

## МЕХАНИКА MECHANICS



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-3-46-73

УДК 512.531; 519.7



Дата: поступления статьи: 14.09.2021  
после рецензирования: 16.10.2021  
принятия статьи: 15.11.2021

**О.Н. Белова**

Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация  
E-mail: BelovaONik@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4492-223X>

**Д.В. Чаплий**

Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация  
E-mail: Dch300189@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9510-3659>

**Л.В. Степанова**

Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация  
E-mail: Stepanovalv2015@yandex.ru ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

### ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКОЙ ПОДПРОГРАММЫ UMAT ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КONTИНУАЛЬНОЙ МЕХАНИКИ (ОБЗОР)

#### АННОТАЦИЯ

В настоящей статье представлен обзор применения подпрограммы UMAT многофункционального программного комплекса SIMULIA Aباqus в механике деформируемого твердого тела и смежных с ней областях. Данная подпрограмма служит для описания новых пользовательских материалов, отсутствующих в классе стандартных материалов пакета SIMULIA Aباqus. Приведены примеры задач и определяющих уравнений материалов, которые моделируются с помощью процедур UMAT/VUMAT. Представлены разнообразные типы материалов, успешно описанных посредством пользовательских процедур UMAT и VUMAT. Даны общее описание и опыт применения подпрограммы UMAT. Приведены результаты конечно-элементного моделирования деформирования пластины, ослабленной центральным круговым отверстием, при всестороннем равномерном и одноосном растяжении при установившейся ползучести в среде с поврежденностью, эволюционирующей по степенному закону, в связанной постановке задачи (ползучесть – поврежденность). Найдены распределения напряжений, деформаций и поля поврежденности у кончика дефекта в условиях ползучести и приведен анализ влияния процесса накопления повреждений на поля напряжений у вершины трещины в условиях установившейся ползучести. Продемонстрированы распределения напряжений и деформаций ползучести с учетом накопления поврежденности с течением времени.

**Ключевые слова:** пользовательская процедура UMAT; SIMULIA Aباqus; композиты; ползучесть; поврежденность; механика твердого тела; моделирование материалов; разрушение в условиях ползучести.

**Цитирование.** Белова О.Н., Чаплий Д.В., Степанова Л.В. Применение пользовательской подпрограммы UMAT для решения задач континуальной механики (обзор) // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2021. Т. 27, № 3. С. 46–73. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-46-73>.

**Информация о конфликте интересов:** авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Белова О.Н., 2021

Оксана Николаевна Белова — аспирант кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

© Чаплий Д.В., 2021

*Дмитрий Викторович Чаплий* — аспирант кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

© Степанова Л.В., 2021

*Лариса Валентиновна Степанова* — заведующий кафедрой математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

## Введение

В настоящее время доступно множество функциональных пакетов программ, таких как Mechanical ANSYS, NASTRAN, SIMULIA Abaqus, MARC/Mentat и др., реализующих метод конечных элементов и способных решать сложные инженерные задачи [1–4]. Особую популярность получили программные комплексы SIMULIA Abaqus и Mechanical ANSYS, предоставляющие мощные и простые в использовании инструменты и возможности разработки, позволяющие пользователям легко выполнять моделирование, анализ и постобработку полученных результатов [5–87]. Для моделирования различных материалов, не включенных в библиотеку материалов Abaqus, имеются специальные инструменты. В модуле Abaqus/Standard пользовательские модели реализуются с помощью подпрограммы UMAT (User-defined Material), в модуле Abaqus/Explicit – с помощью подпрограммы VUMAT. Через интерфейс подпрограммы пользовательского материала UMAT имеется возможность создать дополнительные модели материала, описав их механическое поведение [55–87].

## 1. Обзор задач, для решения которых применяется пользовательская процедура UMAT

Хрупкое и вязкое квазистатическое разрушение твердых тел представляет собой сложный механический процесс, для изучения которого применяются разнообразные вычислительные подходы и активно используется набор процедур расчетного комплекса SIMULIA Abaqus.

Расчетные процедуры комплекса SIMULIA Abaqus нашли широкое применение при моделировании процессов разрушения, происходящих в композиционных материалах [6–8]. Исследование и моделирование неустойчивостей из-за образования и распространения хрупкой межфазной трещины в волокнистых композитах приведено в работе Л. Тавары и соавторов [6]. Авторы используют подпрограмму UMAT для внедрения модели хрупкого разрушения композиционного материала, представляющего собой эпоксидную матрицу с углеродными волокнами. Процедура UMAT в данном исследовании нацелена на описание множественных отслаиваний включений от матрицы.

В целом композиционные материалы давно используются в инженерной практике и в настоящее время находят все более обширное применение при проектировании и эксплуатации конструкций в различных отраслях и при разных внешних температурно-механических воздействиях [6–8]. Следует отметить, что процедура UMAT используется для моделирования различных особенностей деформирования в условиях ползучести достаточно широко [7; 15; 21; 23; 24; 25]. Например, в композитах с полимерной матрицей возникают деформации ползучести даже при низких температурах из-за вязкоупругого поведения матрицы [7]. Учет этих явлений является первостепенной задачей при проектировании композитных конструкций. Работа [7] посвящена изучению поведения таких материалов при ползучести. Авторами [7] были изучены изотропные материалы, в частности, полимеры, у которых сохраняются вязкоупругие свойства даже при низких температурах. На основе микромеханического подхода с использованием элементарного репрезентативного объема проанализировано поведение композита с полимерной матрицей в условиях ползучести. Авторы предположили, что волокна являются линейно-упругими, а материал матрицы является вязкоупругим. Для проведения численного моделирования в пакете SIMULIA Abaqus была разработана подпрограмма UMAT для изучения одно- и разнонаправленных слоистых композитов в условиях ползучести на основе макромеханической теории.

В настоящее время доступно несколько моделей ортотропного материала, учитывающих повреждение композитных материалов с различными критериями разрушения и законами развития повреждений. В работе [8] представлен подход к разработке модели повреждения ортотропных композитных материалов, основанный на критерии разрушения Цая-Ву, изначально предложенного в работах [9; 10] и являющегося одним из наиболее известных критериев инициации разрушения. Авторы [8] протестировали и успешно реализовали свою модель с помощью UMAT.

В цикле работ Б.Н. Федулова [11-13] с помощью пользовательских процедур расчетной программы ABAQUS рассмотрены задачи для нового критерия пластического течения, чувствительного к виду нагружения. Критерий пластичности описан в виде процедуры и введен в расчетную схему метода конечных элементов. Также с помощью нового критерия получены решения задач прочности термопластичных композиционных материалов с полимерной матрицей. В работах [13] вводится параметр степени кристалличности, влияющий на механические свойства материала. Посредством специальной программы была создана конечно-элементная модель термопластического материала, учитывающая изменение степени кристалличности материала как функции температуры.

В работах [14; 15] проводится моделирование пластических свойств материала на основе конституционных соотношений модели градиентной пластичности, основанной на дислокационной модели Тейлора [16] как при малых, так и при конечных деформациях. Необходимость создания такой модели связана с наличием сильных размерных эффектов в микро- и субмикронных масштабах, не учитываемых при моделировании с помощью классических теорий пластичности. В проведенных исследованиях свойства материала и приложенные нагрузки связываются с физическим расстоянием до вершины трещины, где градиент деформации существенно влияет на распределение напряжений, тем самым определяя условия, при которых эффект пластической зоны должен быть учтен при определении напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины.

Работа [17] посвящена исследованию влияния микроструктурных ловушек на диффузию водорода и охрупчивание при наличии циклических нагрузок. Разработана модель переноса водорода с несколькими ловушками, реализованная с помощью метода конечных элементов и подпрограммы UMAT и используемая для регистрации изменения состояния в окрестности вершины трещины и концентрации захваченного водорода в зависимости от частоты нагрузки, энергии связи ловушек и их плотности.

В [18] на основе конституционных уравнений градиентной пластичности представлен численный анализ совместного влияния пластических свойств материала, вида напряженного состояния и параметра Тейлора структуры материала на поля напряжений и плотностей дислокаций вблизи вершины трещины. Численные расчеты выполнены с привлечением вычислительного комплекса ANSYS. Определяющие соотношения градиентной теории пластичности были инкорпорированы в расчетный комплекс ANSYS посредством пользовательской подпрограммы USER-MATERIAL UMAT. В [18] установлено, что учет влияния характерного параметра структуры материала приводит к различным по масштабу эффектам повышения значений напряжений вблизи вершины трещины при плоском напряженном состоянии и плоской деформации по сравнению с решением для классической пластичности. На основе конечно-элементных решений с использованием теории градиентной пластичности найдены поля плотностей дислокаций в функции расстояния до вершины трещины. Координата равенства значений компонент дислокаций отвечает внешней границе области преобладания градиентной пластичности. Показано, что плоское напряженное состояние приводит к более высоким значениям эквивалентных напряжений и плотностей дислокаций по сравнению с плоским деформированным состоянием при одинаковых условиях нагружения. Выполнено многопараметрическое исследование и дана оценка коллективному влиянию пластических свойств и параметра Тейлора структуры материала в рамках теории градиентной пластичности.

В [19] аналитически и численно исследованы механические поля у вершины трещины также с привлечением теории градиентной пластичности. Конституционные соотношения основаны на теории градиентной пластичности первого порядка (MSG), базирующейся, в свою очередь, на дислокационной теории Тейлора. Определяющие уравнения введены в коммерческий пакет ANSYS, реализующий метод конечных элементов, с помощью пользовательской подпрограммы. Рассмотрены две краевые задачи для образца с одним краевым надрезом и для двухосно нагруженной пластины. Целью исследования является определение напряженно-деформированного состояния у вершины трещины. Эффекты градиента деформации, связанные с механизмами упрочнения дислокаций, приводят к повышению напряжений в области, примыкающей к кончику трещины, по сравнению с традиционной деформационной теорией пластичности. Полученные численные результаты показывают, что порядок сингулярности, предсказанный теорией MSG первого порядка, равен или выше, чем в линейно-упругих телах. Авторы делают заключение, что поля у вершины трещины не могут быть представлены в аналитической форме, аналогичной той, которую получают с помощью метода разделения переменных. В отличие от ранее показанной для теорий MSG пластичности более высокого порядка, порядок сингулярности проявляет зависимость от свойств пластичного материала. Аналитические и численные подходы используются для формулировки новых амплитудных (масштабных) коэффициентов. Для характеристики поля напряжений у вершины трещины предложен обобщенный  $J$ -интеграл, используемый для связи с нелинейным амплитудным коэффициентом.

Описание механических полей (напряжений, деформаций и поврежденности) в непосредственной зоне, примыкающей к вершине трещин нормального отрыва и поперечного сдвига, на основе градиентной теории пластичности является предметом исследования в [20]. Определяющие соотношения гра-

дентной теории пластичности снова инкорпорированы в расчетную схему метода конечных элементов с помощью пользовательской процедуры UMAT. На основе проведенного исследования авторы заключают, что для заданного нагружения эффекты градиентной пластичности сильнее проявляются для плоского напряженного состояния, чем для плоского деформированного состояния. Вычислительные результаты показывают, что сингулярность поля напряжений зависит от типа смешанного нагружения и поля напряжений не могут быть представлены в подобной форме, которую получают с помощью метода разложения по собственным функциям.

В диссертационной работе [21] в многопрофильном и междисциплинарном пакете Abaqus с помощью пользовательской процедуры UMAT реализовано моделирование разрушения полимерного композиционного материала в условиях ползучести. Автор обращается к трансверсально-изотропной вязкоупругой модели, предложенной Робинсоном и др. [22] и расширенной с учетом гидростатического напряжения. Вязкоупругая модель имеет следующую форму:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{\dot{\epsilon}_o} = \frac{3}{2} \Phi^{n-1} \frac{\Gamma_{ij}}{\sigma_o} \frac{1}{\psi^n}, \quad (1.2)$$

$$\dot{\psi} = -\frac{1}{(m+1)t_o} \Delta^v \frac{1}{\psi^m}, \quad (1.3)$$

где  $\epsilon_{ij}^e$  — компоненты упругой деформации,  $\dot{\epsilon}_{ij}$  и  $\dot{\epsilon}_{ij}$  — компоненты скорости общей деформации и деформации ползучести (вязкоупругой), соответственно;  $\sigma_{ij}$  — компоненты напряжений Коши;  $\sigma_o$  — эквивалентное напряжение;  $\dot{\epsilon}_o, n, m, t_o$  и  $v$  константы материала;  $\Phi$  — потенциальная функция диссипации;  $\Delta$  — изохронная функция поврежденности и  $\psi$  — параметр сплошности Качанова. Значение  $\psi = 1$  соответствует неповрежденному материалу,  $\psi = 0$  показывает, что материал полностью разрушен. Функции  $\Phi$  и  $\Delta$  зависят от инвариантов напряжений  $\sigma_{ij}$ , девиатора напряжений  $s_{ij}$  и тензора ориентации композиционного материала  $D_{ij}$ :

$$J_2 = s_{ij}s_{ij}/2, \quad J_o = D_{ij}s_{ij}, \quad I = \sigma_{ii}, \quad I_o = D_{ij}\sigma_{ij}, \quad J = D_{ij}s_{jk}s_{ki}. \quad (1.4)$$

Потенциальная функция диссипации  $\Phi$  и функция  $\Gamma_{ij}$  имеют вид

$$\Phi = \sqrt{3[J_2 - \xi(J - J_o^2) - (\zeta - \eta)J_o^2 + 1/9(\zeta - 4\eta)I^2]}/\sigma_o, \quad (1.5)$$

$$\Gamma_{ij} = \partial\Phi/\partial\sigma_{ij} = s_{ij} - \xi(D_{ik}s_{kj} + s_{ik}D_{kj} - 2J_oD_{ij}) - 2(\zeta - \eta)J_o(D_{ij} - 1/3\delta_{ij}) + 2/9(\zeta - 4\eta)I\delta_{ij}. \quad (1.6)$$

Здесь  $\xi, \zeta, \eta$  — параметры анизотропии, подбираемые, исходя из следующих неравенств [22]:

$$4(\zeta - \eta) - 3\xi \geq 0,$$

$$2(\zeta - \eta) - 3\xi \leq 0,$$

$$1 + 4\eta - 2\zeta \geq 0,$$

$$\zeta - 4\eta \geq 0.$$

Изохронная функции поврежденности  $\Delta$  вычисляется следующим образом:

$$\Delta = \Delta(\sigma_{ij}, D_{ij}) = \Delta(N, S), \quad (1.7)$$

$$\Delta(N, S) = \left[ \left( \frac{N}{\sigma_o} \right)^p + \left( \frac{\alpha S}{\sigma_o} \right)^p \right]^{1/p}, \quad (1.8)$$

$$N = \frac{(I - I_o)}{2} + \sqrt{J_2 + \frac{1}{4}J_o^2 - J}, \quad (1.9)$$

$$S = \sqrt{J - J_o^2}. \quad (1.10)$$

Описав данные законы и уравнения в подпрограмме UMAT, автору удалось провести конечно-элементные расчеты в пакете Abaqus для целого ряда образцов с использованием трансверсально-изотропной вязкоупругой модели с учетом поврежденности материала.

Другим способом описания закона ползучести является введение вязкоупругой конституциональной модели с операторами дробного интегрирования и дифференцирования. Преимущество ее обусловлено тем, что напряжения и смещения зависят от предыдущих напряжений и деформаций, что позволяет учитывать предыдущие значения материала. Существует несколько дробных аналогов вязкоупругих моделей типа Кельвина, Фойхта и Максвелла [23]. Данные модели описаны в работе [24], и авторы реализовали их в Abaqus посредством подпрограммы UMAT. Авторами работы [26] проведена разработка модели ортотропной нелинейной ползучести, учитывающей влияние влажности. Процедура UMAT предоставляет широкие возможности ее применения и позволяет описать такие свойства, как набухание материала под действием влажности.

Подпрограмма UMAT была использована для описания механического поведения различных конкретных материалов, например, стали, древесины, бетона или полимерной пены [27–64]. Аустенитная нержавеющая сталь демонстрирует сложное механическое поведение, проявляющееся в появлении пластических деформаций при низких температурах, вызванное фазовыми превращениями [27]. Для ее описания требуется модель вязкопластического материала, учитывающая действие предварительной деформации и температуры. Такая модель предложена в работе [27] и реализована с помощью пользовательской подпрограммы UMAT, имеющей преимущества при прогнозировании поведения материалов, таких как аустенитная нержавеющая сталь.

Одним из широко используемых материалов в настоящее время остается древесина. Ее главным преимуществом являются экологичность и прочность, в связи с этим древесный материал пользуется большой популярностью [28–31]. Но остается вопрос о его долговечности. Большой интерес вызывает возможность смоделировать древесный материал и спрогнозировать его механическое поведение [28–31]. Древесина обычно представляет собой неоднородный ортотропный материал с различными уникальными и независимыми механическими свойствами в трех взаимно перпендикулярных осях, определяемых направлением волокон. Кроме того, механические свойства древесины, включая прочность, модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона, меняются не только по направлению, но и зависят от вида напряженного состояния. Развитие моделей механического поведения древесины приведено в работах [30; 31]. Авторами предложены модели поведения древесины и проведено моделирование ее нелинейного механического поведения разными способами. Статья [31] направлена на разработку пользовательской процедуры UMAT для древесного материала с помощью модели изотропного упругопластического упрочнения в сочетании с критерием текучести Хоффмана [31; 32], анизотропным повреждением и критерием разрушения Сандаса [33]. В работе [30] моделируется ортотропный материал и используется критерий разрушения Цая-Ву [9]. Другим распространенным материалом является асфальтобетонная смесь. Ее правильная подготовка непосредственно влияет на качество и срок службы дорожного покрытия. Одной из основных проблем остается образование колеи на асфальтовом покрытии. Исследование колейности становится сложной задачей из-за присущей асфальтовой смеси вязкоупругих свойств и различных внешних факторов, включая температуру и нагрузку. В настоящее время метод конечных элементов широко используется в исследованиях дорожных покрытий [34–37]. В работе [34], например, авторы применили разработанную модель посредством подпрограммы UMAT и изучили влияние деформации дорожного полотна на колейность.

Полимерные пены, такие как пенополиуретан и пенополистерол, активно используются благодаря своим превосходным свойствам, таким как легкость, высокая удельная жесткость и прочность, способность поглощать энергию. Полимерная пена является пористым материалом и обладает ортотропными, поперечно-изотропными и изотропными свойствами в зависимости от процесса вспенивания, наличия добавок и других факторов. Кроме того, из-за наличия пустот поведение материала при одноосном растяжении и сжатии несоизмеримо отличается друг от друга. Например, под действием растягивающей нагрузки полимерная пена проявляет упругость, а после достижения определенного уровня деформации может произойти внезапное хрупкое разрушение. Однако при сжимающей нагрузке последовательно проявляются упругое и неупругое поведение, при котором наблюдаются разупрочнение, падение напряжения и уплотнение. Моделирование поведения и разрушения изотропной полимерной пены при сжатии в зависимости от скорости деформации и температуры выполнялось в работе [64], где авторами были использованы более ранние работы и модели. Поведение полимерной пены при упруго-вязкопластическом деформировании с учетом накопления повреждений и с использованием модифицированной модели Гурсо — Твергаарда — Нидельмана [38; 39], отвечающей за уменьшение доли пустотного объема и модуля упругости при одноосном сжатии, и модифицированной модели Хана — Хуана — Лианга [40; 41], для оценки нелинейного поведения пенополимеров в зависимости от скорости деформации и температуры приведено в работе [64]. А для моделирования поврежденности было использовано уравнение эволюции поврежденности Леметра [42], объединенное с моделью Гурсо — Твергаарда — Нидельмана для оценки развития повреждения (или уменьшения модуля упругости), вызванного увеличением деформации сжатия. Модель Гурсо — Твергаарда — Нидельмана имеет следующий вид [39]:

$$\varphi = J_2(s) - \frac{\sigma_y^2}{3} \left[ 1 + q_3 f^{*2} - 2q_1 f^* \cosh \left( \frac{3q_2 \sigma_h}{2\sigma_y} \right) \right], \quad (1.11)$$

где  $\varphi$  — функция текучести,  $s$  — девиатор тензора напряжений,  $J_2(s)$  — второй инвариант девиатора тензора напряжений,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_h$  обозначают предел текучести и гидростатическое напряжение и  $q_1, q_2, q_3$  — материальные параметры. Для учета слияния пор В. Твергаард и А. Нидельман предложили использовать в условии пластичности Гурсо эквивалентную пористость  $f^*$ , вычисляемую в соответствии со

следующим уравнением:

$$f^* = \begin{cases} f & f \geq f_C, \\ f_C + \frac{\bar{f}_F^* - f_C}{f_F - f_C}(f - f_C) & f_C < f < f_F, \\ \frac{f}{f_F} & f_F \leq f, \end{cases} \quad (1.12)$$

где  $f$  — объемная доля пустот,  $f_C$  — критическая пористость, до которой поры не взаимодействуют,  $f_F$  — пористость, соответствующая разрушению, и  $\bar{f}_F = (q_1 + \sqrt{q_1^2 - q_3})/q_3$  — предельная пористость.

Модифицированная модель Хана — Хуана — Лианга [40; 41] для расчета зависимости поведения материала от скорости деформации и температуры выглядит следующим образом:

$$\sigma = \left\{ \left[ A_1 + B \left( 1 - \frac{\ln \dot{\epsilon}}{\ln D_0^p} \right)^{n_1} p^{n_0} \right] \exp \left[ A_2 \ln \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right) \right] + A_3 \exp \left[ A_4 \ln \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right) \right] \right\} \times \frac{(1 - m_2 T^*)^{m_1}}{\lambda_f}, \quad (1.13)$$

$$T^* = \frac{T - T_r}{T_m - T_r}, \quad (1.14)$$

где  $A_1, A_2, A_3, A_4, B, n_0, n_1, m_1$  и  $m_2$  — материалыные параметры,  $T_m$  — максимальная температура, при которых пенополиуретан применяется для промышленных конструкций. Коэффициенты  $A_1, A_2, A_3, A_4$  определяют тенденцию зависимости предела текучести по отношению к скорости деформации,  $B, n_0$  определяют форму зависимости напряжения от деформации, а  $n_1, m_1, m_2$  контролируют скорость деформации и температурную чувствительность.  $\sigma$  — интенсивность напряжения,  $\dot{\epsilon}$  — интенсивность скорости деформации,  $\dot{\epsilon}_0$  — характерная скорость деформации,  $D_0^p$  — максимальная скорость пластической деформации. Величина  $\lambda_f$  представляет собой соотношение напряжений в пористом состоянии с начальной объемной долей пустот  $f_0$  и в плотном состоянии без начальной объемной доли пустот. Модифицированная модель Гурсо — Твергаарда — Нидельмана (1.11) с уравнением эволюции поврежденности Леметра примет следующий вид:

$$\varphi = \frac{J_2(s)}{(1 - D)^{Q_2}} - \frac{\sigma_y^2}{3} \left[ 1 + q_3 f^{*2} - 2q_1 f^* \cosh \left( \frac{3q_2 \sigma_h}{2\sigma_y} \right) \right], \quad (1.15)$$

$$G_{eff} = (1 - D)^{Q_2} G, \quad (1.16)$$

где  $D$  — параметр поврежденности, в данной модели представляющий собой объемную долю пустот, и закон его эволюции следует из закона сохранения массы.  $Q_2$  — параметр материала, который контролирует влияние повреждения на тензор упругих модулей. В соответствии с этим эффектом тензор упругих модулей  $G_{eff}$  модифицируется согласно уравнению (1.16). Данные модели описываются в Abaqus посредством подпрограммы UMAT, проводится серия испытаний на сжатие полимерной пены, и результаты сравниваются с экспериментальными данными.

Пользовательские подпрограммы UMAT также нашли свое применение при реализации механических моделей перидинамики, которая является перспективным подходом в практических инженерных задачах [43–52].

Впервые термин «перидинамика» ввел С.А. Силлинг (Национальная лаборатория Сандии) в своей работе «Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces», опубликованной в 2000 году [43], для прогнозирования и моделирования развития разрушения элементов конструкций. Впоследствии теория получила существенное обобщение и распространение в других областях знания. Перидинамика сегодня стала единым физическим подходом, позволяющим предсказывать развитие поврежденности на разных масштабных уровнях в элементах конструкций. С момента своего создания перидинамика растет в геометрической прогрессии благодаря вкладам и публикациям исследователей из разных уголков мира [45–48]. Перидинамическая теория — это альтернативная форма механики сплошных сред, которая более удобна, по сравнению со стандартной (локальной) теорией, для описания разрывов (распространяющиеся трещины). В перидинамической теории уравнения движения и материалыные модели используют интегральное представление, а не дифференциальные уравнения в частных производных. Это позволяет применять перидинамические уравнения непосредственно к поверхности трещины. Изначально перидинамика создавалась для моделирования семейств трещин, процесса их образования и ветвления, что значительно отличает ее от традиционной классической механики линейного упругого разрушения [45–48]. Появление перидинамики обусловлено тем, что при рассмотрении и моделировании развития трещин появилась необходимость учитывать такие явления, как неоднородность тел и, прежде всего, наличие внутренних сил, возникающих на ненулевых расстояниях [45]. Классический метод изучения разрушения и роста трещин, основанный на моделях механики сплошных сред, базирующейся на

уравнениях в частных производных, не дает полного представления о процессах, приводящих к образованию трещин и разрывов. Суть перидинамики заключается в рассмотрении равновесия и движения твердых тел с помощью интегральных уравнений, а не дифференциальных. Основным преимуществом такого метода является изучение тел малой величины (наномасштаба) [49]. В отличие от механики разрушения линейно-упругих тел перидинамика дает возможность рассматривать вопросы разрушения и роста трещины с учетом поведения материала вблизи вершины трещины, ее распространения внутри материала, а также учета межатомных связей в кристаллической решетке материала. Поэтому перидинамику можно считать альтернативной формой механики сплошных сред. Еще одной из причин появления перидинамики является то, что уравнения в частных производных классической теории механики сплошных сред теряют смысл вблизи вершины трещины или поверхности растущей трещины, поскольку непосредственно у вершины не существует требуемых частных производных. Поэтому исследователи стремятся переформулировать модель континуума, чтобы избежать этой проблемы [45]. Подход заключается в использовании интегральных уравнений, а не уравнений в частных производных. Образование и рост трещин является результатом некоторого процесса: накопление изменений внутри материала, которые изменяют его до такой степени, что тело не может больше рассматриваться как континуум. Традиционная механика линейного упругого разрушения не дает полного понимания об этом процессе, сводя детали того, что происходит вблизи вершины трещины, к таким параметрам, как коэффициент интенсивности напряжений и критериальные соотношения, которые помогают смоделировать эволюцию трещины в терминах данных параметров. Еще одним преимуществом перидинамики является правильный прогноз важных параметров динамического распространения и ветвления трещин, таких как: форма траекторий трещин, общий профиль распространения трещин. Для решения таких задач в перидинамике используют теорию фазового поля [45; 48; 49; 50]. Ее преимущество заключается в объединении механики разрушения и повреждения в единую структуру. В зависимости от модели повреждений, основанных на фазовом поле, предпочтение отдается двум подходам: динамическим моделям разрушения фазового поля, основанным на уравнениях эволюции фазового поля типа Ландау — Гинзбурга [48] и фазового поля, основанным на теории Гриффитса [50]. В обеих теориях разрывы задаются с помощью дополнительной переменной поля, называемой фазовым полем или параметром порядка [48; 49]. Этот подход позволяет отслеживать самопроизвольное возникновение и распространение трещин, устраняя необходимость в специальных алгоритмах моделирования траектории трещин, как в обычной механике разрушения. Это делает модель более гибкой в вычислительном отношении. Наблюдая за фазовым полем в различных точках материала, можно определить состояние материала соответствуют  $S = 1$ ,  $S = 0$  и  $S \in (0, 1)$  соответственно, где  $S$  обозначает фазовое поле. В этой модели имеется необходимость совместного решения управляющего уравнения для фазового поля в сочетании с уравнениями баланса импульса.

Работы [54–57] посвящены реализации подхода, основанного на методе фазового поля, в конечно-элементном пакете Abaqus с использованием пользовательских подпрограмм UMAT/VUMAT и VUEL/UEL.

Обширное применение пользовательские подпрограммы UMAT/VUMAT получили при изучении взаимного влияния поврежденности и ползучести [42–64], [57–70]. По всей видимости, первыми работами, в которых скалярная и тензорная мера поврежденности были инкорпорированы в расчетный комплекс SIMULIA Abaqus, были работы Петра Мика [58–60]. В [58; 60], по-видимому, впервые в процедуру многоцелевого комплекса Abaqus была введена тензорная мера поврежденности в рамках модели ортотропного поврежденного материала, текущее состояние которой описывается тензором второго ранга. Предполагается, что тензор деформаций связан с тензором напряжений и тензором поврежденности соотношением

$$\varepsilon = F(\sigma, \mathbf{D}) \quad (1.17)$$

и в рассмотренном в [58] случае данное соотношение – линейное:

$$\varepsilon_{ij} = A_{ijkl}(D_{mn})\sigma_{kl}. \quad (1.18)$$

Физические свойства материала задаются матрицей податливости вида

$$A_{ijkl} = -\frac{\nu}{E}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1+\nu}{2E}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \frac{D_1}{4(1+D_1)E}(\delta_{ik}D_{jl} + \delta_{il}D_{jk} + \delta_{ji}D_{ik}). \quad (1.19)$$

Для формулировки кинетического уравнения можно использовать тензор  $\Omega$ , связанный с тензором поврежденности равенствами

$$\Omega_i = \frac{D_i}{1+D_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.20)$$

Стандартная процедура Abaqus требует, что уравнение (1.17) было представлено в форме

$$\varepsilon = \mathbf{K} \cdot \sigma, \quad (1.21)$$

где  $\mathbf{K}$  – тензор второго ранга с компонентами  $K_{ij}$ ,

$$\varepsilon^T = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}], \quad (1.22)$$

$$\sigma^T = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}], \quad (1.23)$$

Компоненты тензора  $\mathbf{K}$  определяются следующим образом:

$$\mathbf{K} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} \tilde{K}_{11} & \tilde{K}_{12} \\ \tilde{K}_{12}^T & \tilde{K}_{22} \end{pmatrix}, \quad (1.24)$$

где подматрицы являются выражениями

$$\tilde{K}_{11} = \begin{pmatrix} 1 + \Omega_1 D_{11} & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 + \Omega_1 D_{22} & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 + \Omega_1 D_{33} \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

$$\tilde{K}_{12} = \begin{pmatrix} \Omega_1 D_{12} & \Omega_1 D_{13} & 0 \\ \Omega_1 D_{12} & 0 & \Omega_1 D_{23} \\ 0 & \Omega_1 D_{13} & \Omega_1 D_{23} \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

$$\tilde{K}_{22} = \begin{pmatrix} \tilde{\nu} + \Omega_1 (D_{11} + D_{22}) & \Omega_1 D_{23} & \Omega_1 D_{13} \\ \Omega_1 D_{23} & \tilde{\nu} + \Omega_1 (D_{11} + D_{33}) & \Omega_1 D_{12} \\ \Omega_1 D_{13} & \Omega_1 D_{12} & \tilde{\nu} + \Omega_1 (D_{22} + D_{33}) \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

где  $\tilde{\nu} = 2 + 2\nu$ . Текущее состояние поврежденности определяется с помощью интегрирования эволюционного уравнения накопления поврежденности вида

$$\partial_t \Omega_i = k (\mathbf{M}\mathbf{N}^T)^2 \sigma_i H(\sigma_i), \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.28)$$

В уравнении (1.28)  $\Omega_i$  – главные значения симметричного тензора поврежденности,  $\sigma_i$  – главные значения тензора напряжений,  $H(\sigma_i)$  – функция Хэвисайда, входящая в эволюционное уравнение, отражает отсутствие процесса накопления повреждений при действии сжимающих напряжений,  $k$  – материальная постоянная,  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{M}$  – вектор-строки с компонентами

$$\mathbf{M} = \left[ \frac{1 - 2\nu}{6E}, \frac{1 + \nu}{2E}, \frac{\Omega_1}{E} \right], \quad (1.29)$$

$$\mathbf{N} = [tr^2 \sigma, tr S^2, tr(\sigma^2 D)], \quad (1.30)$$

где  $S$  – девиатор напряжений.

С помощью уравнений (1.17) – (1.30) проведено численное исследование развития поврежденности для различных значений показателя ползучести  $n$ . В [61] автор, опираясь на вычислительный эксперимент, приходит к выводу, что качественная природа распределения поврежденности не зависит от показателя ползучести  $n$ , ибо отличие между главными значениями тензора поврежденности  $\Omega_1$  в момент разрушения для каждого значения параметра  $n$  не превышает 5 %, что и приводит к близким уровням поврежденности.

Аналізу задач континуального разрушения термо- и пороупругих сред в связанной постановке посвящены работы О.Я. Извекова и А.М. Крупейника [62; 63]. С помощью UMAT и UMATHT авторам удалось решить связанную задачу теплопроводности и накопления поврежденности.

В работе [25] представлен анализ ползучести с учетом влияния изменения геометрии изгибов труб при комбинированных нагрузках и внутреннего давления на основе метода конечных элементов. Для моделирования повреждения при ползучести используются модифицированные уравнения Качанова – Работнова [67], имеющие следующий вид;

$$\frac{d\varepsilon_{ij}^c}{dt} = \frac{3}{2} B \sigma_e^{n-1} S_{ij} [(1 - \rho) + \rho(1 - D)^{-n}], \quad (1.31)$$

$$\frac{dD}{dt} = g \frac{A}{\varphi + 1} \frac{(\sigma_r)^v}{(1 - D)^\varphi}, \quad (1.32)$$

$$D_{cr} = 1 - (1 - g)^{\frac{1}{\varphi+1}}, \quad (1.33)$$

где  $\varepsilon_{ij}^c$  – тензор деформации ползучести,  $S_{ij}$  – тензор девиатора напряжений,  $D$  – параметр поврежденности и  $D_{cr}$  – критическое значение параметра поврежденности,  $D/D_{cr} = 1$  соответствует полному разрушению. Параметры  $B, n, A, v$  – постоянные материала, которые относятся к минимальной

скорости деформации ползучести,  $g, \varphi, \rho$  – постоянные, которые учитывают неоднородность накопления поврежденности. Эквивалентное напряжение  $\sigma_r$  зависит от максимального главного напряжения и интенсивности напряжения в соответствии со следующей формулой:

$$\sigma_r = \alpha\sigma_1 + (1 - \alpha)\sigma_e \quad (1.34)$$

где  $\alpha$  – постоянная материала, отражающая влияние многоосного напряженного состояния. Значение  $\alpha$  может принимать значения от 0 до 1. Максимальное главное напряжение доминирует при  $\alpha = 1$ , а эквивалентное – при  $\alpha = 0$ . Авторы реализовали модель развития повреждений с помощью пользовательской подпрограммы UMAT и получили различия в распределении деформации с использованием геометрической нелинейности и без ее учета. В целом в данной работе представлен детальный численный анализ длительной ползучести в трубах с изгибным соединением под действием комбинированной нагрузки (изгиб и внутреннее давление).

Моделирование накопления повреждений в образцах с концентраторами напряжений в линейно-упругом изотропном материале рассмотрено в работах [68; 70–72]. Исходная модель анизотропной поврежденности боросиликатного стекла, которая зиждется на тензоре поврежденности второго ранга, была выдвинута в статьях [73; 74]. В [70] показано, что с помощью анизотропной модели поврежденности можно качественно описать трещинообразование в стекле при вдавлении штампа.

В работе [71] в Abaqus с помощью подпрограммы UMAT проведено компьютерное имитационное моделирование процесса накопления повреждений в опытных образцах с круговыми отверстиями в материале с определяющими уравнениями линейной теории упругости, включающими компоненты тензора второго ранга – тензора поврежденности. Принимается, что внедиагональные компоненты тензора поврежденности обращаются в нуль, а диагональные компоненты вычисляются следующим образом [70]:

$$D_{ii} = \begin{cases} 0 & \sigma_i \leq \sigma_{th}, \\ T \frac{\sigma_i - \sigma_{th}(T)}{\sigma_e(T) - \sigma_{th}(T)} & \sigma_{th} < \sigma_i < \sigma_c, \\ 1 & \sigma_i \geq \sigma_c, \end{cases} \quad (1.35)$$

где приняты следующие обозначения:  $\sigma_i, i = 1, 2, 3$  – главные напряжения,  $\sigma_{th}, \sigma_c$  – пороговое и критическое значения напряжений соответственно,  $D_{ij}$  – компоненты тензора поврежденности. При значении напряжений ниже порогового значения накопления повреждений не происходит. При достижении главными напряжениями критических значений  $\sigma_c$  материал считается полностью поврежденным  $D_{ii} = 1$ . Определяющие уравнения материала представляются в форме

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{pmatrix}, \quad (1.36)$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu + 2D_{11}(C_1 + C_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda + C_1(D_{11} + D_{22}) & \lambda + 2\mu + 2D_{22}(C_1 + C_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda + C_1(D_{11} + D_{33}) & \lambda + C_1(D_{22} + D_{33}) & \lambda + 2\mu + 2D_{33}(C_1 + C_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix},$$

где  $\lambda, \mu$  – постоянные Ламе, а  $C_1, C_2$  – постоянные материала, определяемые экспериментально. В результате найдено численное решение задачи о трещинах в материале с поврежденностью в связанной постановке (упругость-поврежденность).

В настоящее время проводятся моделирование широкого спектра материалов и конструкций, например, глубоководных подводных оконных иллюминаторов под действием постоянного давления морской воды [65] и исследование контактных задач. Например, в работе [66] авторами изучено влияние деформаций ползучести и контактной ползучести между шероховатыми поверхностями на долговечность болтовых композитных соединений. В ряде работ [75; 76] с помощью UMAT проводилось введение в Abaqus различных критериев разрушения и их сравнение.

Различным аспектам процессов взаимного влияния эволюции поврежденности и изменения напряженно-деформированного состояния и их численному моделированию с помощью конечно-элементного подхода посвящены исследования [77–79].

В [77] авторы анализируют явление накопления повреждений в условиях ползучести в двухосно нагруженной пластине при плоской деформации и в компактном образце конечной толщины с использованием степенного эволюционного уравнения накопления повреждений.

Возможность описания любых моделей материала при помощи применения подпрограммы пользовательского материала UMAT дает существенную гибкость и широту при использовании программного комплекса Abaqus и позволяет решать обширные классы задач.

В заключение отметим одну из последних работ [79], посвященную расчету турбины – ответственного элемента конструкции, находящегося в реальных эксплуатационных условиях. Паровые турбины состоят из толстостенных компонентов, подвергающихся воздействию высоких температур и циклическим нагрузкам. С целью уменьшения глобального углеродного следа в настоящее время двойная цель обычной электростанции с приводом от паровой турбины заключается в максимизации тепловой эффективности и в то же время обеспечении гибкой работы для интеграции возобновляемых источников энергии. Первая цель исторически достигается за счет повышения температуры и давления, при которых паровая турбина работает за счет более высокого использования срока службы при ползучести. Чтобы соответствовать меняющимся требованиям к электросетям из-за возобновляемых источников энергии, гибкая работа электростанций приводит к более высокому потреблению усталостного ресурса. Поэтому взаимодействие ползучести и усталости паровых турбин имеет большое значение в настоящее время. Высокие требования к надежности, эксплуатационной готовности и аспекты безопасности человека требуют точного прогнозирования повреждений паровых турбин из-за таких взаимодействующих явлений. Закон линейного накопления повреждений, применяемый в настоящее время в промышленности, часто переоценивает накопленную поврежденность. Напротив, усовершенствованная модель циклического вязкопластического поведения с учетом процессов накопления повреждений, базирующаяся на континуальной механике сплошных повреждений, позволила определить распределение поврежденности. Однако сложные по своей природе обобщенные модели имеют существенный недостаток, заключающийся в большом времени вычислений. В [79] представлен новый подход к прогнозированию накопления повреждений с использованием смешанной формулировки, основанной на аналитических результатах, и методов конечных элементов с использованием передовых определяющих моделей континуальной механики сплошных сред, направленных на сокращение времени вычислений без существенной потери точности. Накопление повреждений для прогнозирования возникновения мезотрещин представлено с использованием трех различных подходов. Полученные результаты сравниваются с точки зрения точности и времени вычисления.

Таким образом, можно заключить, что континуальная механика поврежденности, пройдя долгий путь от первых пионерских работ Ю.Н. Работнова и Л.М. Качанова, становится в наше время эффективным инструментом и общим подходом для построения решения задач механики, инженерии и смежных с ними направлений.

## 2. Описание подпрограммы UMAT

В этом разделе приведены общие сведения о UMAT и краткое описание основных переменных. При описании поведения материалов в пользовательских процедурах UMAT/VUMAT используется программный код языка FORTRAN. Для работы подпрограмм UMAT/VUMAT необходимо установить дополнительное программное обеспечение и создать связку между тремя программами: Abaqus, Visual Studio и Parallel Studio. Необходимо обеспечить совместимость версий данных программ, например, рабочим является использование связки Abaqus версии 6.14, Visual studio 2012 Professional, Intel Composer XE Suites 2015. Список всех совместимых версий представлен на сайте [80]. В модуле «Material» необходимо выбрать тип «User Material», сам файл с кодом с расширением .for подключается в модуле «Job» во вкладке «General».

Пользовательская подпрограмма UMAT вызывается для каждой материальной точки на каждой итерации каждого приращения. Во всех случаях для механической модели конституциональных соотношений в подпрограмме необходимо объявить матрицу Якоби  $\partial\Delta\sigma/\partial\Delta\varepsilon$ , где  $\Delta\sigma$  – это приращение напряжений,  $\Delta\varepsilon$  – приращение деформаций. В UMAT заполняют матрицу  $DDSDDE(i, j)$  значениями, определяющими изменение  $i$ -го компонента напряжения в конце приращения, вызванное бесконечно малым возмущением  $j$ -го компонента массива приращения деформаций. Для вязкоупругого поведения матрица Якоби должна иметь размер (NTENS, NTENS, 2). Модуль упругости должен быть указан в  $DDSDDE(NTENS, NTENS, 1)$ , а модуль потерь – в  $DDSDDE(NTENS, NTENS, 2)$ , где NTENS – размерность массива, содержащего компоненты тензоров напряжений или деформаций. Для любой нетривиальной задачи определение матрицы Якоби является сложной задачей. Массив STRESS(NTENS) передается в качестве тензора напряжений в начале приращения и должен быть обновлен до конца приращения. Многие модели описания материалов требуют хранения переменных состояния Statev(NSTATV), зависящих от решения. Для переменных состояния необходимо выделить место путем задания их количества в поле Depvar в программе Abaqus. NSTATV – количество переменных состояния, связанных с этим

типом материала. Массив STRAN(NTENS) содержит полные деформации в начале приращения, а в массиве DSTRAN(NTENS) хранятся приращения деформаций. Для заданного приращения деформации  $\Delta\varepsilon_{n+1}$  результаты предыдущего временного шага  $t_n$ , т. е. напряжения  $\sigma_n$  и деформация  $\varepsilon_n$ , используются для вычисления и обновления матрицы Якоби (DDSDDE), тензора напряжений (STRESS) и переменных состояния (STATEV), зависящих от решения на текущем временном шаге  $t_{n+1}$ . В переменной TIME(1) записывается время шага в начале приращения, в TIME(2) записывается общее время, в TIME — приращение времени. В переменных SSE, SPD, SCD задаются удельная энергия упругой деформации, пластическая диссипация и диссипация ползучести соответственно. В начале программы, как правило, идет описание переменных, используемых в UMAT, и в массив PROPS(NPROPS) вводятся материальные постоянные, число которых равно NPROPS. Более подробно о подпрограмме UMAT можно прочитать на сайте [81]. Примеры реализации некоторых моделей с помощью пользовательских процедур UMAT и VUMAT можно найти в руководствах [82; 83].

### 3. Результаты моделирования

В пакете SIMULIA Abaqus проведен ряд численных расчетов с целью моделирования поведения пластины с центральным круговым отверстием в условиях ползучести. Выполнено компьютерное моделирование всестороннего и одноосного растяжения пластины с центральным круговым отверстием. На рис. 3.1 приведены изображения модели с указанием размеров, типа сетки и схемы нагружения при моделировании одноосного растяжения пластины.

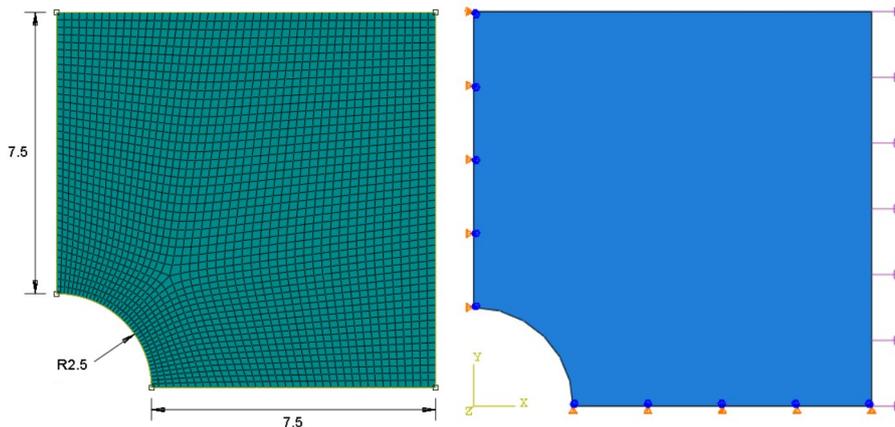


Рис. 3.1. Размеры модели, вид сетки и схема приложения нагрузки при реализации одноосного растяжения

Fig. 3.1. Dimensions of the model, the type of grid and the scheme of load application in the implementation of a uniaxial sprains

Для моделирования ползучести с помощью пользовательской подпрограммы UMAT выбран степенной закон Нортона, являющийся наиболее экспериментально проверенным [84]. Выбор обусловлен еще и возможностью сравнить результаты моделирования, полученные с помощью пользовательской подпрограммы, с результатами моделирования в Abaqus, когда закон ползучести задан в модуле материала.

Определяющий степенной закон ползучести имеет следующий вид:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2} B \sigma_e^{n-1} S_{ij}, \quad (3.1)$$

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}}, \quad (3.2)$$

где  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  — компоненты скорости деформации ползучести,  $\sigma_{ij}$  — компоненты напряжений Коши,  $\sigma_e$  — интенсивность напряжения,  $n, B$  — постоянные материала;  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$  — компоненты девиатора напряжений, где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. При моделировании используются следующие характеристики материала: модуль Юнга  $E = 210000$  кГ/см<sup>2</sup>, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ , коэффициент  $B = 2.634 \times 10^{-13}$  (кГ/см<sup>2</sup>)<sup>-n</sup>(h)<sup>-1</sup> и показатель закона Нортона для установившейся ползучести  $n = 5$ . Вообще, показатель  $n$  для металлов колеблется от 3 до 8, а для ряда современных высокопрочных сталей изменяется до 18 [85–87], для чистых металлов примерно равен 4 [84]. Время деформирования  $T = 10$  ч, нагрузка  $P = 10$  кГ/см<sup>2</sup>.

В результате моделирования получили полное совпадение распределений напряжений и деформаций в случае описания закона посредством пользовательской процедуры UMAT и в случае задания степенного закона через интерфейс многофункционального комплекса SIMULIA Abaqus в модуле описания материала.

Затем степенной закон ползучести был модифицирован путем добавления закона накопления поврежденности Работнова — Качанова следующим образом:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} B \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^{n-1} \frac{S_{ij}}{\psi}, \quad (3.3)$$

$$\dot{\psi} = -\frac{1}{(m+1)} \left( \frac{\sigma_e}{\psi} \right)^m, \quad (3.4)$$

где  $\psi$  — параметр сплошности Качанова.  $\psi = 1$  соответствует неповрежденному материалу,  $\psi = 0$  показывает, что материал полностью разрушен. Также часто используется параметр поврежденности  $\omega$ , связанный с параметром сплошности с помощью следующего выражения  $\omega = 1 - \psi$ . При моделировании констант материала  $m$  была задана равной 3.5, чтобы выполнялось соотношение  $m \approx 0.7 n$ , выведенное экспериментально [85]. Более подробно о параметрах материала, участвующих в уравнениях ползучести и поврежденности, можно ознакомиться в работах [86; 87], где также приведены значения констант для некоторых материалов.

С целью проверки адекватности описания поведения материала с помощью модифицированного закона ползучести было проведено моделирование всестороннего растяжения пластины с круговым отверстием. Задача симметричная, следовательно, распределения напряжений, деформаций и сплошности должны быть симметричны. На рис. 3.2 приведены полученные в результате расчета распределения интенсивности напряжений и параметра сплошности.

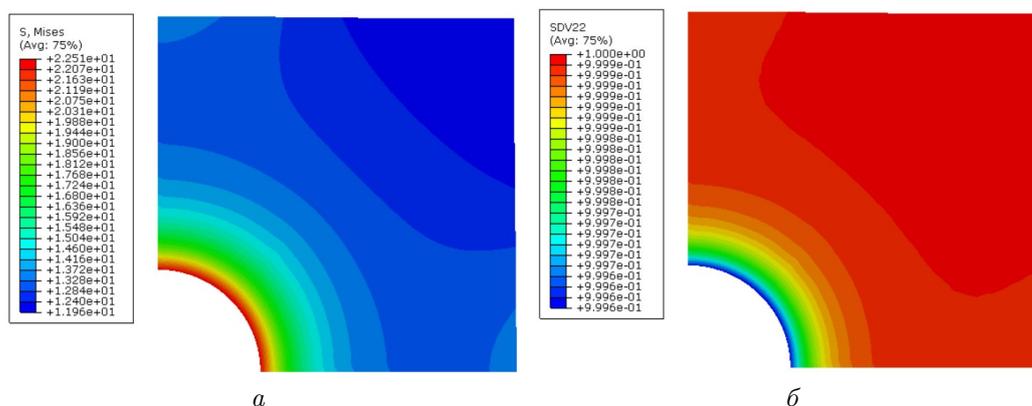


Рис. 3.2. Всестороннее растяжение пластины с круговым отверстием. Распределения: *a* — интенсивности напряжений и *b* — параметра сплошности

Fig. 3.2. All-round stretching plate with a circular hole. Distributions: *a* — intensity stresses and *b* — continuity parameter

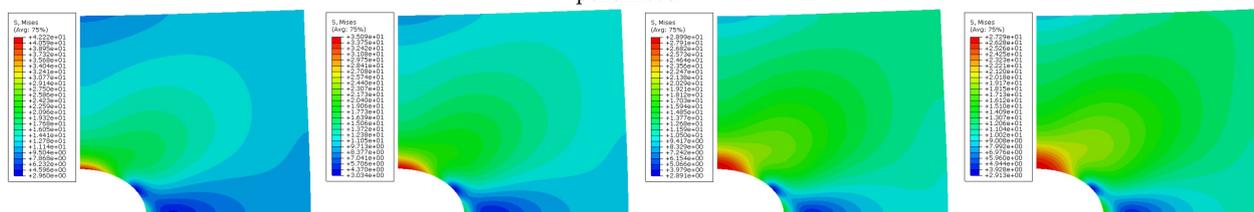


Рис. 3.3. Одноосное растяжение пластины с круговым отверстием. Распределение интенсивности напряжений с течением времени

Fig. 3.3. Uniaxial stretching of the plate with a circular hole. Voltage intensity distribution over time

Далее модель ползучести с учетом поврежденности применили при компьютерном моделировании одноосного растяжения пластины с круговым отверстием. На рис. 3.3 представлены картины распределения интенсивности напряжений с течением времени. На рис. 3.4 приведены распределения компонент тензора напряжений  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$  с течением времени. Показаны картины в момент времени 1, 3, 9, 15 часов, что соответствует 1, 3, 5, 7 итерации.

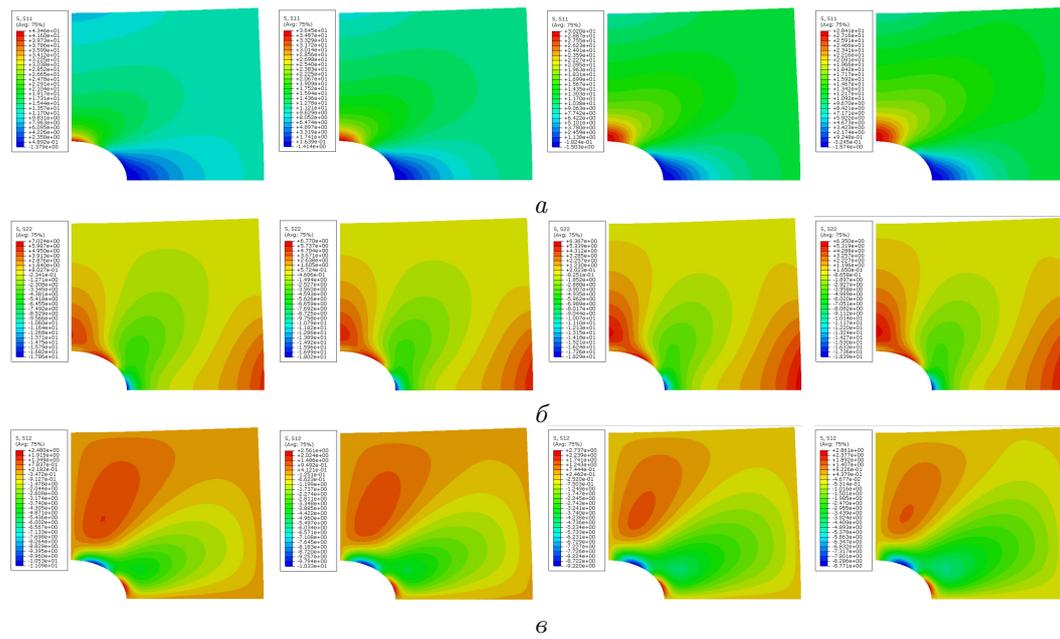


Рис. 3.4. Одноосное растяжение пластины с круговым отверстием. Распределение компонент тензора напряжений: *a* –  $\sigma_{11}$ ; *б* –  $\sigma_{22}$ ; *в* –  $\sigma_{12}$  с течением времени

Fig. 3.4. Uniaxial tension of a plate with a circular hole. Distribution of tensor components stresses: *a* –  $\sigma_{11}$ ; *b* –  $\sigma_{22}$ ; *c* –  $\sigma_{12}$  over time

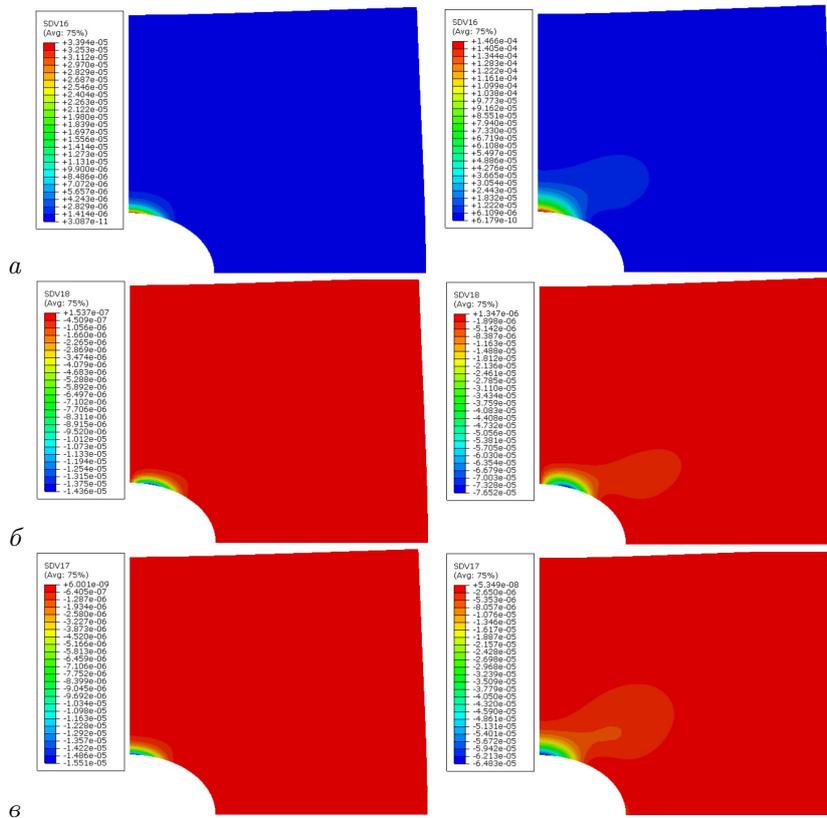


Рис. 3.5. Одноосное растяжение пластины с круговым отверстием. Распределения компонент тензора деформаций ползучести: *a* –  $\epsilon_{11}^c$ ; *б* –  $\epsilon_{22}^c$ ; *в* –  $\epsilon_{12}^c$

Fig. 3.5. Uniaxial tension of a plate with a circular hole. Distributions of tensor components creep strains: *a* –  $\epsilon_{11}^c$ ; *b* –  $\epsilon_{22}^c$ ; *c* –  $\epsilon_{12}^c$

На рис. 3.5 приведены распределения компонент тензора деформаций ползучести  $\epsilon_{11}^c, \epsilon_{22}^c, \epsilon_{12}^c$  на первой и последней итерации.

На рис. 3.6 показано изменение сплошности с течением времени. Приведены распределения параметра сплошности в момент времени 1, 3, 9, 15 часов, что соответствует 1, 3, 5, 7 итерации.

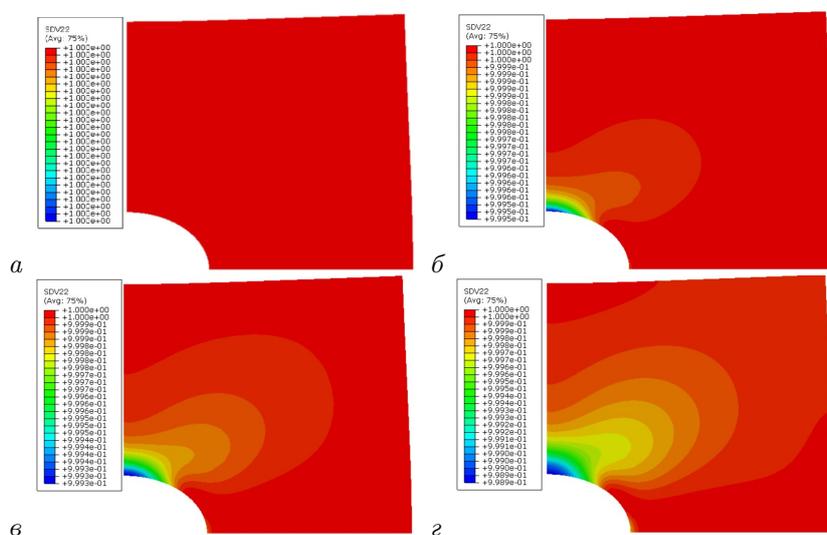


Рис. 3.6. Одноосное растяжение пластины с круговым отверстием. Распределения параметра сплошности в момент времени: *a* — 1 ч; *b* — 3 ч; *c* — 9 ч; *d* — 15 ч

Fig. 3.6. Uniaxial tension of a plate with a circular hole. Continuity parameter distributions at time:

*a* — 1 o'clock; *b* — 3 o'clock; *c* — 9 o'clock; *d* — 15 o'clock

Из рисунка видно, что минимальные значения сплошности, а значит максимальные значения поврежденности, достигаются в точках кругового отверстия, лежащих вблизи оси ординат, что соответствует результатам, полученным в других работах, например, в [71]. Таким образом, были получены характеристические величины при одноосном нагружении пластины с центральным круговым отверстием в условиях ползучести с учетом накопления поврежденности с течением времени.

#### 4. Моделирование области активного накопления повреждений у вершины трещины

Предметом настоящей части исследования является обнаружение зон активной эволюции поврежденности вблизи вершины трещины в условиях плоского деформированного состояния для степенного закона ползучести и кинетического уравнения Качанова–Работнова с помощью пользовательской процедуры UMAT. На основании построенной процедуры UMAT определяющее уравнение степенного закона с использованной концепцией истинного напряжения и эволюционное уравнение Качанова–Работнова было включено в вычислительную схему конечных элементов и были найдены распределения параметра поврежденности и механических полей около концентратора напряжений. При моделировании используются следующие характеристики материала: модуль Юнга  $E = 210000 \text{ кГ/см}^2$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ , коэффициент  $B = 2.962 \cdot 10^{-11} (\text{кГ/см}^2)^{-n} (h)^{-1}$  и показатель закона Нортона для установившейся ползучести  $n = 3$ . Константа материала  $m$  была задана равной 2, нагрузка  $P = 1 \text{ кГ/см}^2$ . Длина трещины составляла 10 % от длины пластины и создавалась путем вырезания области в виде трещины с закругленными вершинами. Радиус закругления вершин трещины составлял тысячную долю от длины трещины. Типичная конечно-элементная сетка представлена на рис. 4.1.

Полученные распределения сплошности в различные моменты времени показаны на рис. 4.2 – 4.12. Поле сплошности для  $t = 2$  ч запечатлено на рис. 4.2, для  $t = 5$  ч — на рис. 4.3. Иллюстрации 4.4 демонстрируют контуры равных значений параметра сплошности в момент времени  $t = 10$  ч, слева показан весь образец, справа — увеличенная окрестность кончика трещины. На рис. 4.5 можно увидеть конечно-элементное решение для поля сплошности в момент времени  $t = 20$  ч. Поле сплошности для  $t = 40$  ч отражено на рис. 4.6, для  $t = 81$  ч — на рис. 4.7. Иллюстрации 4.8 демонстрируют контуры равных значений параметра сплошности в момент времени  $t = 163$  ч, снова слева показан весь образец, справа — увеличена непосредственная окрестность кончика трещины. Найденное распределение сплошности в момент времени  $t = 327$  ч показано на рис. 4.9, в момент времени  $t = 655$  ч показано на рис. 4.10. Скалярная функция  $\Psi$  в моменты времени  $t = 1311$  ч и  $t = 1500$  ч изображена на рис. 4.11 и 4.12.

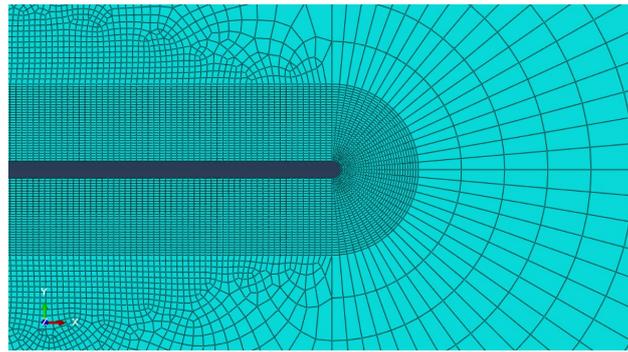


Рис. 4.1. Типичная сетка, используемая в расчетах на ползучесть  
Fig. 4.1. Typical mesh used in creep calculations

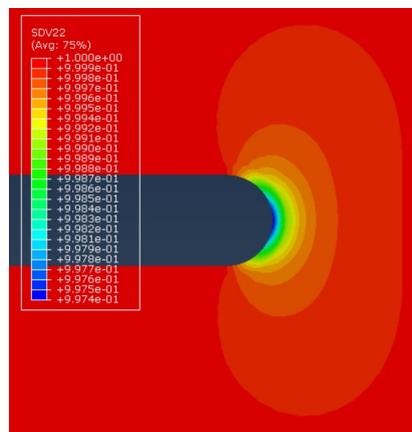


Рис. 4.2. Распределение сплошности вблизи вершины трещины для момента времени  $t = 2$  ч  
Fig. 4.2. Continuity distribution near the crack tip for time  $t = 2$  h

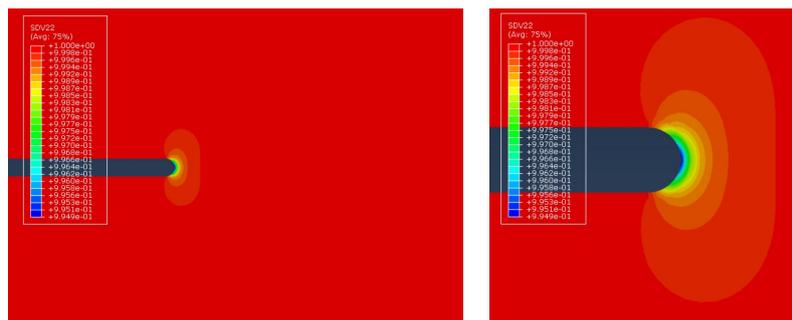


Рис. 4.3. Распределение сплошности вблизи вершины трещины для момента времени  $t = 5$  ч  
Fig. 4.3. Continuity distribution near the crack tip for time  $t = 5$  h

Распределение интенсивности напряжений с течением времени представлено на рис. 4.13–4.15. На рис. 4.15 приведено сравнение двух расчетов в момент времени  $t = 1500$  ч. Слева изображено распределение интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины в условиях ползучести с учетом поврежденности. Справа приведено распределение интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины в условиях ползучести без поврежденности, полученное в результате моделирования ползучести посредством Abaqus.

Как видно на рис. 4.15, наличие поврежденности влияет на распределение интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины в условиях ползучести. В случае ползучести с поврежденностью максимальное значение интенсивности напряжений меньше, чем без поврежденности.

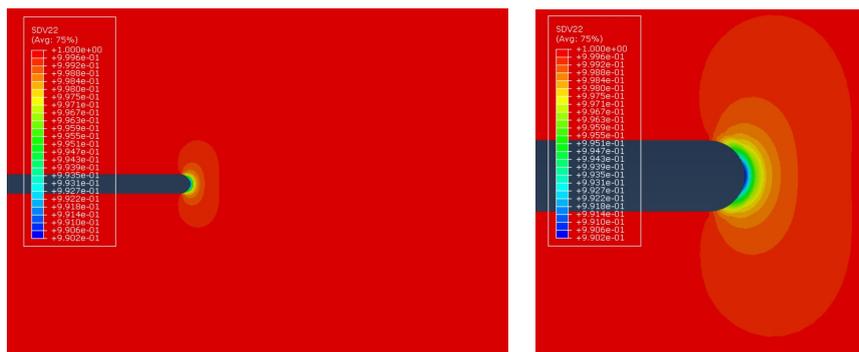


Рис. 4.4. Распределение сплошности вблизи вершины трещины для момента времени  $t = 10$  ч  
Fig. 4.4. Continuity distribution near the crack tip for time  $t = 10$  h

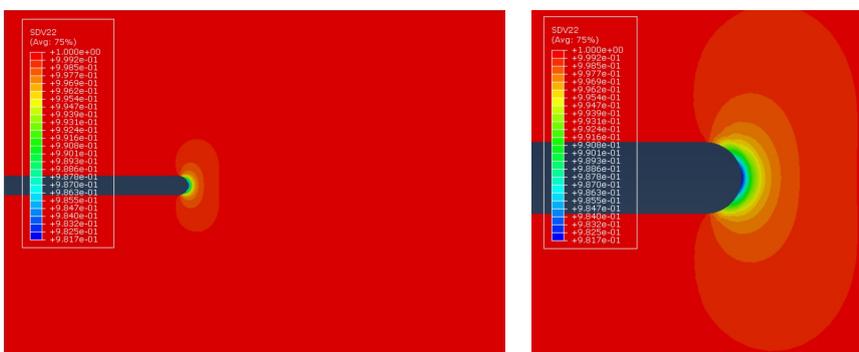


Рис. 4.5. Распределение сплошности вблизи вершины трещины для момента времени  $t = 20$  ч  
Fig. 4.5. Continuity distribution near the crack tip for time  $t = 20$  h

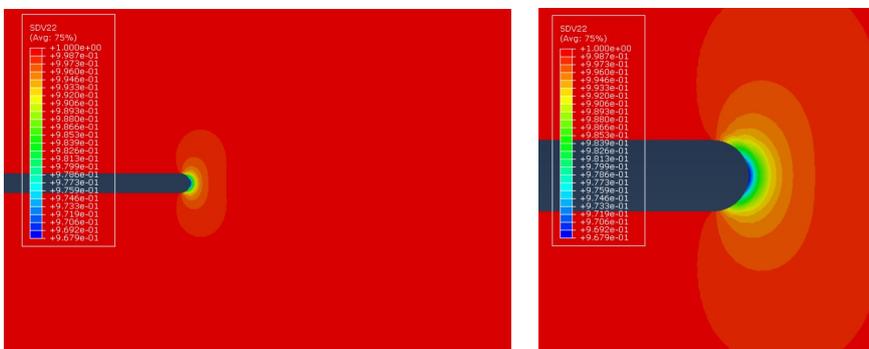


Рис. 4.6. Распределение сплошности вблизи вершины трещины для момента времени  $t = 40$  ч  
Fig. 4.6. Continuity distribution near the crack tip for time  $t = 40$  h

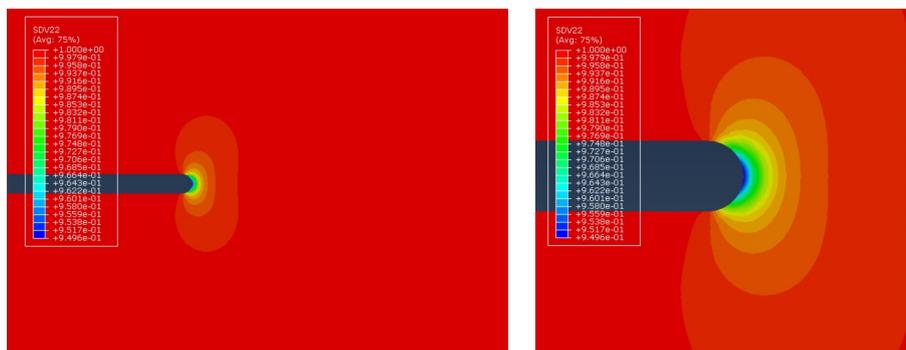


Рис. 4.7. Распределение сплошности вблизи вершины трещины для момента времени  $t = 81$  ч  
Fig. 4.7. Continuity distribution near the crack tip for time  $t = 81$  h

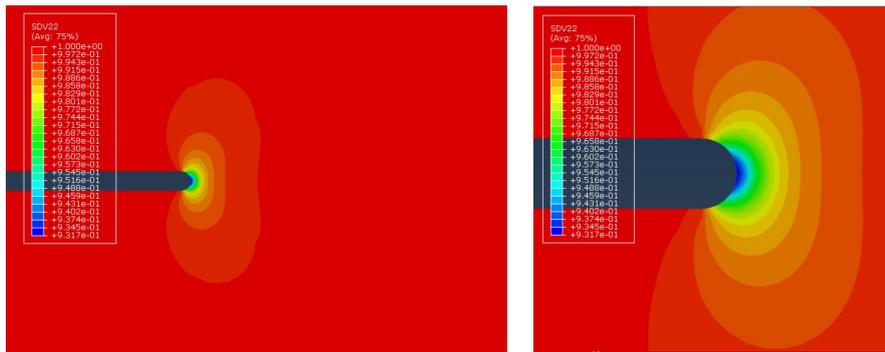


Рис. 4.8. Распределение сплошности вблизи вершины трещины для момента времени  $t = 163$  ч  
 Fig. 4.8. Continuity distribution near the crack tip for time  $t = 163$  h

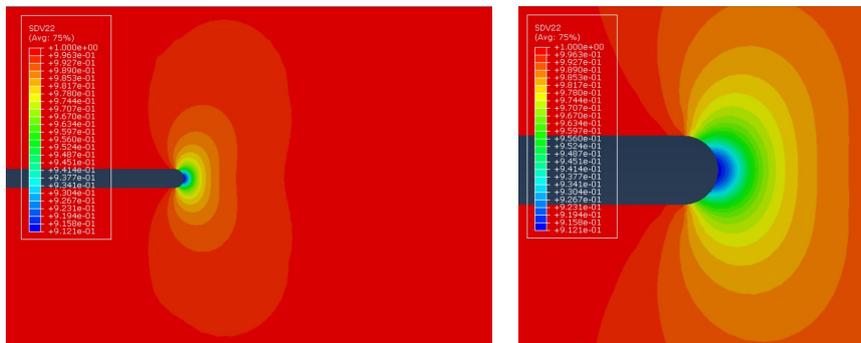


Рис. 4.9. Распределение сплошности вблизи вершины трещины для момента времени  $t = 327$  ч  
 Fig. 4.9. Continuity distribution near the crack tip for time  $t = 327$  h

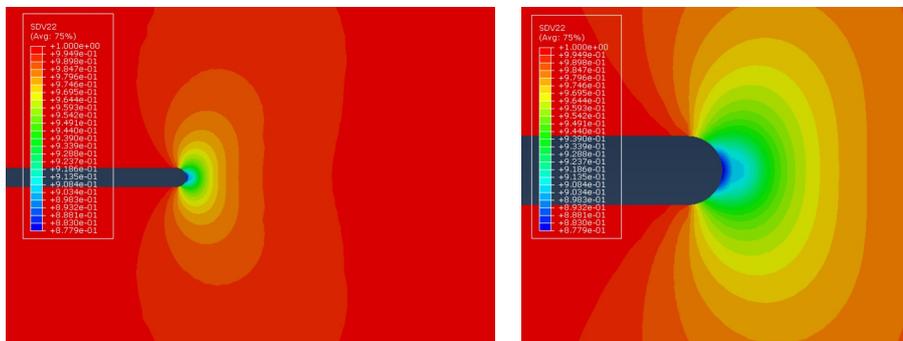


Рис. 4.10. Распределение сплошности вблизи вершины трещины для момента времени  $t = 655$  ч  
 Fig. 4.10. Continuity distribution near the crack tip for time  $t = 655$  h

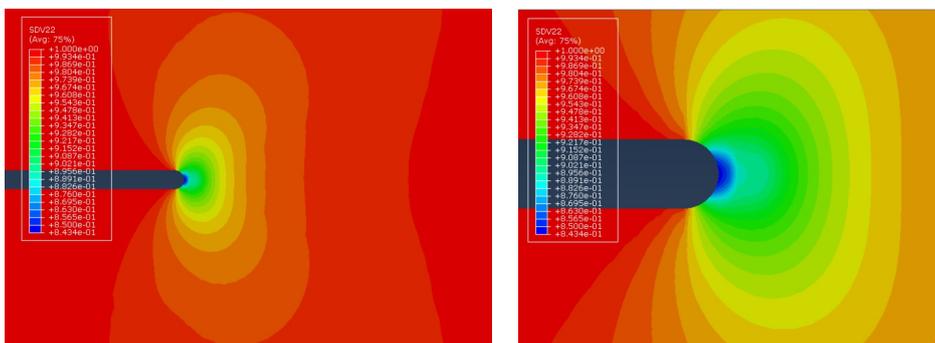


Рис. 4.11. Распределение сплошности вблизи вершины трещины для момента времени  $t = 1311$  ч  
 Fig. 4.11. Continuity distribution near the crack tip for time  $t = 1311$  h

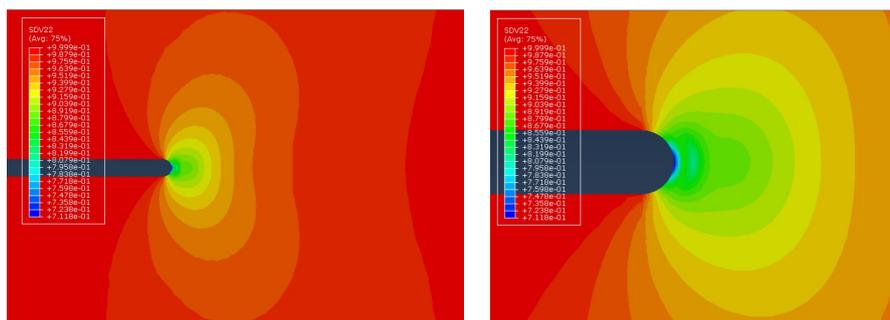


Рис. 4.12. Распределение сплошности вблизи вершины трещины для момента времени  $t = 1500$  ч  
 Fig. 4.12. Continuity distribution near the crack tip for time  $t = 1500$  h

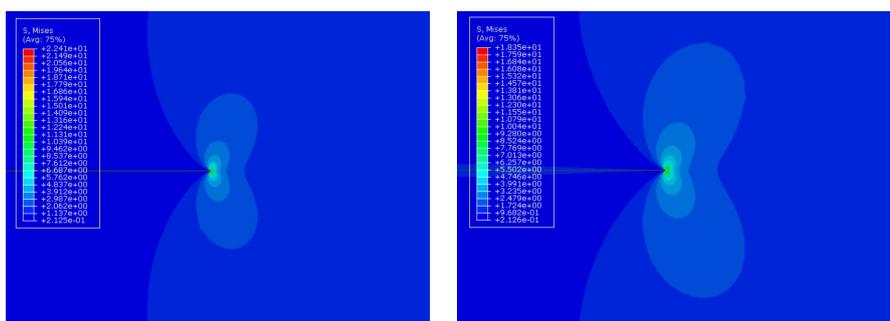


Рис. 4.13. Распределение интенсивности напряжений при  $t = 150$  ч и при  $t = 300$  ч  
 Fig. 4.13. Stress intensity distribution at  $t = 150$  h and at  $t = 300$  h

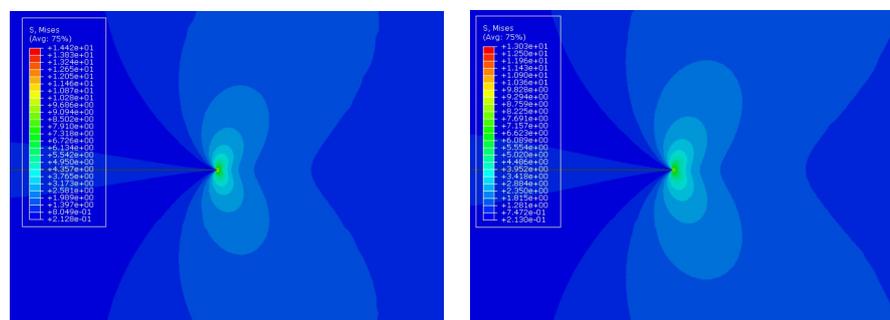


Рис. 4.14. Распределение интенсивности напряжений при  $t = 600$  ч и при  $t = 1300$  ч  
 Fig. 4.14. Stress intensity distribution at  $t = 600$  h and at  $t = 1300$  h

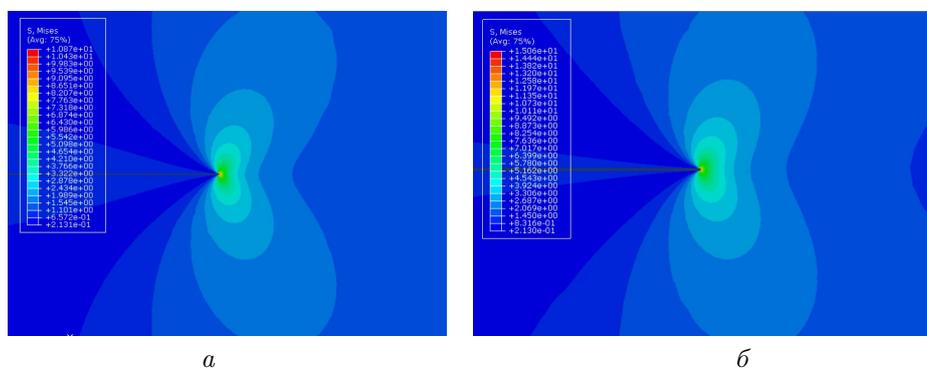


Рис. 4.15. Распределение интенсивности напряжений при  $t = 1500$  ч в окрестности вершины трещины в условиях ползучести: *a* — с учетом поврежденности; *b* — без поврежденности  
 Fig. 4.15. The distribution of stress intensity at  $t = 1500$  h in the vicinity of the crack tip in creep conditions: *a* — with damage taken into account; *b* — without damage

## Заключение

В работе представлен обзор применения подпрограммы UMAT программного комплекса SIMULIA Abaqus в механике деформируемого твердого тела. Данная подпрограмма служит для описания новых пользовательских материалов, отсутствующих в списке стандартных материалов пакета SIMULIA Abaqus. В этой обзорной статье приведены примеры задач и определяющих уравнений, которые моделируются исследователями при помощи процедур UMAT/VUMAT. Рассмотрены процессы разрушения и ползучести. Представлены типы материалов, успешно описанных посредством этих пользовательских процедур. В частности, были рассмотрены работы, посвященные изучению композитных и пористых материалов. Дано общее описание и опыт применения подпрограммы UMAT. Приведены результаты конечно-элементного моделирования деформирования пластины, ослабленной центральным круговым отверстием, при всестороннем равномерном и одноосном растяжении при установившейся ползучести в среде с поврежденностью, эволюционирующей по степенному закону, в связанной постановке задачи (ползучесть – поврежденность). Найдены распределения напряжений, деформаций и поля поврежденности у кончика дефекта в условиях ползучести и приведен анализ влияния процесса накопления повреждений на поля напряжений у вершины трещины в условиях установившейся ползучести. Продемонстрированы распределения напряжений и деформаций ползучести с учетом накопления поврежденности с течением времени.

### Благодарность.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РНФ в рамках научного проекта № 21-11-00346

## Литература

- [1] ANSYS documentation. URL: <https://kashanu.ac.ir/Files/Content/ANSYS%20Workbench.pdf>.
- [2] MSC Nastran documentation. URL: [https://faq.cc.metu.edu.tr/tr/system/files/u16319/nastran\\_2020\\_doc\\_install.pdf](https://faq.cc.metu.edu.tr/tr/system/files/u16319/nastran_2020_doc_install.pdf).
- [3] Marc/Mentat documentation. URL: <https://ru.scribd.com/doc/22327176/Marc-2010-User-s-Guide>.
- [4] Abaqus documentation. URL: <https://abaqus-docs.mit.edu/2017/English/SIMACAEEXCRefMap/simaexc-docproc.htm>.
- [5] Abaqus. Применение комплекса в инженерных задачах. Москва: Тесис. 2010. 104 с. URL: [https://tesis.com.ru/infocenter/downloads/abaqus/abaqus\\_metodic\\_2010.pdf](https://tesis.com.ru/infocenter/downloads/abaqus/abaqus_metodic_2010.pdf).
- [6] Tavara L., Moreno L., Paloma E., Mantic V. Accurate modelling of instabilities caused by multi-site interface-crack onset and propagation in composites using the sequentially linear analysis and Abaqus // Composite Structures. 2019. Vol. 225. P. 110993. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.COMPSTRUCT.2019.110993>.
- [7] Jafaripour M., Taheri-Behrooz F. Creep behavior modeling of polymeric composites using Schapery model based on micro-macromechanical approaches // European Journal of Mechanics / A Solids. 2020. Vol. 81. P. 103963. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2020.103963>.
- [8] Arruda M.R.T., Almeida-Fernandes L., Castro L., Correia J.R. Tsai–Wu based orthotropic damage model // Composites Part C: Open Access. 2021. Vol. 4. P. 100122. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.JCOMC.2021.100122>.
- [9] Tsai S.W., Wu E.M. A general theory of strength for anisotropic materials // J. Compos. Mater. 1971. Vol. 5. № 1. pp. 58–80.
- [10] Tsai S.W. A survey of macroscopic failure criteria for composite materials // J. Reinforced Plast. Compos. 1984. Vol. 3. № 1. pp. 40–62. DOI: <https://doi.org/10.1177/073168448400300102>.
- [11] Ломакин Е.В., Федулов Б.Н. Пластическое деформирование полос из материала с зависящими от вида напряженного состояния свойствами // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2007. № 7(54). С. 263–279. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/plasticheskoe-deformirovanie-polos-iz-materiala-s-zavisyaschimi-ot-vida-napryazhenogo-sostoyaniya-svoystvami/viewer>.
- [12] Ломакин Е.В., Федулов Б.Н. Теория пластичности и предельного равновесия тел, чувствительных к виду напряженного состояния // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4-4. С. 1595–1587. URL: [http://www.unn.ru/pages/issues/vestnik/19931778\\_2011\\_-\\_4-4\\_unicode/100.pdf](http://www.unn.ru/pages/issues/vestnik/19931778_2011_-_4-4_unicode/100.pdf); <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=22631869>. EDN: <https://www.elibrary.ru/tbgoyz>.
- [13] Fedulov B.N. et al. Modelling of thermoplastic polymer failure in fiber reinforced composites // Composite Structures. 2017. Vol. 163. pp. 293–301. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.COMPSTRUCT.2016.11.091>.
- [14] Martinez-Paneda E., Fuentes-Alonso S., Betegon C. Gradient-enhanced statistical analysis of cleavage fracture // European Journal of Mechanics – A/Solids. 2019. Vol. 77. P. 103785. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.05.002>.

- [15] Martinez-Paneda E., Betegon C. Modeling damage and fracture within strain-gradient plasticity // *International Journal of Solids and Structures*. 2015. Vol. 59. pp. 208–215. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.02.010>.
- [16] Taylor G.I. Plastic strain in metals // *Journal of the Institute of Metals*. 1938. Vol. 62. pp. 307–324.
- [17] Fernandez-Sousa R., Betegon C., Martinez-Paneda E. Analysis of the influence of microstructural traps on hydrogen assisted fatigue // *Acta Materialia*. 2020. Vol. 199. pp. 253–263. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.actamat.2020.08.030>.
- [18] Шлянников В.Н., Туманов А.В., Хамидулин Р.М. Эффекты градиентной пластичности в вершине трещины при плоском напряженном состоянии и плоской деформации // *Физическая мезомеханика*. 2021. Т. 24. № 2. С. 41–55. DOI: <http://doi.org/10.24412/1683-805X-2021-2-41-55>. EDN: <https://www.elibrary.ru/psslrr>.
- [19] Shlyannikov V., Martinez-Paneda E., Tumanov A., Tartygasheva A. Crack tip fields and fracture resistance parameters based on strain gradient plasticity // *International Journal of Solids and Structures*. 2021. Vol. 208–209. pp. 63–82. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.10.015>.
- [20] Shlyannikov V., Martinez-Paneda E., Tumanov A., Khamidullin R. Mode I and Mode II stress intensity factors and dislocation density behaviour in strain gradient plasticity // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2021. Vol. 116. P. 103128. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.tafmec.2021.103128>.
- [21] Fengxia O. Abaqus implementation of creep failure in polymer matrix composites with transverse isotropy. Ph. D. Thesis. Akron, 2005. 90 p.
- [22] Robin D.N., Binienda W.K., Ruggles M.B. Creep of Polymer Matrix Composites. I: Norton/Bailey Creep Law for Transverse Isotropy // *Journal of Engineering Mechanics*. 2003. Vol. 129. Issue 3. Pp. 310–317. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2003\)129:3\(310\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2003)129:3(310)).
- [23] Alotta G., Barrera O., Cocks A.C.F., Paola M.D. On the behavior of a three-dimensional fractional viscoelastic constitutive model // *Meccanica*. 2016. Vol. 52 № 9, pp. 2127–2142. DOI: <http://doi.org/10.1007/S11012-016-0550-8>.
- [24] Alotta G., Barrera O., Cocks A., Paola M. The finite element implementation of 3D fractional viscoelastic constitutive models // *Finite Elements in Analysis and Design*. 2018. Vol. 146. pp. 28–41. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.FINEL.2018.04.003>.
- [25] Li J. et al. Creep analyses for pipe bends under combined internal pressure and bending loads // *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 2021. Vol. 193. P. 104450. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.IJPVP.2021.104450>.
- [26] Sun T. et al. Experimental and numerical research on the nonlinear creep response of polymeric composites under humid environments // *Composite Structures*. 2020. Vol. 251. P. 112673. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112673>.
- [27] Kim J.H. et al. Prestrain-dependent viscoplastic damage model for austenitic stainless steel and implementation to ABAQUS user-defined material subroutine // *Computational Materials Science*. 2013. Vol. 67. Pp. 273–281. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.COMMATSCI.2012.08.021>.
- [28] O’Ceallaigh C., Sikora K., McPolin D., Harte A.M. Modelling the hygro-mechanical creep behaviour of FRP reinforced timber elements // *Construction and Building Materials*. 2020. Vol. 259. P. 119899. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2020.119899>.
- [29] Pavkovic K., Stepinac M., Rajcic V. Brittle failure modes in reinforced and non-reinforced timber joint with large diameter fastener loaded parallel to grain // *Engineering Structures*. 2020. Vol. 222. P. 111104. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.111104>.
- [30] Gharib M., Hassanieh A., Valipour H., Bradford M. A. Three-dimensional constitutive modelling of arbitrarily orientated timber based on continuum damage mechanics // *Finite Elements in Analysis and Design*. 2017. Vol. 135. pp. 79–90. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.FINEL.2017.07.008>.
- [31] Eslami H., Jayasinghe L.B., Waldmann D. Nonlinear three-dimensional anisotropic material model for failure analysis of timber // *Engineering Failure Analysis*. 2021. Vol. 130. P. 105764. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2021.105764>.
- [32] Hoffman O. The brittle strength of orthotropic materials // *Journal of Composites*. 1967. Vol. 1. № 2. Pp. 200–206. DOI: <http://doi.org/10.1177/002199836700100210>.
- [33] Sandhaas C. Van de Kuilen J.W., Blass H.J. Constitutive model for wood based on continuum damage mechanics // *12th World Conference on Timber Engineering*. Auckland, 2012. URL: <http://resolver.tudelft.nl/uuid:55c1c5e5-9902-43ad-a724-62bb063c3c80>.
- [34] Zhang J. et al. Characterizing the three-stage rutting behavior of asphalt pavement with semi-rigid base by using UMAT in ABAQUS // *Construction and Building Materials*. 2017. Vol. 140. pp. 496–507. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.CONBUILDMAT.2017.02.152>.
- [35] Zhao Y., Jiang L., Zhou L. Ambient Temperature and Vehicle Loading Effects on Asphalt Concrete Pavement Rutting Development // *Proceeding of 5th International Conference on Transportation Engineering*. 2015. Pp. 1084–1091. DOI: <https://doi.org/10.1061/9780784479384.136>.

- [36] Ban H., Im S., Kim Y.R. Nonlinear viscoelastic approach to model damage associated performance behavior of asphaltic mixture and pavement structure // *Can. J. Civ. Eng.* 2013. Vol. 40. № 4. Pp. 313–323. DOI: <http://doi.org/10.1139/CJCE-2012-0289>.
- [37] Xia K. Finite element modeling of dynamic tire/pavement interaction // *Proceedings of the Pavements and Materials: Characterization and Modeling Symposium*. 2010. Pp. 204–214. DOI: [http://doi.org/10.1061/41129\(385\)18](http://doi.org/10.1061/41129(385)18).
- [38] Gurson A.L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I—yield criteria and flow rules for porous ductile media // *J. Eng. Mater. Technol.* 1977. Vol. 99. pp. 2–15. DOI: <http://doi.org/10.1115/1.3443401>.
- [39] Tvergaard V., Needleman A. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar // *Acta Metallurgica*. 1984. Vol. 32. Issue 1. Pp. 157–169. DOI: [http://doi.org/10.1016/0001-6160\(84\)90213-X](http://doi.org/10.1016/0001-6160(84)90213-X).
- [40] Khan A.S., Suh Y.S., Kazmi R. Quasi-static and dynamic loading responses and constitutive modeling of titanium alloys // *International Journal of Plasticity*. 2004. Vol. 20. Issue 12. Pp. 2233–2248. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.IJPLAS.2003.06.005>.
- [41] Liang R., Khan A.S. A critical review of experimental results and constitutive models for BCC and FCC metals over a wide range of strain rates and temperatures // *International Journal of Plasticity*. 1999. Vol. 15. Issue 9. Pp. 963–980. DOI: <http://doi.org/10.1016/S0749-6419%2899%2900021-2>.
- [42] Lemaitre J. How to use damage mechanics // *Nuclear Engineering and Design*. 1984. Vol. 80. Issue 2. Pp. 233–245. DOI: [https://doi.org/10.1016/0029-5493\(84\)90169-9](https://doi.org/10.1016/0029-5493(84)90169-9).
- [43] Silling S.A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces // *J. Mech. Phys. Solids*. 2000. Vol. 48. Issue 1. Pp. 175–209. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0022-5096\(99\)00029-0](http://doi.org/10.1016/S0022-5096(99)00029-0).
- [44] Bobaru F, Foster J.T., Geubelle P.H., Silling S.A. *Handbook of Peridynamic Modeling*. New York: Taylor and Francis Group, 2017, 530 p. DOI: <http://doi.org/10.1201/9781315373331>.
- [45] Ha Y.D., Bobaru F. Studies of dynamic crack propagation and crack branching with peridynamics // *International Journal of Fracture*. 2010. Vol. 162. № 1-2. Pp. 229–244. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10704-010-9442-4>.
- [46] Ha Y.D., Bobaru F. Characteristics of dynamic brittle fracture captured with peridynamics // *Engineering Fracture Mechanics*. 2011. Vol. 78. № 6. Pp. 1156–1168. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.ENGFRACMECH.2010.11.020>.
- [47] Ha Y.D., Bobaru F. Dynamic brittle fracture captured with peridynamics // *Proceedings of the ASME 2011 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, 2011, pp. 437–442. DOI: <http://doi.org/10.1115/IMECE2011-65515>.
- [48] Oterkus E., Oterkus S., Madenci E. *Peridynamic Modeling, Numerical Techniques, and Applications* // Elsevier Series in Mechanics of Advanced Materials. 2021. 462 p. DOI: <http://doi.org/10.1016/C2019-0-01174-0>.
- [49] Kuhn C., Muller R. A continuum phase field model for fracture // *Engineering Fracture Mechanics*. 2010. Vol. 77. № 18. Pp. 3625–3634. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.ENGFRACMECH.2010.08.009>.
- [50] Schneider, D., Schoof, E., Huang, Y., Selzer, M., Nestler, B. Phase-field modeling of crack propagation in multiphase systems // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2016. Vol. 312. pp. 186–195. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.CMA.2016.04.009>.
- [51] Bie Y.H., Liu Z.M., Yang H. et al. Abaqus implementation of dual peridynamics for brittle fracture // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2020. Vol. 372. P. 113398. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113398>.
- [52] Wang Y., Zhou X., Wang Y. A 3-D conjugated bond-pair-based peridynamic formulation for initiation and propagation of cracks in brittle solids // *International Journal of Solids and Structures*. 2018. Vol. 134. Pp. 89–115. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.IJSOLSTR.2017.10.022>.
- [53] Griffith A. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Math. or Phys. Character* (1896-1934). 1921. Vol. 221. Pp. 163–198. Available at: <http://ia802702.us.archive.org/31/items/philtrans01457975/01457975.pdf>.
- [54] Msekh M.A. et al. Abaqus implementation of phase-field model for brittle fracture // *Computational Materials Science*, 2014, vol. 96, part B, pp. 472–484. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.COMMATSCI.2014.05.071>.
- [55] Navidtehrani Y., Betegon C., Martinez-Paneda E. A unified Abaqus implementation of the phase field fracture method using only a user material subroutine // *Materials*. 2021. Vol. 14. Issue 8. P. 1913. DOI: <https://doi.org/10.3390/ma14081913>.
- [56] Navidtehrani Y., Betegyn C. Martinez-Paceda E. A simple and robust Abaqus implementation of the phase field fracture method // *Applications in Engineering Science*. 2021. Vol. 6. P. 100050. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.APPLES.2021.100050>.
- [57] Wua J., Huang Y. Comprehensive implementations of phase-field damage models in Abaqus // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2020. Vol. 106. P. 102440. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.tafmec.2019.102440>.

- [58] Mika P. On interaction between damage growth and material stiffness in 3D structures // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. 1999. Vol. 37. № 4. Pp. 755–778. URL: <http://ptmts.org.pl/jtam/index.php/jtam/article/view/v37n4p755>.
- [59] Mika P. The comparison of scalar and tensorial damage measures. // ECCM-2001 : 2nd European Conference on Computational Mechanics : Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering, Cracow, Poland, June 26-29, 2001 : under the auspices of ECCOMAS and IACM [: papers]
- [60] Mika P. Influence of variable load on damage evolution in the plate structures // CMM-2003. Computer methods in mechanics. Short papers. 2003. pp. 253-254.
- [61] Mika P. Influence of Exponent in Damage Evolution Equation on the Accuracy of Damage Modelling in Brittle Materials // Engineering Transactions. 2015. Vol. 63. № 4. Pp. 463–479. URL: <http://et.ippt.gov.pl/index.php/et/article/download/245/239>.
- [62] Извеков О.Я., Селицкий А.А., Крупеник А.М. Решение связанных задач континуального разрушения термо- и пороупругих сред в SIMULIA ABAQUS. URL: [https://tesis.com.ru/infocenter/downloads/abaqus/abaqus\\_es11\\_mftu.pdf](https://tesis.com.ru/infocenter/downloads/abaqus/abaqus_es11_mftu.pdf)
- [63] Извеков О.Я., Крупеник А.М. Реализация энергетической модели континуального разрушения хрупких сред в SIMULIA ABAQUS 6.9. URL: [https://tesis.com.ru/infocenter/downloads/abaqus/abaqus\\_es10\\_mfti.pdf](https://tesis.com.ru/infocenter/downloads/abaqus/abaqus_es10_mfti.pdf).
- [64] Lee J.-H., Ryu D.-M., Lee C.-S. Constitutive-damage modeling and computational implementation for simulation of elasto-viscoplastic-damage behavior of polymeric foams over a wide range of strain rates and temperatures // International Journal of Plasticity. 2020. Vol. 130. P. 102712. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ijplas.2020.102712>.
- [65] Liu P.F., Li J.X., Wang S.B., Leng J.X. Finite element analysis of viscoelastic creep behaviors of deep-sea manned submersible viewport windows // International Journal of Pressure Vessels and Piping. 2020. Vol. 188. P. 104218. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.IJPVP.2020.104218>.
- [66] Xie Y. et al. Influence of creep on preload relaxation of bolted composite joints: Modeling and numerical simulation // Composite Structures. 2020. Vol. 245. P. 112332. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112332>.
- [67] Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести. // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1958. С. 26–31.
- [68] Dube M., Doquet V., Constantinescu A., George D., Remond Y., Ahzi S. Modelling of thermal shock-induced damage in borosilicate glass // Mechanics of Materials. 2010. Vol. 42. Issue 9. pp. 863–872. DOI: <https://doi.org/10.1016/J.MECHMAT.2010.07.002>.
- [69] Doquet V., Ben Ali N., Constantinescu A., Boutillon X. Fracture of a borosilicate glass under triaxial tension // Mechanics of Materials. 2013. Vol. 57. pp. 15–29. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.mechmat.2012.10.008>.
- [70] Doquet V., Ben Ali N., Chabert E., Bouyer F. Experimental and numerical study of crack healing in a nuclear glass // Mechanics of Materials. 2015. Vol. 80. pp. 145–162. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.MECHMAT.2014.09.003>.
- [71] Степанова Л.В. Компьютерное моделирование процессов накопления повреждений в твердых телах с трещинами с помощью пользовательской процедуры UMAT вычислительного комплекса Simulia Abaqus // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Сер.: Механика. 2018. № 3. С. 71–86. DOI: <http://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.3.08>. EDN: <https://www.elibrary.ru/yljexz>.
- [72] Turkova V.A., Stepanova L.V. Evaluation of damage accumulation zone in the vicinity of the crack tip: FEM analysis via UMAT procedure // Journal of Physics: Conference Series. 2018, vol. 1096, issue 1, p. 012157. DOI: <http://doi.org/10.1088/1742-6596/1096/1/012157>.
- [73] Sun X., Khaleel M.A. Modeling of glass fracture damage using continuum damage mechanics–static spherical indentation // International Journal of Damage Mechanics. 2004. Vol. 13. Pp. 263–284. DOI: <https://doi.org/10.1177/1056789504042593>.
- [74] Sun X., Khaleel M.A., Davies R.W. Modeling of stone impact resistance of monolithic glass ply using continuum damage mechanics // International Journal of Damage Mechanics. 2005. Vol. 14. Pp. 165–178. DOI: <http://doi.org/10.1177/1056789505048601>.
- [75] Zhang S., Wang Q., Zhou W. Implementation of the Tresca yield criterion in finite element analysis of burst capacity of pipelines // International Journal of Pressure Vessels and Piping. 2019. Vol. 172. Pp. 180–187. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.IJPVP.2019.03.037>.
- [76] Kodagali K. Progressive Failure Analysis of composite Materials using the Puck Failure Criteria (Doctoral dissertation). 2017. 77 p. URL: <https://scholarcommons.sc.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=5464&context=etd>.
- [77] Shlyannikov V., Tumanov A. Creep damage and stress intensity factor assessment for plane multi-axial and three-dimensional problems // International Journal of Solids and Structures. 2018. Vol. 150. Pp. 166–183. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.IJSOLSTR.2018.06.009>.
- [78] Shlyannikov V.N., Tumanov A.V. Force and deformation models of damage and fracture during creep // Physical Mesomechanics. 2018. Vol. 21. № 3. Pp. 70–85. DOI: <http://doi.org/10.24411/1683-805X-2018-13008>.

- [79] Sen S., Patel B.P. Creep-Fatigue Interaction of Steam Turbine Rotors Using Continuum Damage Mechanics // Transactions of the Indian National Academy of Engineering. 2022. DOI: <http://doi.org/10.1007/s41403-021-00310-2>.
- [80] Compatible Fortran and Visual Studio for Abaqus. URL: <https://caeassistant.com/blog/compatible-fortran-visual-studio-for-abaqus>.
- [81] USER MATERIAL IN ABAQUS. URL: <https://abaqus-docs.mit.edu/2017/English/SIMACAESUBRefMap/simasub-c-umat.htm>.
- [82] Lecture 6 Writing a UMAT or VUMAT Overview. URL: <https://imechanica.org/files/Writing%20a%20UMAT.pdf>.
- [83] Okereke M., Keates S. Finite Element Applications. Springer. 2018. 418 p. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-3-319-67125-3>.
- [84] Ilin V.N., Mordashov S.V., Pusach S.V. Laws of creep for computation of fire resistance for steel equipment // Technology of technosphere safety. 2008. № 6 (22). С. 10–17. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15101435>. EDN: <https://www.elibrary.ru/msmcaf>.
- [85] Бойл Дж., Спенс Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. Москва: Мир. 1986. 360 с.
- [86] Riedel H. Fracture at High Temperatures. Springer-Verlag. 1987. 418 p. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-3-642-82961-1>.
- [87] Meng Li., Chen W., Yan Y., Kitamura T., Feng. M. Modelling of creep and plasticity deformation considering creep damage and kinematic hardening // Engineering Fracture Mechanics. 2019. Vol. 218. P. 106582. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.ENGFRACTMECH.2019.106582>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-3-46-73

Submitted: 14.09.2021

Revised: 16.10.2021

Accepted: 15.11.2021

*O.N. Belova*

Samara National Research University, Samara, Russian Federation  
E-mail: [BelovaONik@yandex.ru](mailto:BelovaONik@yandex.ru). ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4492-223X>

*D.V. Chapliy*

Samara National Research University, Samara, Russian Federation  
E-mail: [Dch300189@yandex.ru](mailto:Dch300189@yandex.ru). ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9510-3659>

*L.V. Stepanova*

Samara National Research University, Samara, Russian Federation  
E-mail: [StepanovaLv2015@yandex.ru](mailto:StepanovaLv2015@yandex.ru). ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

## APPLICATION OF THE UMAT SUBROUTINE FOR SOLVING CONTINUUM MECHANICS PROBLEMS (OVERVIEW)

**ABSTRACT** This paper presents an overview of the application of the UMAT subroutine of the SIMULIA Abaqus multifunctional software package in solid mechanics and related areas. This subroutine is used to describe new user materials that are not available in the class of standard materials of the SIMULIA Abaqus package. This overview article provides examples of problems and constitutive equations of materials that are modeled using UMAT / VUMAT procedures. Various types of materials are presented, successfully described by means of user-defined UMAT and VUMAT procedures. A general description and experience of using the UMAT subroutine is given. The results of finite element modeling of the deformation of a plate weakened by a central circular hole under uniform and uniaxial tension with steady-state creep in a damaged medium evolving according to a power law are presented in the coupled formulation of the problem (creep - damage). The distributions of stresses, strains, and damage fields at the tip of the defect under creep conditions are found, and an analysis is made of the effect of the damage accumulation process on the stress fields at the crack tip under steady-state creep conditions. The distributions of stresses and creep strains are demonstrated taking into account the accumulation of damage over time.

**Key words:** user procedure UMAT; SIMULIA Abaqus; composites; creep; damage; solid mechanics; modeling of materials; fracture in creep conditions.

**Citation.** Belova O.N., Chapliy D.V., Stepanova L.V. Application of the UMAT Subroutine for solving continuum mechanics problems (Overview). *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 46–73. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-46-73>. (In Russ.)

**Information about the conflict of interests:** authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Belova O.N., 2021

*Oksana N. Belova* — postgraduate student of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

© Chapliy D.V., 2021

*Dmitriy V. Chapliy* — postgraduate student of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

© Stepanova L.V., 2021

*Larisa V. Stepanova* — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, head of the Department of Mathematical Modeling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

## References

- [1] ANSYS documentation. Available at: <https://kashanu.ac.ir/Files/Content/ANSYS%20Workbench.pdf>
- [2] MSC Nastran documentation. Available at: [https://faq.cc.metu.edu.tr/tr/system/files/u16319/nastran\\_2020\\_doc\\_install.pdf](https://faq.cc.metu.edu.tr/tr/system/files/u16319/nastran_2020_doc_install.pdf).
- [3] Marc/Mentat documentation. Available at: <https://ru.scribd.com/doc/22327176/Marc-2010-User-s-Guide>.
- [4] Abaqus documentation. Available at: <https://abaqus-docs.mit.edu/2017/English/SIMACAEEXCRefMap/simaexc-docproc.htm>.
- [5] Abaqus. Application of the complex in engineering tasks. Moscow: Tesis, 2010, 104 p. Available at: [https://tesis.com.ru/infocenter/downloads/abaqus/abaqus\\_metodic\\_2010.pdf](https://tesis.com.ru/infocenter/downloads/abaqus/abaqus_metodic_2010.pdf). (In Russ.)
- [6] Tavara L., Moreno L., Paloma E., Mantic V. Accurate modelling of instabilities caused by multi-site interface-crack onset and propagation in composites using the sequentially linear analysis and Abaqus. *Composite Structures*, 2019, vol. 225, p. 110993. DOI: <https://doi.org/10.1016/J.COMPSTRUCT.2019.110993>.
- [7] Jafaripour M., Taheri-Behrooz F. Creep behavior modeling of polymeric composites using Schapery model based on micro-macromechanical approaches. *European Journal of Mechanics A- solids*, 2020, vol. 81, p. 103963. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2020.103963>.
- [8] Arruda M.R.T., Almeida-Fernandes L., Castro L., Correia J.R. Tsai–Wu based orthotropic damage model. *Composites Part C: Open Access*, 2021, vol. 4, p. 100122. DOI: <https://doi.org/10.1016/J.JCOMC.2021.100122>.
- [9] Tsai S.W., Wu E.M. A general theory of strength for anisotropic materials. *Journal of Composite Materials*, 1971, vol. 5, № 1, pp. 58–80. DOI: <https://doi.org/10.1177/002199837100500106>.
- [10] Tsai S.W. A survey of macroscopic failure criteria for composite materials. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 1984, vol. 3, № 1, pp. 40–62. DOI: <https://doi.org/10.1177/073168448400300102>.
- [11] Lomakin E.V., Fedulov B.N. Plastic deformation of stripes of stress-state-dependent material properties. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2007, № 7(54), pp. 263–279. Available at: <https://cyberleninka.ru/article/n/plasticheskoe-deformirovanie-polos-iz-materiala-s-zavisyaschimi-ot-vida-napryazhenogo-sostoyaniya-svoystvami/viewer>. (In Russ.)
- [12] Lomakin E.V., Fedulov B.N. Theory of plasticity and limit state of solids susceptible to the stress state type. *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*, 2011, № 4-4, pp. 1595–1587. Available at: [http://www.unn.ru/pages/issues/vestnik/19931778\\_2011\\_-\\_4-4\\_unicode/100.pdf](http://www.unn.ru/pages/issues/vestnik/19931778_2011_-_4-4_unicode/100.pdf); <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=22631869>. EDN: <https://www.elibrary.ru/tbgoyz>. (In Russ.)
- [13] Fedulov B.N. et al. Modelling of thermoplastic polymer failure in fiber reinforced composites. *Composite Structures*, 2017, vol. 163, pp. 293–301. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.COMPSTRUCT.2016.11.091>.
- [14] Martinez-Paneda E., Fuentes-Alonso S., Betegon C. Gradient-enhanced statistical analysis of cleavage fracture. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2019, vol. 77, p. 103785. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.05.002>.
- [15] Martinez-Paneda E., Betegon C. Modeling damage and fracture within strain-gradient plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 2015, vol. 59, pp. 208–215. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.02.010>.
- [16] Taylor G.I. Plastic strain in metals. *Journal of the Institute of Metals*, 1938, vol. 62, pp. 307–324.

- [17] Fernandez-Sousa R., Betegon C., Martinez-Paneda E. Analysis of the influence of microstructural traps on hydrogen assisted fatigue. *Acta Materialia*, 2020, vol. 199, pp. 253–263. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2020.08.030>.
- [18] Shlyannikov V.N., Tumanov A.V., Khamidullin R.M. Strain gradient effects at the crack tip under plane strain and plane stress conditions. *Physical Mesomechanics*, 2021, vol. 24, № 3, pp. 257–268. DOI: <http://doi.org/10.1134/S1029959921030048>. EDN: <https://www.elibrary.ru/yapvcu>. (English; Russian original).
- [19] Shlyannikov V., Martinez-Paneda E., Tumanov A., Tartygasheva A. Crack tip fields and fracture resistance parameters based on strain gradient plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 2021, vol. 208–209, pp. 63–82. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.10.015>.
- [20] Shlyannikov V., Martinez-Paneda E., Tumanov A., Khamidullin R. Mode I and Mode II stress intensity factors and dislocation density behaviour in strain gradient plasticity. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2021, vol. 116, p. 103128. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.tafmec.2021.103128>
- [21] Fengxia O. Abaqus implementation of creep failure in polymer matrix composites with transverse isotropy. Ph. D. Thesis. Akron, 2005, 90 p.
- [22] Robinson D.N., Binienda W.K., Ruggles M.B. Creep of Polymer Matrix Composites. I: Norton/Bailey Creep Law for Transverse Isotropy. *Journal of Engineering Mechanics*, 2003, vol. 129, Issue 3, pp. 310–317. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2003\)129:3\(310\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2003)129:3(310)).
- [23] Alotta G., Barrera O., Cocks A.C.F., Paola M.D. On the behavior of a three-dimensional fractional viscoelastic constitutive model. *Meccanica*, 2016, vol. 52, № 9, pp. 2127–2142. DOI: <http://doi.org/10.1007/S11012-016-0550-8>.
- [24] Alotta G., Barrera O., Cocks A., Paola M. The finite element implementation of 3D fractional viscoelastic constitutive models. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2018, vol. 146, pp. 28–41. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.FINEL.2018.04.003>.
- [25] Li J. et al. Creep analyses for pipe bends under combined internal pressure and bending loads. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2021, vol. 193, p. 104450. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.IJPVP.2021.104450>.
- [26] Sun T. et al. Experimental and numerical research on the nonlinear creep response of polymeric composites under humid environments. *Composite Structures*, 2020, vol. 251, p. 112673. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112673>.
- [27] Kim J.-H. et al. Prestrain-dependent viscoplastic damage model for austenitic stainless steel and implementation to ABAQUS user-defined material subroutine. *Computational Materials Science*, 2013, vol. 67, pp. 273–281. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.COMMATSCI.2012.08.021>.
- [28] O’Ceallaigh C., Sikora K., McPolin D., Harte A.M. Modelling the hygro-mechanical creep behaviour of FRP reinforced timber elements. *Construction and Building Materials*, 2020, vol. 259, p. 119899. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2020.119899>.
- [29] Pavkovic K., Stepinac M., Rajcic V. Brittle failure modes in reinforced and non-reinforced timber joint with large diameter fastener loaded parallel to grain. *Engineering Structures*, 2020, vol. 222, p. 111104. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.111104>.
- [30] Gharib M., Hassanieh A., Valipour H., Bradford M. A. Three-dimensional constitutive modelling of arbitrarily orientated timber based on continuum damage mechanics. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2017, vol. 135, pp. 79–90. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.FINEL.2017.07.008>.
- [31] Eslami H., Jayasinghe L.B., Waldmann D. Nonlinear three-dimensional anisotropic material model for failure analysis of timber. *Engineering Failure Analysis*, 2021, vol. 130, p. 105764. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2021.105764>.
- [32] Hoffman O. The Brittle Strength of Orthotropic Materials. *Journal of Composite Materials*, 1967, vol. 1, № 2, pp. 200–206. DOI: <http://doi.org/10.1177/002199836700100210>.
- [33] Sandhaas C. Van de Kuilen J.W., Blass H.J. Constitutive model for wood based on continuum damage mechanics. In: *12th World Conference on Timber Engineering*. Auckland, 2012. Available at: <http://resolver.tudelft.nl/uuid:55c1c5e5-9902-43ad-a724-62bb063c3c80>.
- [34] Zhang J. et al. Characterizing the three-stage rutting behavior of asphalt pavement with semi-rigid base by using UMAT in ABAQUS. *Construction and Building Materials*, 2017, vol. 140, pp. 496–507. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.CONBUILDMAT.2017.02.152>.
- [35] Zhao Y., Jiang L., Zhou L. Ambient Temperature and Vehicle Loading Effects on Asphalt Concrete Pavement Rutting Development. *Proceeding of 5th International Conference on Transportation Engineering*, 2015, pp. 1084–1091. DOI: <http://doi.org/10.1061/9780784479384.136>.
- [36] Ban H., Im S., Kim Y.R. Nonlinear viscoelastic approach to model damage associated performance behavior of asphaltic mixture and pavement structure. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 2013, vol. 40, № 4, pp. 313–323. DOI: <http://doi.org/10.1139/CJCE-2012-0289>.

- [37] Xia K. Finite element modeling of dynamic tire/pavement interaction. *Proceedings of the Pavements and Materials: Characterization and Modeling Symposium*, 2010, pp. 204–214. DOI: [http://doi.org/10.1061/41129\(385\)18](http://doi.org/10.1061/41129(385)18).
- [38] Gurson A.L. Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth: Part I—Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media. *Journal of Engineering Materials and Technology-transactions of The Asme*, 1977, vol. 99, pp. 2–15. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3443401>.
- [39] Tvergaard V., Needleman A. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Metallurgica*, 1984, vol. 32, issue 1, pp. 157–169. DOI: [http://doi.org/10.1016/0001-6160\(84\)90213-X](http://doi.org/10.1016/0001-6160(84)90213-X).
- [40] Khan A.S., Suh Y.S., Kazmi R. Quasi-static and dynamic loading responses and constitutive modeling of titanium alloys. *International Journal of Plasticity*, 2004, vol. 20, issue 12, pp. 2233–2248. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.IJPLAS.2003.06.005>.
- [41] Liang R., Khan A.S. A critical review of experimental results and constitutive models for BCC and FCC metals over a wide range of strain rates and temperatures. *International Journal of Plasticity*, 1999, vol. 15, issue 9, pp. 963–980. DOI: <https://doi.org/10.1016/S0749-6419%2899%2900021-2>.
- [42] Lemaitre J. How to use damage mechanics. *Nuclear Engineering and Design*, 1984, vol. 80, issue 2, pp. 233–245. DOI: [http://doi.org/10.1016/0029-5493\(84\)90169-9](http://doi.org/10.1016/0029-5493(84)90169-9).
- [43] Silling S.A. Reformulation of Elasticity Theory for Discontinuities and Long-Range Forces. *Journal of The Mechanics and Physics of Solids*, 2000, vol. 48, issue 1, pp. 175–209. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0022-5096\(99\)00029-0](http://doi.org/10.1016/S0022-5096(99)00029-0).
- [44] Bobaru F, Foster J.T., Geubelle P.H., Silling S.A. Handbook of Peridynamic Modeling. New York: Taylor and Francis Group, 2017, 530 p. DOI: <http://doi.org/10.1201/9781315373331>.
- [45] Ha Y.D., Bobaru F. Studies of dynamic crack propagation and crack branching with peridynamics. *International Journal of Fracture*, 2010, vol. 162, № 1-2, pp. 229–244. DOI: <http://doi.org/10.1007/S10704-010-9442-4>.
- [46] Ha Y.D., Bobaru F. Characteristics of dynamic brittle fracture captured with peridynamics. *Engineering Fracture Mechanics*, 2011, vol. 78, № 6, pp. 1156–1168. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.ENGFRACMECH.2010.11.020>.
- [47] Ha Y.D., Bobaru F. Dynamic brittle fracture captured with peridynamics. In: *Proceedings of the ASME 2011 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. DOI: <http://doi.org/10.1115/IMECE2011-65515>.
- [48] Oterkus E., Oterkus S., Madenci E. Peridynamic Modeling, Numerical Techniques, and Applications. In: *Elsevier Series in Mechanics of Advanced Materials*, 2021, 462 p. DOI: <http://doi.org/10.1016/C2019-0-01174-0>
- [49] Kuhn C., Muller R. A continuum phase field model for fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 2010, vol. 77, № 18, pp. 3625–3634. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.ENGFRACMECH.2010.08.009>.
- [50] Schneider D., Schoof E., Huang Y., Selzer M., Nestler B. Phase-field modeling of crack propagation in multiphase systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2016, vol. 312, pp. 186–195. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.CMA.2016.04.009>.
- [51] Bie Y.H., Liu Z.M., Yang H. et al. Abaqus implementation of dual peridynamics for brittle fracture. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, vol. 372, p. 113398. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113398>.
- [52] Wang Y., Zhou X., Wang Y. A 3-D conjugated bond-pair-based peridynamic formulation for initiation and propagation of cracks in brittle solids. *International Journal of Solids and Structures*, 2018, vol. 134, pp. 89–115. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.IJSOLSTR.2017.10.022>.
- [53] Griffith A. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character (1896-1934)*, 1921, vol. 221, pp. 163–198. DOI: <https://ia802702.us.archive.org/31/items/philtrans01457975/01457975.pdf>.
- [54] Msekh M.A. et al. Abaqus implementation of phase-field model for brittle fracture. *Computational Materials Science*, 2014, vol. 96, part B, pp. 472–484. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.COMMATSCI.2014.05.071>.
- [55] Navidtehrani Y., Betegon C., Martinez-Paneda E. A unified Abaqus implementation of the phase field fracture method using only a user material subroutine. *Materials*, 2021, vol. 14, issue 8, p. 1913. DOI: <http://doi.org/10.3390/ma14081913>.
- [56] Navidtehrani Y., Betegyn C. Martinez-Paceda E. A simple and robust Abaqus implementation of the phase field fracture method. *Applications in Engineering Science*, 2021, vol. 6, p. 100050. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.APPLES.2021.100050>.
- [57] Wua J., Huang Y. Comprehensive implementations of phase-field damage models in Abaqus. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2020, vol. 106, p. 102440. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.tafmec.2019.102440>.
- [58] Mika P. On interaction between damage growth and material stiffness in 3D structures. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 1999, vol. 37, № 4, pp. 755–778. Available at: <http://ptmts.org.pl/jtam/index.php/jtam/article/view/v37n4p755>.

- [59] Mika P. The comparison of scalar and tensorial damage measures. In: *ECCM-2001: 2nd European Conference on Computational Mechanics: Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering. Cracow, Poland, June 26-29, 2001: under the auspices of ECCOMAS and IACM*.
- [60] Mika P. Influence of variable load on damage evolution in the plate structures. In: *CMM-2003. Computer methods in mechanics. Short papers*, 2003, pp. 253–254.
- [61] Mika P. Influence of Exponent in Damage Evolution Equation on the Accuracy of Damage Modelling in Brittle Materials. *Engineering Transactions*, 2015, vol. 63, № 4, pp. 463–479. Available at: <http://et.ippt.gov.pl/index.php/et/article/download/245/239>.
- [62] Izvekov O.Ya., Krupenik A.M. Solutions of coupled problems of continuum fracture of porous and poro-elastic media in SIMULIA ABAQUS. Available at: [http://tesis.com.ru/infocenter/downloads/abaqus/abaqus\\_es11\\_mftu.pdf](http://tesis.com.ru/infocenter/downloads/abaqus/abaqus_es11_mftu.pdf).
- [63] Izvekov O.Ya., Krupenik A.M. Realization of energy model of continuum fracture of brittle media in SIMULIA ABAQUS 6.9. Available at: [https://tesis.com.ru/infocenter/downloads/abaqus/abaqus\\_es10\\_mfti.pdf](https://tesis.com.ru/infocenter/downloads/abaqus/abaqus_es10_mfti.pdf).
- [64] Lee J.-H., Ryu D.-M., Lee C.-S. Constitutive-damage modeling and computational implementation for simulation of elasto-viscoplastic-damage behavior of polymeric foams over a wide range of strain rates and temperatures. *International Journal of Plasticity*, 2020, vol. 130, p. 102712. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ijplas.2020.102712>.
- [65] Liu P.F., Li J.X., Wang S.B., Leng J.X. Finite element analysis of viscoelastic creep behaviors of deep-sea manned submersible viewport windows. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2020, vol. 188, p. 104218. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.IJPVP.2020.104218>.
- [66] Xie Y. et al. Influence of creep on preload relaxation of bolted composite joints: Modeling and numerical simulation. *Composite Structures*, 2020, vol. 245, p. 112332. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112332>.
- [67] Kachanov L.M. On the fracture time under creep conditions. *Izv. AN SSSR. Otd-nie tekhn. nauk*, 1958, pp. 26–31. (In Russ.)
- [68] Dube M., Doquet V., Constantinescu A., George D., Remond Y., Ahzi S. Modelling of thermal shock-induced damage in borosilicate glass. *Mechanics of Materials*, 2010, vol. 42, Issue 9, pp. 863–872. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.MECHMAT.2010.07.002>.
- [69] Doquet V., Ben Ali N., Constantinescu A., Boutillon X. Fracture of a borosilicate glass under triaxial tension *Mechanics of Materials*, 2013, vol. 57, pp. 15–29. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.mechmat.2012.10.008>.
- [70] Doquet V., Ben Ali N., Chabert E., Bouyer F. Experimental and numerical study of crack healing in a nuclear glass. *Mechanics of Materials*, 2015, vol. 80, pp. 145–162. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.MECHMAT.2014.09.003>.
- [71] Stepanova L.V. Computational simulation of the damage accumulation processes in cracked solids by the user procedure UMAT of Simulia Abaqus. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, no. 3, pp. 71–86. DOI: <http://doi.org/10.15593/perm.mech/2018.3.08>. EDN: <https://www.elibrary.ru/yljexz>. (In Russ.)
- [72] Turkova V.A., Stepanova L.V. Evaluation of damage accumulation zone in the vicinity of the crack tip: FEM analysis via UMAT procedure. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 1096, issue 1, p. 012157. DOI: <http://doi.org/10.1088/1742-6596/1096/1/012157>.
- [73] Sun X., Khaleel M.A. Modeling of glass fracture damage using continuum damage mechanics–static spherical indentation. *International Journal of Damage Mechanics*, 2004, vol. 13, pp. 263–284. DOI: <http://doi.org/10.1177/1056789504042593>.
- [74] Sun X., Khaleel M.A., Davies R.W. Modeling of stone impact resistance of monolithic glass ply using continuum damage mechanics. *International Journal of Damage Mechanics*, 2005, vol. 14, pp. 165–178. DOI: <https://doi.org/10.1177/1056789505048601>.
- [75] Zhang S., Wang Q., Zhou W. Implementation of the Tresca yield criterion in finite element analysis of burst capacity of pipelines. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2019, vol. 172, pp. 180–187. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.IJPVP.2019.03.037>.
- [76] Kodagali K. Progressive Failure Analysis of composite Materials using the Puck Failure Criteria (Doctoral dissertation). 2017, 77 p. Available at: <https://scholarcommons.sc.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=5464&context=etd>.
- [77] Shlyannikov V., Tumanov A. Creep damage and stress intensity factor assessment for plane multi-axial and three-dimensional problems. *International Journal of Solids and Structures*, 2018, vol. 150, pp. 166–183. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.IJSOLSTR.2018.06.009>.
- [78] Shlyannikov V.N., Tumanov A.V. Force and deformation models of damage and fracture during creep. *Physical Mesomechanics*, 2018, vol. 21, № 3, pp. 70–85. DOI: <https://doi.org/10.24411/1683-805X-2018-13008>.
- [79] Sen S., Patel B.P. Creep-Fatigue Interaction of Steam Turbine Rotors Using Continuum Damage Mechanics. *Transactions of the Indian National Academy of Engineering*, 2022. DOI: <http://doi.org/10.1007/s41403-021-00310-2>.
- [80] Compatible Fortran and Visual Studio for Abaqus. Available at: <https://caeassistant.com/blog/compatible-fortran-visual-studio-for-abaqus/>

- [81] USER MATERIAL IN ABAQUS. Available at: <https://abaqus-docs.mit.edu/2017/English/SIMACAESUBRefMap/simasub-c-umat.htm>
- [82] Lecture 6 Writing a UMAT or VUMAT Overview. Available at: <https://imechanica.org/files/Writing%20a%20UMAT.pdf>.
- [83] Okereke M., Keates S. Finite Element Applications. Springer, 2018, 418 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-67125-3>.
- [84] Ilin V.N., Mordashov S.V., Pusach S.V. Laws of creep for computation of fire resistance for steel equipment. *Technology of technosphere safety*, 2008, no. 6 (22), pp. 10–17. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15101435>. EDN: <https://www.elibrary.ru/msmcaf>. (In Russ.)
- [85] Boil G., Spens G. Stress Analysis for Creep. Moscow: Mir, 1986, 360 p. (In Russ.)
- [86] Riedel H. Fracture at High Temperatures. Springer-Verlag, 1987, 418 p. Available at: <http://doi.org/10.1007/978-3-642-82961-1>.
- [87] Meng Li., Chen W., Yan Y., Kitamura T., Feng. M. Modelling of creep and plasticity deformation considering creep damage and kinematic hardening. *Engineering Fracture Mechanics*, 2019, vol. 218, p. 106582. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.ENGFRACTMECH.2019.106582>.