 Научная статья

10.18287/2541-7525-2021-27-3-22-30

УДК 517.928

Дата: поступления статьи: 02.09.2021
после рецензирования: 9.10.2021
принятия статьи: 15.11.2021

В.А. Соболев
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: v.sobolev@ssau.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7327-7340
Е.А. Тропкина
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: elena_a.85@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5970-6740
Е.А. Щепакина
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: shchepakina@yahoo.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2898-2865
Л. Жанг
Шаньдунский научно-технологический университет,
г. Циндао, Китайская Народная Республика
E-mail: li-jun0608@163.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5697-4611

ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЗАДАЧ О БЕГУЩИХ ВОЛНАХ[1]

АННОТАЦИЯ

В работе рассматривается задача о бегущих волнах для сингулярно возмущенных систем полулинейных параболических уравнений. Предлагается эффективный метод редукции сингулярно возмущенных систем, которые возникают при решении задач о нахождении бегущих волн. Полученные математические результаты используются для исследования бегущих волн как для абстрактных уравнений с частными производными, так и в конкретной модели, возникающей в задачах физики, химии и биологии.

Ключевые слова: сингулярные возмущения; медленные инвариантные многообразия; критические бегущие волны; редукция.

Цитирование. Соболев В.А., Тропкина Е.А., Щепакина Е.А., Zhang L. Декомпозиция задач о бегущих волнах // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2021. Т. 27, № 3. С. 22–30. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-22-30.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Владимир Андреевич Соболев — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Елена Андреевна Тропкина — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ и ГФЕН в рамках научного проекта № 20-51-53008 и проекта NSFC No. 12011530062

Елена Анатольевна Щепакина — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Личунь Жанг — PhD, профессор, Шаньдунский научно-технологический университет, 266590, Китайская Народная Республика, провинция Шаньдун, г. Циндао, округ Гуаньдао, 579.

1. Предварительные сведения

Известно, что бегущие волны играют фундаментальную роль при исследовании широкого круга математических и прикладных задач. Рассмотрим следующий класс систем полулинейных параболических уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \Lambda \frac{\partial^2 u}{\partial \chi^2} + \Upsilon(u), \tag{1.1}$$

где $u \in \mathbb{R}^n$, $\chi \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$, ε – положительный малый параметр. Здесь Λ – постоянная диагональная матрица с положительными элементами на главной диагонали $(\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_n)$, а $\Upsilon(u)$ – достаточно гладкая и ограниченная по норме векторная функция.

Системы такого типа широко применяются в качестве математических моделей в физике, химии и биологии, и известно много примеров бегущих волн в таких моделях, см., например, [1–4].

Напомним, что решение типа бегущей волны представимо в виде $u(x,t) = u(\zeta)$, $\zeta = x - ct$ для некоторого значения $c \in \mathbb{R}$ скорости волны и удовлетворяет следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-cu' = \varepsilon \Lambda u'' + \Upsilon(u), \tag{1.2}$$

где символ $()'$ соответствует дифференцированию по ζ. Наша первоочередная цель состоит в понижении размерности системы (1.2), используя расщепляющее преобразование [5; 6].

2. Расщепляющее преобразование

Рассмотрим сингулярно возмущенную дифференциальную систему, линейную по y:

$$\dot{x} = \xi(x,\varepsilon) + \Xi(x,\varepsilon) y, \tag{2.1}$$

$$\varepsilon \dot{y} = \theta(x,\varepsilon) + \Theta(x,\varepsilon) y, \tag{2.2}$$

где $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$.

Будем предполагать, что собственные значения $\lambda_i(x)$ матрицы $\Theta(x,0)$ подчиняются неравенству $\operatorname{Re}\lambda_i(x) \leqslant -2\gamma < 0$, при $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^m$, и что матричные и векторные функции ξ, θ, Ξ и Θ непрерывны и ограничены вместе со своими частными производными по переменным $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^m$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

При этих предположениях система (2.1), (2.2) имеет медленное инвариантное многообразие

$$y = \varphi(x,\varepsilon) = \varphi_0(x) + \varepsilon \varphi_1(x) + \dots .$$

Используя равенство

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\xi + \Xi \varphi),$$

которое следует из (2.1), получим, что функция φ может быть найдена из так называемого уравнения инвариантности [7]

$$\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\xi + \Xi \varphi) = \theta + \Theta \varphi.$$

Предположим, что справедливы следующие представления:

$$\begin{aligned}
\Xi(x,\varepsilon) &= \Xi_0(x) + \varepsilon \Xi_1(x) + \dots, \\
\xi(x,\varepsilon) &= \xi_0(x) + \varepsilon \xi_1(x) + \dots, \\
\Theta(x,\varepsilon) &= \Theta_0(x) + \varepsilon \Theta_1(x) + \dots, \\
\theta(x,\varepsilon) &= \theta_0(x) + \varepsilon \theta_1(x) + \dots .
\end{aligned}$$

Тогда формулы для коэффициентов асимптотического разложения медленного инвариантного многообразия $\varphi = \varphi(x,\varepsilon)$ принимают вид

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= -\Theta_0^{-1}\theta_0, \\ \varphi_1 &= \Theta_0^{-1}\left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}(\xi_0 + \Xi_0\varphi_0) - \theta_1 - \Theta_1\varphi_0\right]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Уравнение инвариантности для быстрого инвариантного многообразия $\Psi = \Psi(v,z,\varepsilon)$ [5; 6] имеет вид

$$\varepsilon\frac{\partial \Psi}{\partial v}\Big[\xi(v,\varepsilon) + \Xi(v,\varepsilon)\varphi(v,\varepsilon)\Big] + \frac{\partial \Psi}{\partial z}\left[\Theta(v+\varepsilon\Psi,\varepsilon) - \varepsilon\frac{\partial \varphi}{\partial x}(v+\varepsilon\Psi,\varepsilon)\Xi(v+\varepsilon\Psi,\varepsilon)\right]z =$$
$$= \xi(v+\varepsilon\Psi,\varepsilon) - \xi(v,\varepsilon) + \Xi(v+\varepsilon\Psi,\varepsilon)\big(z + \varphi(v+\varepsilon\Psi,\varepsilon)\big) - \Xi(v,\varepsilon)\varphi(v,\varepsilon).$$

Полагая $\varepsilon = 0$, получим

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial z}\Theta_0(v)z = \Xi_0(v)z.$$

Для $\Psi_0(v,z)$ справедливо представление $\Psi_0(v,z) = D_0(v)z$, где матрица $D_0(v)$ удовлетворяет уравнению

$$D_0(v)\Theta_0(v) = \varphi_0(v),$$

и, следовательно,

$$\Psi_0(v,z) = \Xi_0(v)\Theta_0^{-1}(v)z.$$

Перейдем к построению расщепляющего преобразования

$$x = v + \varepsilon\Psi(v,z,\varepsilon), \tag{2.4}$$

$$y = z + \varphi(x,\varepsilon), \tag{2.5}$$

которое приводит систему (2.1), (2.2) к виду

$$\dot v = V(v,\varepsilon), \tag{2.6}$$

$$\varepsilon\dot z = Z(v,z,\varepsilon). \tag{2.7}$$

Пусть $\big(x(t),\ y(t)\big)$ является решением (2.1), (2.2) с начальным условием $x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0$. Тогда существует такое решение $\big(v(t),\ z(t)\big)$ для (2.6), (2.7) с начальным условием $v(t_0) = v_0,\ z(t_0) = z_0$, что

$$x(t) = v(t) + \varepsilon\Psi\big(v(t), z(t), \varepsilon\big), \tag{2.8}$$

$$y(t) = z(t) + \varphi\big(x(t),\varepsilon\big). \tag{2.9}$$

Достаточно показать, что (2.8), (2.9) имеет место при $t = t_0$. Полагая $t = t_0$ в (2.8), получим

$$x_0 = v_0 + \varepsilon\Psi(v_0, z_0, \varepsilon),$$
$$y_0 = z_0 + \varphi(x_0,\varepsilon)$$

и, следовательно, $z_0 = y_0 - \varphi(x_0,\varepsilon)$.

Для v_0 имеем уравнение

$$v_0 = x_0 - \varepsilon\Psi(v_0, z_0, \varepsilon), \tag{2.10}$$

которое имеет единственное решение для любого $x_0 \in \mathbb{R}^m$ и фиксированных значений z_0 и t_0, где

$$\|z_0\| = \|y_0 - \varphi(x_0,\varepsilon)\| \leqslant \rho_1$$

для некоторого ρ_1.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1 Любое решение $x = x(t,\varepsilon),\ y = y(t,\varepsilon)$ системы (2.1), (2.2) с начальным условием $x(t_0,\varepsilon) = x_0,\ y(t_0,\varepsilon) = y_0$ можно представить в форме (2.8).

Эта теорема означает, что система (2.1), (2.2) может быть приведена к виду (2.6), (2.7) при помощи расщепляющего преобразования (2.4), (2.5). Таким образом, преобразование (2.4), (2.5) осуществляет декомпозицию на две подсистемы, первая из которых независима и содержит малый параметр регулярным образом. Заметим, что начальное значение v_0 может быть найдено из (2.10) в виде асимптотического разложения

$$v_0 = v_{00} + \varepsilon v_{01} + \varepsilon^2 v_{02} + \ldots\ .$$

Например, $v_{00} = z_0,\ v_{01} = -\Psi(x_0, z_{00}, 0)$, где $z_{00} = y_0 - \varphi_0(x_0)$.

Важно отметить существование такого числа K, $K>1$, что справедливо неравенство

$$\|z(t,\varepsilon)\| \leqslant K\exp(-\gamma t/\varepsilon)\|z_0\|, \quad t\geqslant 0.$$

Это означает, что решение $x=x(t,\varepsilon)$, $y=y(t,\varepsilon)$ исходной системы (2.1), (2.2) с начальным условием $x(t_0,\varepsilon)=x_0$, $y(t_0,\varepsilon)=y_0$ представимо в виде

$$\begin{aligned} x(t,\varepsilon) &= v(t,\varepsilon)+\varepsilon\psi_1(t,\varepsilon),\\ y(t,\varepsilon) &= \varphi\big(v(t,\varepsilon),\varepsilon\big)+\psi_2(t,\varepsilon). \end{aligned}$$

Таким образом, это решение представимо в виде суммы решения, траектория которого принадлежит медленному инвариантному многообразию, т. е.

$$\begin{aligned} x(t,\varepsilon) &= v(t,\varepsilon),\\ y(t,\varepsilon) &= \varphi\big(v(t,\varepsilon),\varepsilon\big), \end{aligned}$$

и экспоненциально убывающей добавки

$$\varepsilon\psi_1=\varepsilon\Psi\big(v(t,\varepsilon),z(t,\varepsilon),\varepsilon\big),$$
$$\psi_2(t,\varepsilon)=z(t,\varepsilon)+\varphi\left(v(t,\varepsilon)+\varepsilon\Psi\big(v(t,\varepsilon),z(t,\varepsilon),\varepsilon\big),\varepsilon\right)-\varphi\big(v(t,\varepsilon),\varepsilon\big).$$

Пренебрегая членами порядка $o(\varepsilon)$, применим преобразование

$$\begin{aligned} x &= v+\varepsilon\Psi_0(v,z),\\ y &= z+\varphi_0(x)+\varepsilon\varphi_1(x), \end{aligned}$$

чтобы свести (2.1), (2.2) к нелинейной блочно-треугольной форме

$$\dot v=\xi_0(v)+\Xi_0(v)\varphi_0(v)+\varepsilon\Big[\xi_1(v)+\Xi_0(v,t)\varphi_1(x)+\Xi_1(v,t)\varphi_0(v)\Big]+O\left(\varepsilon^2\right),$$

$$\varepsilon\dot z=\left[\Theta_0(v)+\varepsilon\left(\Theta_1(v)-\frac{\partial\varphi_0}{\partial v}(v)\Xi_0(v)\right)\right]z+O\left(\varepsilon^2\|z\|\right).$$

3. Декомпозиция задачи о бегущих волнах

Предположим, что скорость бегущей волны является величиной порядка единицы, т. е. $c=O(1)$ при $\varepsilon\to 0$. Тогда можно переписать (1.2) в форме (2.1), (2.2) с

$$\xi=0,\quad \Xi=I,\quad \theta=-\Lambda^{-1}\Upsilon,\quad \Theta=-c\Lambda^{-1},$$

где I — единичная матрица.

Из этих формул и (2.3) следует

$$\dot v=\varphi_0(v)+\varepsilon\varphi_1(v)+O(\varepsilon^2), \tag{3.1}$$

где

$$\varphi_0=-\Theta^{-1}\theta=-c^{-1}\Upsilon(v)$$

и

$$\varphi_1=\Theta^{-1}\frac{\partial\varphi_0(v)}{\partial v}\varphi_0(v),$$

или

$$\varphi_1=-c^{-3}\Lambda\Upsilon_v(v)\Upsilon(v),$$

где $\Upsilon_v(v)=\dfrac{\partial\Upsilon(v)}{\partial v}$.

Таким образом, если мы найдем периодическое решение (3.1), то получим периодическую бегущую волну для исходной системы (1.1). Аналогичная ситуация имеет место для гомоклинических и гетероклинических траекторий системы (3.1).

Заметим, что уравнение для z принимает вид

$$\varepsilon\dot z=\left[-c\Lambda^{-1}+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\Upsilon(v)}{\partial v}\right]z+O(\varepsilon^2\|z\|).$$

4. Модель типа "реакция–диффузия"

Полагая $u = (u_1, u_2)$, рассмотрим систему, состоящую из двух уравнений параболического типа

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial \chi^2} + f(u),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{\kappa} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \chi^2} + g(u),$$

где

$$f = -u_1(1+u_2) + \frac{\alpha(\nu_0 + u_1^\gamma)}{1+u_1^\gamma},$$

$$g = u_1(\beta + u_2) - \delta u_2.$$

Если эту систему рассматривать как модель реакции типа Белоусова–Жаботинского, то u_1 и u_2 рассматриваются как безразмерные концентрации реагентов; α, β, γ, δ и ν_0 — безразмерные положительные параметры и при этом $\beta > 1$ и $\gamma > 1$ [8]. Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений (1.2) принимает вид

$$\varepsilon u_1'' = -cu_1' + u_1(1+u_2) - \frac{\alpha(\nu_0 + u_1^\gamma)}{1+u_1^\gamma}, \tag{4.1}$$

$$\frac{\varepsilon}{\kappa} u_2'' = -cu_2' - u_1(\beta + u_2) + \delta u_2. \tag{4.2}$$

При $\varepsilon = 0$ получаем вырожденную систему

$$\begin{aligned} 0 &= -cu_1' + u_1(1+u_2) - \frac{\alpha(\nu_0 + u_1^\gamma)}{1+u_1^\gamma}, \\ 0 &= -cu_2' - u_1(\beta + u_2) + \delta u_2. \end{aligned} \tag{4.3}$$

В этом случае имеем

$$x = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$y = \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\kappa \end{pmatrix},$$

$$\Upsilon = \begin{pmatrix} -u_1(1+u_2) + \dfrac{\alpha(\nu_0 + u_1^\gamma)}{1+u_1^\gamma} \\ u_1(\beta + u_2) - \delta u_2 \end{pmatrix},$$

$$\theta = \begin{pmatrix} u_1(1+u_2) - \dfrac{\alpha(\nu_0 + u_1^\gamma)}{1+u_1^\gamma} \\ \kappa[-u_1(\beta + u_2) + \delta u_2] \end{pmatrix},$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & -c\kappa \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\varphi_0 = -\Theta^{-1}\theta = -\frac{1}{c}\Upsilon(v) = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} v_1(1+v_2) - \dfrac{\alpha(\nu_0 + v_1^\gamma)}{1+v_1^\gamma} \\ -v_1(\beta + v_2) + \delta v_2 \end{pmatrix},$$

и

$$\varphi_1 = \Theta^{-1} \frac{\partial \varphi_0(v)}{\partial v} \varphi_0(v) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(v) \\ \varphi_{12}(v) \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\Theta^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{c} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{c\kappa} \end{pmatrix},$$

и

$$\frac{\partial \varphi_0(v)}{\partial v} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} 1+v_2-\dfrac{\alpha\gamma v_1^{\gamma-1}(1-\nu_0)}{(1+v_1^{\gamma})^2} & v_1 \\ -\beta - v_2 & \delta - v_1 \end{pmatrix}.$$

В результате система (4.1), (4.2) сводится к независимой подсистеме на медленном инвариантном многообразии

$$\begin{aligned}
\frac{dv_1}{d\zeta} &= -\frac{\alpha(\nu_0+v_1^{\gamma})}{c(1+v_1^{\gamma})} + \frac{1}{c}v_1(1+v_2) - \\
&\quad -\frac{\varepsilon}{c^3}\left[\left(\frac{\alpha\gamma v_1^{\gamma-1}(1-\nu_0)}{(1+v_1^{\gamma})^2} - 1 - v_2\right)\left(\frac{\alpha(\nu_0+v_1^{\gamma})}{1+v_1^{\gamma}} - v_1(1+v_2)\right) - v_1^2(\beta+v_2) + \delta v_1 v_2\right] + O\left(\varepsilon^2\right), \\
\frac{dv_2}{d\zeta} &= -\frac{1}{c}v_1(\beta+v_2) + \frac{\delta}{c}v_2 - \\
&\quad -\frac{\varepsilon}{c^3 k}\left[(\beta+v_2)\left(\frac{\alpha(\nu_0+v_1^{\gamma})}{1+v_1^{\gamma}} - v_1(1+v_2)\right) + (v_1-\delta)\big(v_1(\beta+v_2)-\delta v_1\big)\right] + O\left(\varepsilon^2\right)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

и подсистеме для быстрых переменных z_1 и z_2

$$\begin{aligned}
\varepsilon z_1' &= -cz_1 + \frac{\varepsilon}{c}\left[\left(\frac{\alpha\gamma v_1^{\gamma-1}(1-\nu_0)}{(1+v_1^{\gamma})^2} - 1 - v_2\right)z_1 - v_1 z_2\right] + O\left(\varepsilon^2\|z\|\right), \\
\varepsilon z_2' &= -c\kappa z_2 + \frac{\varepsilon}{c}\left[(\beta+v_2)z_1 + (v_1-\delta)z_2\right] + O\left(\varepsilon^2\|z\|\right).
\end{aligned}$$

Подсистема (4.4) не содержит сингулярных возмущений, и ее порядок вдвое меньше по сравнению с (4.1), (4.2), что существенно упрощает анализ.

Заметим, что особые точки исходной системы обыкновенных дифференциальных уравнений определяются равенствами $u_1' = 0$, $u_2' = 0$ и $f(u_1,u_2) = 0$, $g(u_1,u_2) = 0$, в то время как для определения особых точек на медленном инвариантном многообразии достаточно рассматривать только два уравнения, т. е.

$$f(u_1,u_2) = 0, \quad g(u_1,u_2) = 0.$$

В качестве примера рассмотрим случай следующих численных значений параметров: $\alpha = 12$, $\beta = 1.5$, $\gamma = 3$, $\delta = 1.7$ и $\nu_0 = 0.01$. В этом случае система (4.3) имеет три особые точки: неустойчивый узел P_1, седло P_2 и неустойчивый фокус P_3 (рис. 4.1). Заметим, что эти особые точки являются проекциями особых точек $\tilde{P}_1$, $\tilde{P}_2$ и $\tilde{P}_3$ полной системы (4.1), (4.2) на медленную поверхность.

Анализ системы (4.3) дает наличие гетероклинической траектории, соединяющей особые точки P_1 и P_2 (рис. 4.2). Более того, система (4.1), (4.2) имеет решение, стремящееся к неустойчивой особой точке $\tilde{P}_1$ при $\zeta \to -\infty$ и к $\tilde{P}_2$ при $\zeta \to +\infty$. Это решение определяет профиль бегущей волны системы параболических уравнений, распространяющейся с постоянной скоростью $c > 0$.

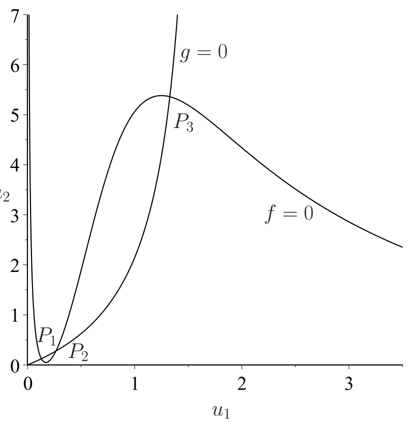

Рис. 4.1. Нуль-кривые и особые точки системы (4.3)
Fig. 4.1. Zero-curves and singular points of the system (4.3)

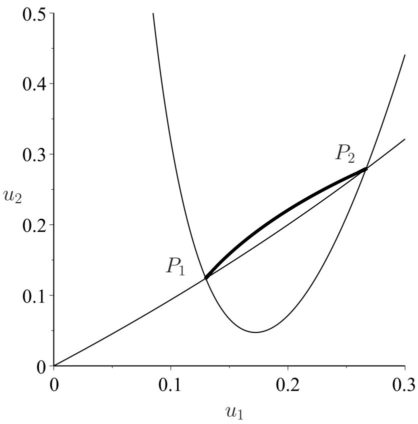

Рис. 4.2. P_1–P_2 гетероклиническая траектория системы (4.3)
Fig. 4.2. P_1–P_2 heteroclinic trajectory of the system (4.3)

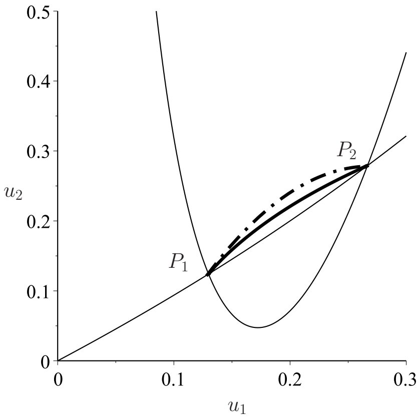

Рис. 4.3. Гетероклиническая траектории системы (4.3) (сплошная линия) и (v_1, v_2)-проекция соответствующей гетероклинической траектории системы (4.1), (4.2) (штрих-пунктирная линия)
Fig. 4.3. Heteroclinical trajectory of the system (4.3) (solid line) and (v_1, v_2)-projection of the appropriate heteroclinic trajectory of the system (4.1), (4.2) (dashed-dotted line)

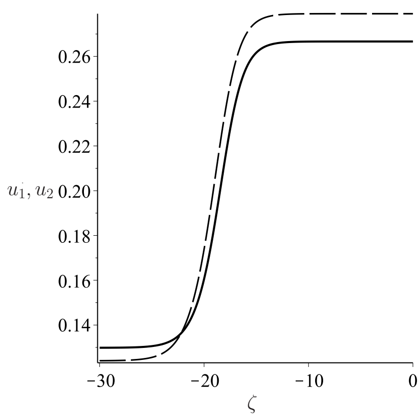

Рис. 4.4. Графики функций $u_1 = u_1(\zeta)$ (сплошная линия) и $u_2 = u_2(\zeta)$ (пунктирная линия) для $\tilde{P}_1$–$\tilde{P}_2$ гетероклинической траектории системы (4.1), (4.2)
Fig. 4.4. The graphs of the functions $u_1 = u_1(\zeta)$ (solid line) and $u_2 = u_2(\zeta)$ (dashed line) for $\tilde{P}_1$–$\tilde{P}_2$ heteroclinical trajectory of the system (4.1), (4.2)

Рисунок 4.3 демонстрирует гетероклиническую траекторию системы (4.3) (сплошная линия) вместе с (v_1, v_2)-проекцией соответствующей траектории системы (4.1), (4.2) (пунктирная линия). Эти линии близки друг к другу, это означает, что редуцированная система наследует существенные черты поведения исходной системы. Следует отметить, что соответствующие гетероклинические траектории систем (4.3) и (4.4) практически совпадают [9].

На рис. 4.4 приводятся графики функций $u_1 = u_1(\zeta)$ и $u_2 = u_2(\zeta)$ для $\tilde{P}_1 - \tilde{P}_2$ гетероклинической траектории системы (4.1), (4.2).

Понятно, что изменение значений параметров может приводить не только к бифуркации состояний равновесия, но и к бифуркациям решений типа бегущих волн. При этом наиболее интересны бифуркации, при которых возникают траектории-утки как периодические, так и гетероклинические или гомоклинические траектории-утки. Такие траектории соответствуют так называемым критическим бегущим волнам [10–12]. Интересные примеры бегущих волн, соответствующих траекториям-уткам, можно найти в работах и других авторов, см., например, [13; 14].

Литература

[1] Murray J.D. Mathematical Biology (3rd Ed). New York, 2003. Vol. I (An Introduction). URL: https://booksee.org/book/1008392.

[2] Murray J.D. Mathematical Biology (3rd Ed). New York, 2003. Volume II (Spatial Models and Biomedical Applications). URL: http://pcleon.if.ufrgs.br/pub/listas-sistdin/MurrayII.pdf.

[3] Volpert A. I., Volpert Vitaly A., Volpert Vladimir A. Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems. Providence: AMS, 1994. 453 p. URL: https://box.cs.istu.ru/public/docs/other/_Unsorted/new/books.pdox.net/Math/Traveling%20Wave%20Solutions%20of%20Parabolic%20Systems.pdf.

[4] Smoller J. Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. New York: Springer Verlag, 1983. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4684-0152-3.

[5] Sobolev V.A. Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed systems // System and Control Letters. 1984. Vol. 5. P. 169–179. DOI: https://doi.org/10.1016/S0167-6911(84)80099-7.

[6] Sobolev V.A. Efficient decomposition of singularly perturbed systems // Math. Model. Nat. Phenom. 2019. Vol. 14. № 4. P. 1–18. DOI: https://doi.org/10.1051/mmnp/2019012.

[7] Shchepakina E., Sobolev V., Mortell M.P. Singular Perturbations. Introduction to system order reduction methods with applications // Lecture Notes in Mathematics, Berlin–Heidelber–London: Springer, 2014. Vol. 2114.

[8] Sevčikova H., Kubiček M., Marek M. 1984 Concentration waves — effects of an electric field // Mathematical Modelling in Science and Technology, ed. X.J.R. Avula, R.E. Kalman, A.I. Liapis and E.Y. Rodin. New York: Pergamon Press, 1984. P. 477–482. DOI: http://doi.org/10.1016/B978-0-08-030156-3.50091-6.

[9] Shchepakina E., Tropkina E. Order reduction for problems with traveling wave solutions to reaction-diffusion systems // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1745. Issue 1. 012109. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1745/1/012109.

[10] Schneider K., Shchepakina E., Sobolev V. New type of travelling wave solutions // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2003. Vol. 26. Issue 16. P. 1349–1361. DOI: http://doi.org/10.1002/mma.404.

[11] Соболев В.А., Шнайдер К., Щепакина Е.А. Три вида волн неадиабатического горения в случае автокаталитической реакции // Химическая физика. 2005. Т. 24. № 6. С. 63–69. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=9148658. EDN: https://elibrary.ru/hsffep.

[12] Соболев В.А., Щепакина Е.А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике. Москва: Физматлит, 2010. 320 с. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=21326259. EDN: https://elibrary.ru/ryrtfh.

[13] Härterich J. Viscous Profiles of Traveling Waves in Scalar Balance Laws: The Canard Case // Methods and Applications of Analysis. 2003. Vol. 10. P. 97–118. URL: https://www.intlpress.com/site/pub/files/_fulltext/journals/maa/2003/0010/0001/MAA-2003-0010-0001-a006.pdf.

[14] Buřič L., Klíč A., Purmová L. Canard solutions and travelling waves in the spruce budworm population model // Applied Mathematics and Computation. 2006. Vol. 183. P. 1039–1051. DOI: http://doi.org/10.1016/j.amc.2006.05.115.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-3-22-30

Submited: 02.09.2021
Revised: 09.10.2021
Accepted: 15.11.2021

V.A. Sobolev
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: v.sobolev@ssau.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7327-7340
E.A. Tropkina
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: elena_a.85@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5970-6740
E.A. Shchepakina
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: shchepakina@yahoo.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5697-4611
L. Zhang
Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong, China
E-mail: li-jun0608@163.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5697-4611

DECOMPOSITION OF TRAVELING WAVES PROBLEMS

ABSTRACT

In the article, the traveling waves problem for singularly perturbed systems of semilinear parabolic equations is considered. An effective method for the order reduction of singularly perturbed systems is proposed. The obtained mathematical results are used to study traveling waves both for abstract partial differential equations and for a specific model that can arise in physics problems, chemistry, and biology.

Key words: singular perturbations; slow invariant manifolds; critical travelling waves; singular perturbations; integral manifold; order reduction; asymptotic expansion; differential equations; fast variables; slow variables.

Citation. Sobolev V.A., Tropkina E.A., Shchepakina E.A., Zhang L. Decomposition of traveling waves problems. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 22–30. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-22-30. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

Vladimir A. Sobolev — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, professor of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Elena A. Tropkina — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Elena A. Shchepakina — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, head of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Lijun Zhang — professor, Shandong University of Science and Technology, 579, Quinwangang Road, Huangdao District, Qingdao, Shandong Province, 266590, P.R. China.

References

[1] Murray J.D. Mathematical Biology (3rd Ed). New York, 2003, Vol. I (An Introduction). Available at: https://booksee.org/book/1008392.

[2] Murray J.D. Mathematical Biology (3rd Ed). New York, 2003, Vol. II (Spatial Models and Biomedical Applications). Available at: http://pcleon.if.ufrgs.br/pub/listas-sistdin/MurrayII.pdf.

[3] Volpert A.I., Volpert Vitaly A., Volpert Vladimir A. Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems. Providence: AMS, 1994. Available at: https://box.cs.istu.ru/public/docs/other/_Unsorted/new/books.pdox.net/Math/Traveling%20Wave%20Solutions%20of%20Parabolic%20Systems.pdf.

[4] Smoller J. Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. New York: Springer Verlag, 1983. DOI: http://doi.org/10.1007/978-1-4612-0873-0.

[5] Sobolev V.A. Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed systems. *System and Control Letters*, 1984, Vol. 5, pp. 169–179. DOI: http://doi.org/10.1016/S0167-6911(84)80099-7.

[6] Sobolev V.A. Efficient decomposition of singularly perturbed systems. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 2019, vol. 14, no. 4, pp. 1–18. DOI: http://doi.org/10.1051/mmnp/2019023.

[7] Shchepakina E., Sobolev V., Mortell M.P. Singular Perturbations. Introduction to system order reduction methods with applications. *Lecture Notes in Mathematics*. Berlin–Heidelber–London: Springer, 2014, vol. 2114.

[8] Sevčikova H., Kubiček M., Marek M. Concentration waves — effects of an electric field. In: *Avula X.J.R., Kalman R.E., Liapis A.I., Rodin E.Y. (Eds.) Mathematical Modelling in Science and Technology*. New York: Pergamon Press, 1984, pp. 477–482. DOI: http://doi.org/10.1016/B978-0-08-030156-3.50091-6.

[9] Shchepakina E., Tropkina E. Order reduction for problems with traveling wave solutions to reaction-diffusion systems. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 1745, Issue 1, 012109. DOI: http://doi.org/10.1088/1742-6596/1745/1/012109.

[10] Schneider K., Shchepakina E., Sobolev V. New type of travelling wave solutions. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2003, vol. 26, issue 16, pp. 1349–1361. DOI: http://doi.org/10.1002/mma.404.

[11] Sobolev V., Schneider K., Shchepakina E. Three types of non-adiabatic combustion waves in the case of autocatalytic reaction. *Russian Journal of Physical Chemistry B: Focus on Physics*, 2005, vol. 24, no. 6, pp. 63–69. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=9148658. EDN: https://elibrary.ru/hsffep (in Russian)

[12] Sobolev V.A., Shchepakina E.A. Model reduction and critical phenomena in macrokinetics. Moscow: Fizmatlit, 2010, 320 p. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=21326259. EDN: https://elibrary.ru/ryrtfh (in Russian)

[13] Härterich J. Viscous Profiles of Traveling Waves in Scalar Balance Laws: The Canard Case. *Methods and Applications of Analysis*, 2003, vol. 10, pp. 97–118. Available at: https://www.intlpress.com/site/pub/files/_fulltext/journals/maa/2003/0010/0001/MAA-2003-0010-0001-a006.pdf.

[14] Buřič L., Klíč A., Purmová L. Canard solutions and travelling waves in the spruce budworm population model. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, vol. 183, pp. 1039–1051. DOI: http://doi.org/10.1016/j.amc.2006.05.115.