбец высоты $p = 2n(m-1)$). Такие столбцы образуют линейное пространство, которое будем обозначать $\overline{X}_p$. Для $\overline{u}_p = T_p u(t)$ зададим сферическую норму

$$\|\overline{u}_p\| = \left(\frac{l}{m}\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{\mu=1}^{2n}|u_k^\mu|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.3}$$

где $u_k^\mu = u^\mu(t_k)$.

Заменим в дифференциальном операторе A

$$C(t,u)\,\dot{u}(t) \sim \frac{1}{\tau}C^{1,k}(u_{k+1}-u_k) + \frac{1}{\tau}C^{2,k}(u_k-u_{k-1}),$$

где $u_k = u(t_k)$; $C^{1,k} = C^{1,k}(t_k,u_k), C^{2,k} = C^{2,k}(t_k,u_k,u_{k-1})$ — матрицы $\left[C^{1,k}_{\mu\nu}\right]_{2n\times 2n}$, $\left[C^{2,k}_{\mu\nu}\right]_{2n\times 2n}$, удовлетворяющие равенству $C^{1,k} + C^{2,k} = C(t_k,u(t_k)) + o(\tau)$. Дифференцируемые функции $C^{1,k}_{\mu\nu}$ и $C^{2,k}_{\mu\nu}$ можно выбрать разными способами, например, $C^{1,k}_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}C_{\mu\nu}(t_k,u_k)$; $C^{2,k}_{\mu\nu} = \frac{(1-\gamma_{\mu\nu})}{2}(C_{\mu\nu}(t_k,u_k)+C_{\mu\nu}(t_k,u_{k-1}))$, а $\gamma_{\mu\nu}$ — некоторое число из $[0,1]$.

Тогда можем записать в $\overline{X}_p$ следующую последовательность приближенных задач, или разностную схему:

$$\frac{1}{\tau}C^{1,k}(u_{k+1}-u_k) + \frac{1}{\tau}C^{2,k}(u_k-u_{k-1}) + E^k = 0, k = \overline{1,m-1}; \tag{1.4}$$

$$u_0 = a_1, u_m = a_2. \tag{1.5}$$

Здесь $E^k = E(t_k,u_k)$.

Обозначим

$$N^k_\mu = \sum_{\nu=1}^{2n}\left[\frac{1}{\tau}C^{1,k}_{\mu\nu}(u^\nu_{k+1}-u^\nu_k) + \frac{1}{\tau}C^{1,k}_{\mu\nu}(u^\nu_k-u^\nu_{k-1})\right] + E^k_\mu$$

и

$$\overline{N}_p(\overline{u}_p) \equiv \left(N^1_1,N^2_1,\cdots,N^{m-1}_1,N^1_2,\cdots,N^{m-1}_{2n}\right)^T.$$

В книге [2] получены необходимые и достаточные условия самосопряженности системы дифференциальных уравнений вида (1.1) с непрерывным временем, а также разработаны методы приведения этой системы к форме уравнений Биркгофа с непрерывным временем.

В работах [3; 4] получены дискретные аналогии уравнения Биркгофа путем дискретизации пфаффиана. Однако вопрос о необходимых и достаточных условиях потенциальности дискретных систем и построении соответствующих функционалов в литературе, насколько нам известно, пока не исследовался. Рассматриваемые в настоящей статье вопросы восходят к идеям монографии [5].

Для дальнейшего нам понадобится понятие потенциальности дискретного оператора.

2. Критерий потенциальности дискретного оператора

Обозначим через $\overline{N}'_p$ первую производную Гато оператора $\overline{N}_p$ и положим $D\left(\overline{N}_p\right) = \left\{\overline{u}_p \in \overline{X}_p; u_0 = a_1, u_m = a_2\right\}, D\left(\overline{N}'_p\right) = \left\{\overline{h}_p \in \overline{X}_p; h_0 = h_m = 0\right\}$.

Определение 2.1. Дискретный оператор $\overline{N}_p:\ D\left(\overline{N}_p\right) \to \mathbb{R}^p$ называется потенциальным в области $D\left(\overline{N}_p\right)$ относительно билинейной формы $\langle\cdot,\cdot\rangle : \overline{X}_p\times\overline{X}_p \to \mathbb{R}$, если существует функционал $F_{\overline{N}_p} : \overline{X}_p \to \mathbb{R}$, такой, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F_{\overline{N}_p}\left[\overline{u}_p+\varepsilon\overline{h}_p\right] - F_{\overline{N}_p}\left[\overline{u}_p\right]}{\varepsilon} = \langle\overline{N}_p(\overline{u}_p),\overline{h}_p\rangle,\ \ \forall\ \overline{u}_p \in D\left(\overline{N}_p\right), \forall\ \overline{h}_p \in D\left(\overline{N}'_p\right).$$

При этом будем говорить, что система (1.4), (1.5) является потенциальной в области $D\left(\overline{N}_p\right)$ относительно заданной билинейной формы, а $F_{\overline{N}_p}[\overline{u}_p]$ — потенциал оператора $\overline{N}_p(\overline{u}_p)$.

Теорема 2.1(критерий потенциальности оператора). Пусть дифференцируемый по Гато оператора $\overline{N}_p : D\left(\overline{N}_p\right) \to \mathbb{R}^p$ и билинейная форма

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \ \overline{X}_p \times \overline{X}_p \to \mathbb{R}$$

такие, что для любых фиксированных элементов $\overline{u}_p \in D\left(\overline{N}_p\right)$, $\overline{h}_p$, $\overline{g}_p \in D\left(\overline{N}'_p\right)$ функция $\varphi(\varepsilon) \equiv \equiv \langle \overline{N}_p\left(\overline{u}_p + \varepsilon \overline{h}_p\right), \overline{g}_p\rangle \in C^1[0,1]$. Тогда для потенциальности оператора $\overline{N}_p$ в односвязной области $D\left(\overline{N}_p\right)$ относительно заданной билинейной формы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\langle \overline{N}'_p \overline{h}_p, \overline{g}_p\rangle = \langle \overline{N}'_p \overline{g}_p, \overline{h}_p\rangle. \tag{2.1}$$

При этом

$$F_{\overline{N}_p}\left[\overline{u}_p\right] = \int_0^1 \langle \overline{N}_p\left(\overline{u}^0_p + \lambda\left(\overline{u}_p - \overline{u}^0_p\right)\right), \overline{u}_p - \overline{u}^0_p\rangle d\lambda, \tag{2.2}$$

где $\overline{u}^0_p \in D\left(\overline{N}_p\right)$ — фиксированный элемент.

Доказательство можно получить, используя общий критерий потенциальности оператора [6].

Для дальнейшего изложения введем в $\overline{X}_p$ скалярное произведение

$$(\overline{u}_p, \overline{v}_p) = \frac{l}{m}\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{\mu=1}^{2n} u^\mu_k v^\mu_k. \tag{2.3}$$

Теперь $\overline{X}_p$ превращено в евклидово пространство, причем $(\overline{u}_p, \overline{u}_p) = \|\overline{u}_p\|^2$.

Сначала найдем первую производную Гато оператора N^k_μ

$$\left(\overline{N}'_p \overline{h}_p\right)^k_\mu = \sum_{\nu=1}^{2n}\left\{\frac{1}{\tau}C^{1,k}_{\mu\nu}\left(h^\nu_{k+1} - h^\nu_k\right) + \frac{1}{\tau}C^{2,k}_{\mu\nu}\left(h^\nu_k - h^\nu_{k-1}\right) + \right.$$
$$+\sum_{\sigma=1}^{2n}\left[\frac{1}{\tau}\frac{\partial C^{1,k}_{\mu\nu}}{\partial u^\sigma_k} h^\sigma_k\left(u^\nu_{k+1} - u^\nu_k\right) + \frac{1}{\tau}\frac{\partial C^{2,k}_{\mu\nu}}{\partial u^\sigma_k} h^\sigma_k\left(u^\nu_k - u^\nu_{k-1}\right) + \right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{\tau}\frac{\partial C^{2,k}_{\mu\nu}}{\partial u^\sigma_{k-1}} h^\sigma_{k-1}\left(u^\nu_k - u^\nu_{k-1}\right)\right]\right\} + \sum_{\sigma=1}^{2n}\frac{\partial E^k_\mu}{\partial u^\sigma_k} h^\sigma_k.$$

Обозначим

$$\overline{N}'_p \overline{h}_p = \left(\left(\overline{N}'_p \overline{h}_p\right)^1_1, \left(\overline{N}'_p \overline{h}_p\right)^2_1, \cdots, \left(\overline{N}'_p \overline{h}_p\right)^{m-1}_1, \left(\overline{N}'_p \overline{h}_p\right)^1_2, \cdots \right.$$
$$\left. \cdots, \left(\overline{N}'_p \overline{h}_p\right)^{m-1}_{2n}\right)^T.$$

Используя формулу (2.3), получаем

$$\left(\overline{N}'_p \overline{h}_p, \overline{g}_p\right) = \frac{l}{m}\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{\mu=1}^{2n}\left(\overline{N}'_p \overline{h}_p\right)^k_\mu g^\mu_k = \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{\mu,\nu,\sigma=1}^{2n}\left[W^{1,k}_{\mu\nu} + W^{2,k}_{\mu\nu\sigma}\right],$$

$$\left(\overline{N}'_p \overline{g}_p, \overline{h}_p\right) = \frac{l}{m}\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{\mu=1}^{2n}\left(\overline{N}'_p \overline{g}_p\right)^k_\mu h^\mu_k = \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{\mu,\nu,\sigma=1}^{2n}\left[W^{3,k}_{\mu\nu} + W^{4,k}_{\mu\nu\sigma}\right],$$

где

$$W^{1,k}_{\mu\nu} = C^{1,k}_{\mu\nu}\left(h^\nu_{k+1} - h^\nu_k\right) g^\mu_k + C^{2,k}_{\mu\nu}\left(h^\nu_k - h^\nu_{k-1}\right) g^\mu_k,$$

$$W^{2,k}_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial C^{1,k}_{\mu\nu}}{\partial u^\sigma_k} h^\sigma_k\left(u^\nu_{k+1} - u^\nu_k\right) g^\mu_k + \frac{\partial C^{2,k}_{\mu\nu}}{\partial u^\sigma_k} h^\sigma_k\left(u^\nu_k - u^\nu_{k-1}\right) g^\mu_k + \frac{\partial C^{2,k}_{\mu\nu}}{\partial u^\sigma_{k-1}} h^\sigma_{k-1}\left(u^\nu_k - u^\nu_{k-1}\right) g^\mu_k + \frac{l}{m}\frac{\partial E^k_\mu}{\partial u^\sigma_k} h^\sigma_k g^\mu_k,$$

$$W^{3,k}_{\mu\nu} = C^{1,k}_{\mu\nu}\left(g^\nu_{k+1} - g^\nu_k\right) h^\mu_k + C^{2,k}_{\mu\nu}\left(g^\nu_k - g^\nu_{k-1}\right) h^\mu_k,$$

$$W^{4,k}_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial C^{1,k}_{\mu\nu}}{\partial u^\sigma_k} g^\sigma_k\left(u^\nu_{k+1} - u^\nu_k\right) h^\mu_k + \frac{\partial C^{2,k}_{\mu\nu}}{\partial u^\sigma_k} g^\sigma_k\left(u^\nu_k - u^\nu_{k-1}\right) h^\mu_k + \frac{\partial C^{2,k}_{\mu\nu}}{\partial u^\sigma_{k-1}} g^\sigma_{k-1}\left(u^\nu_k - u^\nu_{k-1}\right) h^\mu_k + \frac{l}{m}\frac{\partial E^k_\mu}{\partial u^\sigma_k} g^\sigma_k h^\mu_k.$$

Здесь $\overline{h}_p$, $\overline{g}_p$ — произвольные элементы из $D\left(\overline{N}'_p\right)$. Поскольку

$$W^{1,k}_{\mu\nu} = W^{1,k}_{\nu\mu}, \ \ W^{2}_{\mu\nu\sigma} = W^{2,k}_{\nu\sigma\mu}, \ \ W^{4,k}_{\mu\nu\sigma} = W^{4,k}_{\mu\sigma\nu},$$

то

$$\left(\overline{N}'_p\overline{h}_p,\overline{g}_p\right)=\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{\mu,\nu,\sigma=1}^{2n}\left[W^{1,k}_{\nu\mu}+W^{2,k}_{\nu\sigma\mu}\right]=\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{\mu,\nu,\sigma=1}^{2n}\left[C^{1,k}_{\nu\mu}\left(h^{\mu}_{k+1}-h^{\mu}_{k}\right)g^{\nu}_{k}+C^{2,k}_{\nu\mu}\left(h^{\mu}_{k}-h^{\mu}_{k-1}\right)g^{\nu}_{k}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial C^{1,k}_{\nu\sigma}}{\partial u^{\mu}_{k}}h^{\mu}_{k}\left(u^{\sigma}_{k+1}-u^{\sigma}_{k}\right)g^{\nu}_{k}+\frac{\partial C^{2,k}_{\nu\sigma}}{\partial u^{\mu}_{k}}h^{\mu}_{k}\left(u^{\sigma}_{k}-u^{\sigma}_{k-1}\right)g^{\nu}_{k}+\frac{\partial C^{2,k}_{\nu\sigma}}{\partial u^{\mu}_{k-1}}h^{\mu}_{k-1}\left(u^{\sigma}_{k}-u^{\sigma}_{k-1}\right)g^{\nu}_{k}+\frac{l}{m}\frac{\partial E^{k}_{\nu}}{\partial u^{\mu}_{k}}h^{\mu}_{k}g^{\nu}_{k}\right],$$

$$\left(\overline{N}'_p\overline{g}_p,\overline{h}_p\right)=\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{\mu,\nu,\sigma=1}^{2n}\left[W^{3,k}_{\mu\nu}+W^{4,k}_{\mu\sigma\nu}\right]=\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{\mu,\nu,\sigma=1}^{2n}h^{\mu}_{k}\left[C^{1,k}_{\mu\nu}\left(g^{\nu}_{k+1}-g^{\nu}_{k}\right)+C^{2,k}_{\mu\nu}\left(g^{\nu}_{k}-g^{\nu}_{k-1}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial C^{1,k}_{\mu\sigma}}{\partial u^{\nu}_{k}}g^{\nu}_{k}\left(u^{\sigma}_{k+1}-u^{\sigma}_{k}\right)+\frac{\partial C^{2,k}_{\mu\sigma}}{\partial u^{\nu}_{k}}g^{\nu}_{k}\left(u^{\sigma}_{k}-u^{\sigma}_{k-1}\right)+\frac{\partial C^{2,k}_{\mu\sigma}}{\partial u^{\nu}_{k-1}}g^{\nu}_{k-1}\left(u^{\sigma}_{k}-u^{\sigma}_{k-1}\right)+\frac{l}{m}\frac{\partial E^{k}_{\mu}}{\partial u^{\nu}_{k}}g^{\nu}_{k}\right].$$

Ввиду произвольности элементов h^{μ}_{k} из критерия потенциальности (2.1) получаем

$$\sum_{\nu,\sigma=1}^{2n}\left[C^{1,k-1}_{\nu\mu}g^{\nu}_{k-1}-C^{1,k}_{\nu\mu}g^{\nu}_{k}+C^{2,k}_{\nu\mu}g^{\nu}_{k}-C^{2,k+1}_{\nu\mu}g^{\nu}_{k+1}+\frac{\partial C^{1,k}_{\nu\sigma}}{\partial u^{\mu}_{k}}\left(u^{\sigma}_{k+1}-u^{\sigma}_{k}\right)g^{\nu}_{k}+\frac{\partial C^{2,k}_{\nu\sigma}}{\partial u^{\mu}_{k}}\left(u^{\sigma}_{k}-u^{\sigma}_{k-1}\right)g^{\nu}_{k}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial C^{2,k+1}_{\nu\sigma}}{\partial u^{\mu}_{k}}\left(u^{\sigma}_{k+1}-u^{\sigma}_{k}\right)g^{\nu}_{k+1}+\frac{l}{m}\frac{\partial E^{k}_{\nu}}{\partial u^{\mu}_{k}}g^{\nu}_{k}\right]=\sum_{\nu,\sigma=1}^{2n}\left[C^{1,k}_{\mu\nu}\left(g^{\nu}_{k+1}-g^{\nu}_{k}\right)+C^{2,k}_{\mu\nu}\left(g^{\nu}_{k}-g^{\nu}_{k-1}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial C^{1,k}_{\mu\sigma}}{\partial u^{\nu}_{k}}g^{\nu}_{k}\left(u^{\sigma}_{k+1}-u^{\sigma}_{k}\right)+\frac{\partial C^{2,k}_{\mu\sigma}}{\partial u^{\nu}_{k}}g^{\nu}_{k}\left(u^{\sigma}_{k}-u^{\sigma}_{k-1}\right)+\frac{\partial C^{2,k}_{\mu\sigma}}{\partial u^{\nu}_{k-1}}g^{\nu}_{k-1}\left(u^{\sigma}_{k}-u^{\sigma}_{k-1}\right)+\frac{l}{m}\frac{\partial E^{k}_{\mu}}{\partial u^{\nu}_{k}}g^{\nu}_{k}\right],$$

$$k=\overline{2,m-2},\mu=\overline{1,2n},$$

$$\sum_{\nu,\sigma=1}^{2n}\left[-C^{1,1}_{\nu\mu}g^{\nu}_{1}+C^{2,1}_{\nu\mu}g^{\nu}_{1}-C^{2,2}_{\nu\mu}g^{\nu}_{2}+\frac{\partial C^{1,1}_{\nu\sigma}}{\partial u^{\mu}_{1}}\left(u^{\sigma}_{2}-u^{\sigma}_{1}\right)g^{\nu}_{1}+\frac{\partial C^{2,1}_{\nu\sigma}}{\partial u^{\mu}_{1}}\left(u^{\sigma}_{1}-u^{\sigma}_{0}\right)g^{\nu}_{1}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial C^{2,2}_{\nu\sigma}}{\partial u^{\mu}_{1}}\left(u^{\sigma}_{2}-u^{\sigma}_{1}\right)g^{\nu}_{2}+\frac{l}{m}\frac{\partial E^{1}_{\nu}}{\partial u^{\mu}_{1}}g^{\nu}_{1}\right]=\sum_{\nu,\sigma=1}^{2n}\left[C^{1,1}_{\mu\nu}\left(g^{\nu}_{2}-g^{\nu}_{1}\right)+C^{2,1}_{\mu\nu}g^{\nu}_{1}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial C^{1,1}_{\mu\sigma}}{\partial u^{\nu}_{1}}g^{\nu}_{1}\left(u^{\sigma}_{2}-u^{\sigma}_{1}\right)+\frac{\partial C^{2,1}_{\mu\sigma}}{\partial u^{\nu}_{1}}g^{\nu}_{1}\left(u^{\sigma}_{1}-u^{\sigma}_{0}\right)+\frac{l}{m}\frac{\partial E^{1}_{\mu}}{\partial u^{\nu}_{1}}g^{\nu}_{1}\right],\mu=\overline{1,2n},$$

$$\sum_{\nu,\sigma=1}^{2n}\left[C^{1,m-2}_{\nu\mu}g^{\nu}_{m-2}-C^{1,m-1}_{\nu\mu}g^{\nu}_{m-1}+C^{2,m-1}_{\nu\mu}g^{\nu}_{m-1}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial C^{1,m-1}_{\nu\sigma}}{\partial u^{\mu}_{m-1}}\left(u^{\sigma}_{m}-u^{\sigma}_{m-1}\right)g^{\nu}_{m-1}+\frac{\partial C^{2,m-1}_{\nu\sigma}}{\partial u^{\mu}_{m-1}}\left(u^{\sigma}_{m-1}-u^{\sigma}_{m-2}\right)g^{\nu}_{m-1}+\frac{l}{m}\frac{\partial E^{m-1}_{\nu}}{\partial u^{\mu}_{m-1}}g^{\nu}_{m-1}\right]=$$

$$=\sum_{\nu,\sigma=1}^{2n}\left[-C^{1,m-1}_{\mu\nu}g^{\nu}_{m-1}+C^{2,m-1}_{\mu\nu}\left(g^{\nu}_{m-1}-g^{\nu}_{m-2}\right)+\right.$$

$$+\frac{\partial C^{1,m-1}_{\mu\sigma}}{\partial u^{\nu}_{m-1}}g^{\nu}_{m-1}\left(u^{\sigma}_{m}-u^{\sigma}_{m-1}\right)+\frac{\partial C^{2,m-1}_{\mu\sigma}}{\partial u^{\nu}_{m-1}}g^{\nu}_{m-1}\left(u^{\sigma}_{m-1}-u^{\sigma}_{m-2}\right)+$$

$$\left.+\frac{\partial C^{2,m-1}_{\mu\sigma}}{\partial u^{\nu}_{m-2}}g^{\nu}_{m-2}\left(u^{\sigma}_{m-1}-u^{\sigma}_{m-2}\right)+\frac{l}{m}\frac{\partial E^{m-1}_{\mu}}{\partial u^{\nu}_{m-1}}g^{\nu}_{m-1}\right],\mu=\overline{1,2n}.$$

Ввиду произвольности элементов g^{ν}_{k} отсюда находим условия

$$C^{1,k-1}_{\nu\mu}+C^{2,k}_{\mu\nu}=\sum_{\sigma=1}^{2n}\frac{\partial C^{2,k}_{\nu\sigma}}{\partial u^{\mu}_{k-1}}\left(u^{\sigma}_{k}-u^{\sigma}_{k-1}\right)\left(k=\overline{2,m-1},\mu,\nu=\overline{1,2n}\right), \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered}-C^{1,k}_{\nu\mu}+C^{2,k}_{\nu\mu}+C^{1,k}_{\mu\nu}-C^{2,k}_{\mu\nu}+\tfrac{l}{m}\tfrac{\partial E^{k}_{\nu}}{\partial u^{\mu}_{k}}-\tfrac{l}{m}\tfrac{\partial E^{k}_{\mu}}{\partial u^{\nu}_{k}}=\\ =\textstyle\sum_{\sigma=1}^{2n}\left[\left(\tfrac{\partial C^{2,k}_{\mu\sigma}}{\partial u^{\nu}_{k}}-\tfrac{\partial C^{2,k}_{\nu\sigma}}{\partial u^{\mu}_{k}}\right)\left(u^{\sigma}_{k}-u^{\sigma}_{k-1}\right)\right]\left(k=\overline{1,m-1},\mu,\nu=\overline{1,2n}\right),\end{gathered} \tag{2.5}$$

$$\sum_{\sigma=1}^{2n}\left(\frac{\partial C^{1,k}_{\mu\sigma}}{\partial u^{\nu}_{k}}-\frac{\partial C^{1,k}_{\nu\sigma}}{\partial u^{\mu}_{k}}\right)=0\quad\left(k=\overline{1,m-1},\mu,\nu=\overline{1,2n}\right). \tag{2.6}$$

Таким образом, выше доказана следующая теорема.

Теорема 2.2. Система (1.4) является потенциальной в области $D\left(\overline{N}_p\right)$ относительно билинейной формы (2.3) тогда и только тогда, когда выполняются условия (2.4) – (2.6).

Остается вопрос построения функционала — потенциала оператора $\overline{N}_p$ — аналога действия по Гамильтону.

3. Построение действия по Гамильтону

При выполнений условий (2.4) – (2.6) искомый функционал $F_{\overline{N}_p}$ может быть построен по формуле (2.2). К этому вопросу можно подойти по-другому. Ищем потенциал оператора $\overline{N}_p$ в виде

$$F_{\overline{N}_p}\left[\overline{u}_p\right]=\frac{l}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\sum_{\nu=1}^{2n}R_\nu^k\frac{u_{k+1}^\nu-u_k^\nu}{\tau}-B^k\right), \tag{3.1}$$

где $R_\nu\left(t,u\right):[0,l]\times\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}\left(\nu=\overline{1,2n}\right)$, $B\left(t,u\right):[0,l]\times\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$ — неизвестные непрерывно дифференцируемые функции, а $R_\nu^k=R_\nu\left(t_k,u_k\right)$, $R^k=\left(R_1^k,R_2^k,\ldots,R_{2n}^k\right),B^k=B\left(t_k,u_k\right)\left(k=\overline{1,m-1}\right)$.

Из определения потенциальности имеем

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{F_{\overline{N}_p}\left[\overline{u}_p+\varepsilon\overline{h}_p\right]-F_{\overline{N}_p}\left[\overline{u}_p\right]}{\varepsilon}=\frac{l}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{\mu,\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu^k}{\partial u_k^\mu}h_k^\mu\frac{u_{k+1}^\nu-u_k^\nu}{\tau}+R_\nu^k\frac{h_{k+1}^\nu-h_k^\nu}{\tau}-\frac{\partial B^k}{\partial u_k^\mu}h_k^\mu\right)=$$

$$=\frac{l}{m}\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{\mu,\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu^k}{\partial u_k^\mu}\frac{u_{k+1}^\nu-u_k^\nu}{\tau}-\frac{R_\mu^k-R_\mu^{k-1}}{\tau}-\frac{\partial B^k}{\partial u_k^\mu}\right)h_k^\mu=$$

$$=\left(\overline{N}_m(\overline{u}_m),\overline{h}_m\right)=\frac{l}{m}\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{\mu,\nu=1}^{2n}\left(C_{\mu\nu}^{1,k}\frac{u_{k+1}^\nu-u_k^\nu}{\tau}+C_{\mu\nu}^{2,k}\frac{u_k^\nu-u_{k-1}^\nu}{\tau}+E_\mu^k\right)h_k^\mu.$$

Считая, что элементы h_k^μ произвольные, отсюда получаем

$$\begin{gathered}\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial R_\nu^k}{\partial u_k^\mu}\frac{u_{k+1}^\nu-u_k^\nu}{\tau}-\frac{R_\mu^k-R_\mu^{k-1}}{\tau}-\frac{\partial B^k}{\partial u_k^\mu}=\sum_{\nu=1}^{2n}\left(C_{\mu\nu}^{1,k}\frac{u_{k+1}^\nu-u_k^\nu}{\tau}+C_{\mu\nu}^{2,k}\frac{u_k^\nu-u_{k-1}^\nu}{\tau}\right)+E_\mu^k\\ \left(k=\overline{1,m-1},\ \ \mu=\overline{1,2n}\right).\end{gathered} \tag{3.2}$$

Сравнивая левую и правую части тождеств (3.2), находим

$$C_{\mu\nu}^{1,k}=\frac{\partial R_\nu^k}{\partial u_k^\mu}\quad\left(k=\overline{1,m-1},\ \ \mu,\nu=\overline{1,2n}\right), \tag{3.3}$$

$$-\frac{R_\mu^k-R_\mu^{k-1}}{\tau}-\frac{\partial B^k}{\partial u_k^\mu}=\sum_{\nu=1}^{2n}C_{\mu\nu}^{2,k}\frac{u_k^\nu-u_{k-1}^\nu}{\tau}+E_\mu^k\quad\left(k=\overline{1,m-1},\ \ \mu=\overline{1,2n}\right). \tag{3.4}$$

Если существуют функции R_μ^k, удовлетворяющие этим условиям, то отсюда следует, что

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial u_{k-1}^\sigma}\left(-\frac{R_\mu^k-R_\mu^{k-1}}{\tau}-\frac{\partial B^k}{\partial u_k^\mu}\right)=\frac{\partial R_\mu^{k-1}}{\partial u_{k-1}^\sigma}=\\ &\qquad=\frac{\partial}{\partial u_{k-1}^\sigma}\left(\sum_{\nu=1}^{2n}C_{\mu\nu}^{2,k}\frac{u_k^\nu-u_{k-1}^\nu}{\tau}+E_\mu^k\right)=-\frac{1}{\tau}C_{\mu\sigma}^{2,k}+\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial C_{\mu\nu}^{2,k}}{\partial u_{k-1}^\sigma}\frac{u_k^\nu-u_{k-1}^\nu}{\tau}.\end{aligned}$$

В силу условий (2.4) имеем

$$-C_{\mu\sigma}^{2,k}+\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial C_{\mu\nu}^{2,k}}{\partial u_{k-1}^\sigma}\left(u_k^\nu-u_{k-1}^\nu\right)=C_{\sigma\mu}^{1,k-1}.$$

Таким образом, получаем $C_{\mu\nu}^{1,k}=\frac{\partial R_\nu^k}{\partial u_k^\mu}$. Значит, условия (3.3) являются следствием условий (3.4). Итак, чтобы определить функции R^k, B^k, нужно решить следующую систему уравнений:

$$-\frac{R_\mu^k-R_\mu^{k-1}}{\tau}-\frac{\partial B^k}{\partial u_k^\mu}=\sum_{\nu=1}^{2n}C_{\mu\nu}^{2,k}\frac{u_k^\nu-u_{k-1}^\nu}{\tau}+E_\mu^k,\quad\left(k=\overline{1,m-1},\ \ \mu=\overline{1,2n}\right).$$

Укажем некоторые частные случаи, для которых можно решить эти уравнения относительно R^k, B^k.

- Путь существуют функции $\Phi_\mu^1(t_k,u_k), \Phi_\mu^2(t_k,u_k)$ такие, что
$$\sum_{\nu=1}^{2n} C_{\mu\nu}^{2,k}\left(u_k^\nu-u_{k-1}^\nu\right)=\Phi_\mu^1(t_k,u_k)+\Phi_\mu^2(t_{k-1},u_{k-1}).$$
Тогда
$$\begin{cases} R_\mu^k=\Phi_\mu^2(t_k,u_k), \mu=\overline{1,2n},\\ B^k=-\sum_{\mu=1}^{2n} u_k^\mu\int_0^1\left[E_\mu^k(t_k,\lambda u_k)+\dfrac{\Phi_\mu^1(k,\lambda u_k)+\Phi_\mu^2(k,\lambda u_k)}{\tau}\right]d\lambda.\end{cases}$$
- Путь $C_{\mu\nu}^{2,k}$ зависят только от k. Тогда
$$\sum_{\nu=1}^{2n} C_{\mu\nu}^{2,k}\left(u_k^\nu-u_{k-1}^\nu\right)=\sum_{\nu=1}^{2n}\left[\left(C_{\mu\nu}^{2,k+1}u_k^\nu-C_{\mu\nu}^{2,k}u_{k-1}^\nu\right)-u_k^\nu\left(C_{\mu\nu}^{2,k+1}-C_{\mu\nu}^{2,k}\right)\right].$$
Получаем
$$\begin{cases} R_\mu^k=-\sum_{\nu=1}^{2n} C_{\mu\nu}^{2,k+1}u_k^\nu,\ \ \mu=\overline{1,2n},\\ B^k=-\sum_{\mu=1}^{2n} u_k^\mu\int_0^1\left[E_\mu^k(t_k,\lambda u_k)-\sum_{\nu=1}^{2n}\lambda u_k^\nu\dfrac{C_{\mu\nu}^{2,k+1}-C_{\mu\nu}^{2,k}}{\tau}\right]d\lambda.\end{cases}$$

Таким образом, приходим к действию по Гамильтону $F_{\overline{N}_p}$.

4. Пример

Рассмотрим систему уравнений движения точки единичной массы в среде с сопротивлением, пропорциональным квадрату скорости [7]
$$\begin{cases}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-Ky^2\\ -y\end{pmatrix}=0,\\ (x(0),y(0))=(\phi_1,\phi_2),\\ (x(1),y(1))=(\phi_3,\phi_4),\end{cases} \tag{4.1}$$
где $\dot{x}=y$ скорость частицы, K — постоянный коэффициент.

Запишем разностную схему этой системы
$$\overline{N}_p(\overline{u}_p)\equiv\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{x_{k+1}-x_k}{\tau}\\ \frac{y_{k+1}-y_k}{\tau}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -\frac{y_k}{y_{k-1}}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{x_k-x_{k-1}}{\tau}\\ \frac{y_k-y_{k-1}}{\tau}\end{pmatrix}+ \\ +\begin{pmatrix}-Ky_k^2\\ -y_k\end{pmatrix}=0,$$
$$u_0=(\phi_1,\phi_2)^T, u_m=(\phi_3,\phi_4)^T,$$
где $u_k=(x_k,y_k)^T$.

Поскольку
$$C_{12}^{1,k-1}+C_{21}^{2,k}\neq\frac{\partial C_{11}^{2,k}}{\partial y_{k-1}}(x_k-x_{k-1})+\frac{\partial C_{12}^{2,k}}{\partial y_{k-1}}(y_k-y_{k-1}),$$
то разностная схема непотенциальная.

С помощью условий (2.4) – (2.6) можно найти матричный вариационный множитель
$$M_k=\begin{pmatrix}\frac{1}{y_k^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{y_k^2}\end{pmatrix}.$$

Тогда
$$M_k\overline{N}_p(\overline{u}_p)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \frac{1}{y_k^2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{x_{k+1}-x_k}{\tau}\\ \frac{y_{k+1}-y_k}{\tau}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{y_ky_{k-1}}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{x_k-x_{k-1}}{\tau}\\ \frac{y_k-y_{k-1}}{\tau}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-K\\ -\frac{1}{y_k}\end{pmatrix},$$
потенциальный оператор и
$$\begin{cases} R_1^k-R_1^{k-1}=\frac{1}{y_ky_{k-1}}(y_k-y_{k-1})=-\frac{1}{y_k}+\frac{1}{y_{k-1}}\Rightarrow R_1^k=-\frac{1}{y_k},\\ R_2^k-R_2^{k-1}=0\Rightarrow R_2^k=0,\\ \frac{\partial B^k}{\partial x_k}+\frac{\partial B^k}{\partial y_k}=K+\frac{1}{y_k}\Rightarrow B^k=Kx_k+\ln y_k.\end{cases}$$

Искомый функционал равен

$$F_{M_k \overline{N}_p}[\overline{u}_p] = -\frac{l}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{x_{k+1}-x_k}{\tau y_k} + Kx_k + \ln y_k\right).$$

В случае непрерывного времени он имеет вид [7]

$$J = -\int_0^1 \left(\frac{1}{2y}\dot{x} + \frac{x}{2y^2}\dot{y} + Kx + \ln y\right)dt.$$

Обозначим

- $\overline{u}_p^1 = \left(\overline{x}_p^1, \overline{y}_p^1\right)^T$ — точное решение задачи (4.1),
- $\overline{u}_p^2 = \left(\overline{x}_p^2, \overline{y}_p^2\right)^T$ — решение, полученное при переходе к вариационному множителю и дальнейшей дискретизации функционала,
- $\overline{u}_p^3 = \left(\overline{x}_p^2, \overline{y}_p^3\right)^T$ — решение, полученное при прямом использовании метода Рунге — Кутта.

Для оценки погрешности решений $\overline{u}_p^i$ $(i = 2, 3)$ используем норму $\left\|\overline{u}_p^i - \overline{u}_p^1\right\|$ по формуле (1.3). Положим $m = 4, K = 1, u_0 = (0, 1)^T, u_m = \left(\frac{1}{2}, \ln 2\right)^T$, находим

$$u^1(t_k) = \left(\ln(1 + t_k), \frac{1}{1 + t_k}\right)^T.$$

С помощью Matlab получаем таблицу значений и графики вышеперечисленных решений (рис. 4.1, 4.2).

Таблица

Значения решений в точках и погрешности решений

Table

Solution values at points and solution errors

Решение	$k = 1\,(t = 0,25)$	$k = 2\,(t = 0,5)$	$k = 3\,(t = 0,75)$	Погрешность
$\overline{u}_6^1$	$\begin{pmatrix} 0,2231 \\ 0,8000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,4055 \\ 0,6667 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,5596 \\ 0,5714 \end{pmatrix}$	0
$\overline{u}_6^2$	$\begin{pmatrix} 0,2000 \\ 0,8333 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,3667 \\ 0,7143 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,5095 \\ 0,6250 \end{pmatrix}$	0,0329
$\overline{u}_6^3$	$\begin{pmatrix} 0,1800 \\ 0,7867 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,3248 \\ 0,6528 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,4467 \\ 0,5597 \end{pmatrix}$	0,0418

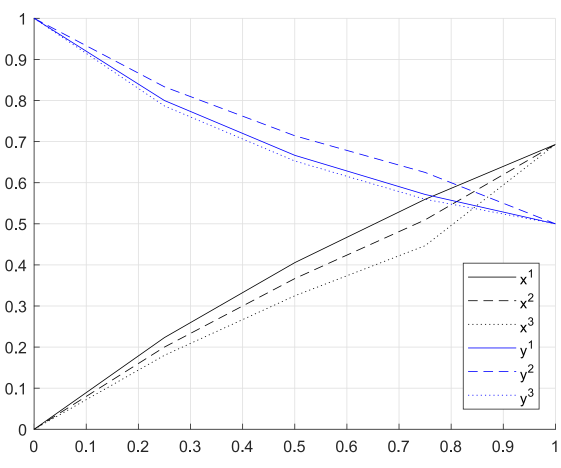

Рис. 4.1. Графики решений $\overline{u}_6^1$, $\overline{u}_6^2$, $\overline{u}_6^3$
Fig. 4.1. Graph of solutions $\overline{u}_6^1$, $\overline{u}_6^2$, $\overline{u}_6^3$

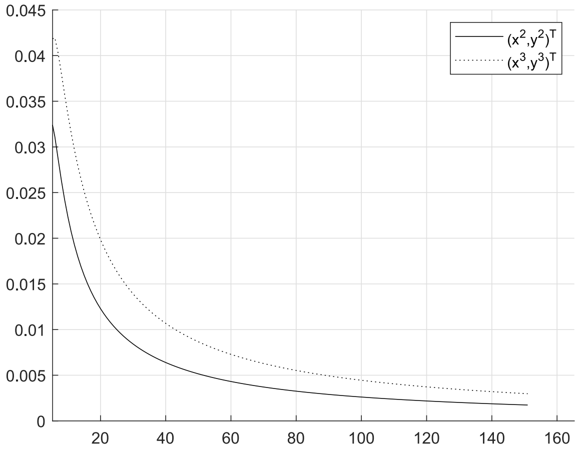

Рис. 4.2. Зависимость погрешности от количества узлов m
Fig. 4.2. Dependence of the error on the number of nodes m

Выводы

Получены разностные уравнения, соответствующие системе вида $C(t,u)\dot{u}(t) + E(t,u) = 0$ с непрерывным временем. Введено понятие потенциальности дискретной системы. Получены необходимые и достаточные условия потенциальности рассматриваемой разностной системы относительно заданной билинейной формы. Представлен алгоритм построения соответствующего действия по Гамильтону. Дан иллюстрирующий пример.

Литература

[1] Треногин В.А. Функциональный анализ: учебник. 3-е изд. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 488 с. URL: https://booksee.org/book/443580.

[2] Santilli R.M. Foundations of Theoretical Mechanics II. New York: Springer-Verlag New York Inc., 1983. 371 p. URL: http://www.santilli-foundation.org/docs/santilli-69.pdf.

[3] Kong X., Wu H., Mei F. Discrete optimal control for Birkhoffian systems // Nonlinear Dynamics. 2013. Vol. 74. pp. 711–719. DOI: http://doi.org/10.1007/s11071-013-0999-0.

[4] Zhang H., Chen L., Gu S., Liu C. The discrete variational principle and the first integrals of Birkhoff systems // Chinese Physics. 2007. Vol. 16, № 3. pp. 582–587. DOI: http://doi.org/10.1088/1009-1963/16/3/004.

[5] Филиппов В.М., Савчин В.М., Шорохов С.Г. Вариационные принципы для непотенциальных операторов // Итоги науки и техн. Сер.: Соврем. пробл. мат. Нов. достиж. 1992. Т. 40 С. 3–176. URL: http://mi.mathnet.ru/rus/intd/v40/p3.

[6] Савчин В.М. Математические методы механики бесконечномерных непотенциальных систем. Москва: РУДН, 1991. 237 с.

[7] Галлиулин А.С., Гафаров Г.Г., Малайшка Р.П., Хван А.М. Аналитическая динамика систем Гельмгольца, Биркгофа, Намбу. Москва: Редакция ж-ла УФН, 1997. 324 с.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-3-74-82

Submited: 27.09.2021
Revised: 28.10.2021
Accepted: 15.11.2021

V.M. Savchin
Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation
E-mail: savchin-vm@rudn.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3850-6747
P.T. Trinh
Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation
E-mail: tr.phuoctoan@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7707-322X

ON DISCRETE SYSTEMS WITH POTENTIAL OPERATORS[2]

ABSTRACT

The main purpose of this work is to study the potentiality of a discrete system obtained from the system of the form $C(t,u)\dot{u}(t)+E(t,u)=0$ with continuous time. The definition of potentiality of the corresponding discrete system is introduced. Necessary and sufficient conditions for its potentiality with respect to a given bilinear form are obtained. The algorithm for the construction of the corresponding functional — the analogue of the Hamiltonian action — is presented. The illustrative example is given.

Key words: potential operators; discrete systems.

Citation. Savchin V.M., Trinh P.T. On discrete systems with potential operators. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 74–82. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-74-82. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

Vladimir M. Savchin — professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, S.M. Nikolskii Mathematical Institute, Peoples' Friendship University of Russia, 6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russian Federation.

Phuoc T. Trinh — PhD student, S.M. Nikolskii Mathematical Institute, Peoples' Friendship University of Russia, 6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russian Federation.

References

[1] Trenogin V.A. Functional Analysis: textbook. 3rd edition. Moscow: FIZMATLIT, 2002, 488 p. Available at: https://booksee.org/book/443580. (In Russ.)

[2] Santilli R.M. Foundations of Theoretical Mechanics II. New York: Springer-Verlag New York Inc., 1983, 371 p. Available at: http://www.santilli-foundation.org/docs/santilli-69.pdf.

[3] Kong X., Wu H., Mei F. Discrete optimal control for Birkhoffian systems. *Nonlinear Dynamics*, 2013, vol. 74, pp. 711–719. DOI: http://doi.org/10.1007/s11071-013-0999-0.

[4] Zhang H., Chen L., Gu S., Liu C. The discrete variational principle and the first integrals of Birkhoff systems. *Chinese Physics*, 2007, vol. 16, no. 3, pp. 582–587. DOI: http://doi.org/10.1088/1009-1963/16/3/004.

[5] Filippov V.M., Savchin V.M., Shorokhov S.G. Variational principles for nonpotential operators. *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, 1994, vol. 68, no. 3, pp. 275–398. DOI: http://doi.org/10.1007/BF01252319. (English; Russian original)

[6] Savchin V.M. Mathematical methods in mechanics of infinite dimensional nonpotential systems. Moscow: RUDN, 1991, 237 p. (In Russ.)

[7] Galiullin A.S., Gafarov G.G., Malaishka R.P., Khwan A.M. Analytical dynamics of Helmholtz, Birkhoff and Nambu systems. Moscow: Redaktsiya zh-la UFN, 1997, 324 p. (In Russ.)

[2]This paper has been supported by the RUDN University Strategic Academic Leadership Program.