 Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-3-14-21

УДК 517.956

Дата: поступления статьи: 02.09.2021
после рецензирования: 07.10.2021
принятия статьи: 15.11.2021

А.В. Гилев
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: toshqaaa@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6747-5826
О.М. Кечина
Самарский государственный социально-педагогический университет, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: omka-83@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5560-8521
Л.С. Пулькина
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: louise@samdiff.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7947-6121

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ДОМИНИРУЮЩЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

АННОТАЦИЯ

В статье рассмотрена задача Гурса для уравнения с доминирующей смешанной производной четвертого порядка и доказана ее однозначная разрешимость. Рассматриваемое уравнение можно интерпретировать как обобщенное уравнение Буссинеска — Лява, которое возникает при описании продольных волн в стержне с учетом поперечных деформаций. Для обоснования разрешимости предложен метод, который основан на возможности сведения поставленной задачи к двум задачам Гурса для уравнений второго порядка. Одна из задач является классической задачей Гурса для простейшего гиперболического уравнения, другое же уравнение оказывается нагруженным, и исследование задачи Гурса для него представляет собой основной результат работы.

Ключевые слова: уравнение Буссинеска — Лява; система двух задач; задача Гурса; уравнение с доминирующей производной; нагруженное уравнение; метод последовательных приближений; существование решения; единственность решения.

Цитирование. Гилев А.В., Кечина О.М., Пулькина Л.С. Характеристическая задача для уравнения четвертого порядка с доминирующей производной // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2021. Т. 27, № 3. С. 14–21. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-14-21.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Антон Владимирович Гилев — аспирант кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Ольга Михайловна Кечина — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики, математики и методики обучения, Самарский государственный социально-педагогический университет, 443090, Российская Федерация, г. Самара, М. Горького, 65/67.

Людмила Степановна Пулькина — доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

1. Предварительные сведения

В статье рассматривается характеристическая задача для уравнения четвертого порядка с доминирующей смешанной производной

$$u_{xxyy}(x,y) + (A(x,y)u_x(x,y))_x + (B(x,y)u_y(x,y))_y + C(x,y)u(x,y) = f(x,y),$$

которое можно рассматривать как частный случай уравнения Л. Бианки [1], но мы ограничимся интерпретацией его как обобщения уравнения Буссинеска — Лява [2]

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - u_{xxtt}(x,t) = f(x,t),$$

которое встречается при изучении продольных колебаний стержня с учетом эффектов поперечной инерции. В литературе уравнение Буссинеска — Лява часто встречается под названием псевдогиперболического уравнения, а также уравнения Соболевского типа. Краевые, начальные, а также нелокальные задачи для этого уравнения активно изучаются, имеется много публикаций, содержащих интересные результаты о разрешимости краевых, нелокальных и обратных задач для уравнения Буссинеска — Лява и его обобщений. Отметим лишь некоторые из них [3–10] и обратим внимание на списки литературы в них.

Обратив внимание на то, что уравнение Буссинеска — Лява можно интерпретировать и как уравнение с доминирующей смешанной производной, естественно рассмотреть для него задачи с условиями на характеристиках. Такие задачи для уравнений с доминирующей производной порядка выше второго изучены в работах [11–16]. В большинстве этих работ доказательства разрешимости базируются на построении функции Римана. Мы предлагаем другой метод, который основан на сведении поставленной характеристической задачи для уравнения четвертого порядка к двум задачам Гурса для уравнений второго порядка. Одна из них оказывается классической задачей для простейшего гиперболического уравнения, тогда как вторая — задачей Гурса для нагруженного гиперболического уравнения. Хорошо известна статья А.М. Нахушева, посвященная исследованию задачи Гурса для нагруженного уравнения [17], однако отличия в постановке нашей задачи от рассмотренной в упомянутой статье не позволяют сделать прямую ссылку на нее. Учитывая также нежелание строить функцию Римана, мы предлагаем другой способ доказательства разрешимости задачи. Отметим, что характеристические задачи для нагруженного уравнения тесно связаны с нелокальными аналогами задачи Гурса [18; 19].

2. Постановка задачи

Рассмотрим в области $\Omega = (0,a)\times(0,b)$ уравнение

$$u_{xxyy}(x,y) + (A(x,y)u_x(x,y))_x + (B(x,y)u_y(x,y))_y + C(x,y)u(x,y) = F(x,y) \tag{2.1}$$

и поставим следующую задачу: найти в области Ω решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_y(x,0) = \psi(x), \tag{2.2}$$

$$u(0,y) = \mu(y), \quad u_x(0,y) = \nu(y). \tag{2.3}$$

Под решением задачи будем понимать функцию $u \in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar\Omega)$ и имеющую непрерывную в Ω смешанную производную u_{xxyy}. В следующем разделе мы докажем, что при выполнении ряда условий на входные данные существует единственное решение поставленной задачи.

3. Разрешимость задачи

Теорема. Если

$$A, B \in C^1(\bar\Omega), \;\; C, F \in C(\bar\Omega)$$

$$\varphi, \psi \in C^1[o,a], \mu, \nu \in C^1[0,b],$$

и выполняются условия согласования

$$\varphi(0) = \mu(0), \psi(0) = \nu(0), \varphi'(0) = \nu(0), \mu'(0) = \psi(0),$$

то существует единственное решение задачи (2.1) – (2.3).

Доказательство теоремы опирается на следующее утверждение.

Лемма 1. Задача (2.1) – (2.3) эквивалентна системе двух задач, которые будем называть $G1$ и $G2$, для уравнений второго порядка.

Задача $G1$. Найти в Ω решение уравнения

$$v_{xy} = F(x,t), \tag{3.1}$$

удовлетворяющее условиям

$$v(x,0) = p(x), \quad v(0,y) = h(y), \tag{3.2}$$

где

$$p(x) = \psi'(x) + \int_0^x B(\xi,0)\psi(\xi)d\xi, \quad h(y) = \nu'(y) + \int_0^y A(0,\eta)\nu(\eta)d\eta. \tag{3.3}$$

Задача $G2$. Найти в Ω решение уравнения

$$u_{xy} + \int_0^y Au_x d\eta + \int_0^x Bu_y d\xi + \int_0^y\int_0^x Cud\xi d\eta = v(x,y), \tag{3.4}$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u(0,y) = \mu(y). \tag{3.5}$$

Доказательство леммы 1. Пусть $u(x,y)$ — решение задачи (2.1) – (2.3). Равенство (2.1) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\Big(u_{xy} + \int_0^y Au_x d\eta + \int_0^x Bu_y d\xi + \int_0^y\int_0^x Cud\xi d\eta\Big) = F(x,y). \tag{3.6}$$

Введем функцию

$$v(x,y) = u_{xy} + \int_0^y Au_x d\eta + \int_0^x Bu_y d\xi + \int_0^y\int_0^x Cud\xi d\eta. \tag{3.7}$$

Тогда из (3.6) $v_{xy} = F(x,y)$. Из (3.7) и условий $u_y(x,0) = \psi(x)$, $u_x(0,y) = \nu(y)$, которые выполняются в силу нашего предположения, легко получаем условия (3.2). Рассматривая (3.7) как уравнение второго порядка относительно $u(x,y)$ с правой частью $v(x,y)$, легко убеждаемся в том, что решение уравнения (3.4), которое совпадает с (3.7), удовлетворяет условиям (3.5), т. е. является решением задачи $G2$.

Пусть теперь $u(x,y), v(x,y)$ являются решениями задач $G2$ и $G1$ соответственно. Тогда $u(x,t)$ — решение (2.1). Покажем, что выполняются и условия (2.2)−(2.3). Очевидно, что $u(x,0) = \varphi(x)$, $u(0,y) = \mu(y)$, так как $u(x,t)$ —решение задачи $G2$. Положим в (3.7) $x = 0$. Учитывая введенные обозначения, получим

$$v(0,y) = h(y) = u_{xy}(0,y) + \int_0^y A(0,\eta)u_x(0,\eta)d\eta.$$

Из (2.3) следует

$$u_{xy}(0,y) + \int_0^y A(0,\eta)u_x(0,\eta)d\eta = \nu'(y) + \int_0^y A(0,\eta)\nu(\eta)d\eta.$$

Это равенство проинтегрируем по y и после несложных преобразований получим

$$u_x(0,y) - u_x(0,0) + \int_0^y (y-\eta)A(0,\eta)u_x(0,\eta)d\eta = \nu(y) - \nu(0) + \int_0^y (y-\eta)A(0,\eta)\nu(\eta)d\eta.$$

Так как $u_x(0,0) = \nu(0)$, то

$$u_x(0,y) + \int_0^y (y-\eta)A(0,\eta)u_x(0,\eta)d\eta = \nu(y) + \int_0^y (y-\eta)A(0,\eta)\nu(\eta)d\eta.$$

Последнее равенство можно рассматривать как интегральное уравнение Вольтерра с ограниченным ядром, которое, как известно, имеет единственное решение. Но как нетрудно видеть, $u_x(0,y) = \nu(y)$ удовлетворяет этому уравнению. Стало быть, это и есть единственное решение интегрального уравнения, а это означает, что выполняется второе из условий (2.3). Выполнение второго из условий (2.2) доказывается совершенно аналогично.

Лемма доказана.

Теперь можно приступить к доказательству теоремы. В силу леммы 1 для обоснования разрешимости задачи (2.1) – (2.3) достаточно доказать разрешимость задач $G1$ и $G2$.

Разрешимость $G1$. Обоснование разрешимости задачи $G1$ не вызывает затруднений, так как это классическая задача Гурса для простейшего гиперболического уравнения, поэтому сразу выпишем ее единственное решение

$$v(x,y) = p(x) + h(y) - h(0) + \int_0^y\int_0^x F(\xi,\eta)d\xi d\eta.$$

В терминах задачи (2.1) – (2.3) формула принимает вид

$$v(x,y) = \psi'(x) + \nu'(y) - \nu'(0) + \int_0^y A(0,\eta)\nu(\eta)d\eta +$$

$$+\int_0^x B(\xi,0)\psi(\xi)d\xi+\int_0^y\int_0^x F(\xi,\eta)d\xi d\eta. \tag{3.8}$$

Разрешимость $G2$. Уравнение (3.4) нагруженное, и мы не можем сделать прямую ссылку, например [20], на результат о разрешимости задачи Гурса для него. Не можем также использовать результаты статьи [17], так как в этой статье рассматривается нагруженное уравнение другой структуры. Не воспользуемся мы и методом, изложенным в ней. Нам удалось реализовать идею доказательства разрешимости классической задачи Гурса [20] для случая нагруженного уравнения, получив нужные оценки.

Пусть $u(x,y)$ — решение задачи $G2$. Введем новые функции, положив в равенстве (3.4) $u_x=V,\ u_y= W$. Тогда $V_y=u_{xy},\ W_x=u_{xy}$, следовательно, справедливы равенства

$$V_y(x,y)=v(x,y)-\int_0^y AVd\eta-\int_0^x BWd\xi-\int_0^y\int_0^x Cud\xi d\eta,$$

$$W_x(x,y)=v(x,y)-\int_0^y AVd\eta-\int_0^x BWd\xi-\int_0^y\int_0^x Cud\xi d\eta,$$

$$u_y(x,y)=W(x,y).$$

Интегрируя каждое из этих равенств по соответствующей переменной и учитывая, что из (3.5) следует $W(0,y)=\mu'(y),\ V(x,0)=\varphi'(x)$, получим

$$\begin{array}{l} V(x,t)=\varphi'(x)+\int_0^y[v-\int_0^\eta AVd\eta'-\int_0^x BWd\xi-\int_0^\eta\int_0^x Cud\xi d\eta']d\eta,\\ W(x,y)=\mu'(y)+\int_0^x[v-\int_0^\eta AVd\eta'-\int_0^x BWd\xi-\int_0^\eta\int_0^x Cud\xi d\eta']d\xi,\\ u(x,y)=\varphi(x)+\int_0^y Wd\eta. \end{array} \tag{3.9}$$

Таким образом, если $u(x,y)$ — решение задачи $G2$, то тройка функций u,V,W — решение системы (3.9).

Пусть теперь известно, что u,V,W — решение системы (3.9). Из последнего равенства (3.9), учитывая условия согласования, получаем

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u(0,y)=\varphi(0)+\int_0^y W(0,\eta)d\eta=\varphi(0)+\int_0^y\mu'(\eta)d\eta=\mu(y),$$

и условия (3.5) выполнены. Дифференцируя последнее равенство (3.9) по y, получим $u_y=W(x,y)$, а дифференцируя теперь по x, приходим к равенству

$$u_{xy}=W_x=v-\int_0^y AVd\eta-\int_0^x Bu_yd\xi-\int_0^y\int_0^x Cud\xi d\eta.$$

Дифференцируем последнее равенство (3.9) по x, а затем, учитывая результат дифференцирования второго из равенств (3.9) по x и первого по y, получим

$$u_x=\varphi'(x)+\int_0^y W_x(x,\eta)d\eta=\varphi'(x)+\int_0^y V_\eta d\eta=\varphi'(x)+V(x,y)-V(x,0).$$

Так как $V(x,0)=\varphi'(x)$, что видно из первого равенства (3.9), то $u_x=V$. Но тогда

$$u_{xy}=v(x,y)-\int_0^y AVd\eta-\int_0^x Bu_yd\xi-\int_0^y\int_0^x Cud\xi d\eta,$$

а это означает, что $u(x,y)$ удовлетворяет и уравнению (3.4), следовательно, является решением задачи $G2$.

Результаты проведенных рассуждений сформулируем в виде леммы.

Лемма 2. Если выполнены условия теоремы, то задача $G2$ эквивалентна системе интегральных уравнений (3.9).

Таким образом, для доказательства разрешимости задачи $G2$ достаточно убедиться в существовании единственного решения системы (3.9), к чему мы и переходим.

Считая $V_0=\varphi'(x),\ W_0=\mu'(y)\ u_0=\varphi(x)$, будем искать приближенное решение системы (3.9) в виде

$$\begin{array}{l} V_n(x,t)=\varphi'(x)+\int_0^y[v-\int_0^\eta AV_{n-1}d\eta'-\int_0^x BW_{n-1}d\xi-\int_0^\eta\int_0^x Cu_{n-1}d\xi d\eta']d\eta,\\ W_n(x,y)=\mu'(y)+\int_0^x[v-\int_0^\eta AV_{n-1}d\eta'-\int_0^x BW_{n-1}d\xi-\int_0^\eta\int_0^x Cu_{n-1}d\xi d\eta']d\xi,\\ u_n(x,y)=\varphi(x)+\int_0^y W_{n-1}d\eta. \end{array} \tag{3.10}$$

Условия теоремы гарантируют существование числа $L>0$ такого, что

$$|v|+\int_0^y|A||\varphi'|d\eta+\int_0^x|B||\mu'|d\xi+\int_0^y\int_0^x|C||u|d\xi d\eta\leqslant L.$$

Тогда $|V_1-V_0| \leqslant bL$, $|W_1-W_0| \leqslant aL$, $|u_1-u_0| \leqslant bL$. Обозначим $q=\max\{a,b\}$. Пусть $|A|+|B|+q|C| \leqslant K$, где $K>0$, и такое число найдется в силу условий теоремы. Покажем, что справедливы оценки

$$\begin{aligned} &|V_n-V_{n-1}| \leqslant LK^{n-1}\tfrac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!},\\ &|W_n-W_{n-1}| \leqslant LK^{n-1}\tfrac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!},\\ &|u_n-u_{n-1}| \leqslant LK^{n-1}\tfrac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Очевидно, оценки верны для $n=1$. Непосредственными вычислениями нетрудно убедиться, что оценки верны и для $n+1$. Полученные оценки гарантируют абсолютную и равномерную сходимость рядов

$$u_0+\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n-1}),\ \ V_0+\sum_{n=1}^{\infty}(V_n-V_{n-1}),\ \ W_0+\sum_{n=1}^{\infty}(W_n-W_{n-1}), \tag{3.12}$$

так они мажорируются равномерно и абсолютно сходящимся к функции $L+Le^{K(x+y)}$ рядом

$$L+L\sum_{n=1}^{\infty}K^{n-1}\frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Следовательно, последовательности u_n, V_n, W_n, являясь последовательностями частичных сумм рядов (3.12), равномерно стремятся к пределам u, V, W. Переходя к пределу в (3.10), убеждаемся в том, что (u,V,W) — решение системы (3.9), причем единственное, что следует из оценок (3.11), а это и означает, что $u(x,t)$ — решение задачи $G2$, что гарантирует лемма 2. Теперь благодаря лемме 1 можем утверждать, что $u(x,t)$ является решением поставленной задачи (2.1) – (2.3).

Литература

[1] Bianchi L. Sulla estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari alle derivate parziali d'ordine superiore // Atti R. Accad. Lincei. Rend. Cl.Sc. fis.,mat. e natur. 1895. V. 4. P. 89–99, 133–142.

[2] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. Москва: Мир, 1977. 622 с. URL: https://www.nehudlit.ru/books/detail5807.html.

[3] Корпусов М.О. Разрушение в неклассических волновых уравнениях. Москва: URSS, 2010. 237 с. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=19461607. EDN: https://www.elibrary.ru/qjwvpl.

[4] Кожанов А.И. Начально-краевая задача для уравнений типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником // Матем. заметки. 1999. Т. 65. № 1. С. 70–75. DOI: http://doi.org/10.4213/mzm1029.

[5] Pulkina L.S., Beylin A.B. Nonlocal approach to problems on longitudinal vibration in a short bar // Electronic Journal of Differential Equations. 2019. Vol. 2019. №. 29. P. 1–9. URL: https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2019/29/pulkina.pdf.

[6] Юлдашев Т.К. Об одной краевой задаче для трехмерного аналога дифференциального уравнения Буссинеска // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер.: Физ.-матем. науки. 2016. Т. 158. № 3. С. 424–433. URL: https://kpfu.ru/portal/docs/F749645498/158_3_phys_mat_8.pdf.

[7] Намсараева Г.В. Линейные обратные задачи для некоторых аналогов уравнения Буссинеска // Математические заметки СВФУ. 2014. Т. 21. № 2. С. 47–59. URL: https://www.s-vfu.ru/universitet/rukovodstvo-i-struktura/instituty/niim/mzsvfu/issues/2014-2/47-59.pdf.

[8] Mehraliyev Y.T. On solvability of an inverse boundary problem for the Boussinesq-Love equation // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2013. V. 6(4). P. 485–494. URL: http://elib.sfu-kras.ru/bitstream/handle/2311/10080/

[9] Pul'kina L.S. A problem with dynamic nonlocal condition for pseudohyperbolic equation // Russian Mathematics. 2016. V. 60(9). P. 38–45. DOI: http://doi.org/10.3103/S1066369X16090048.

[10] Бейлин А.Б., Пулькина Л.С. Задача с нелокальным динамическим условием для уравнения колебаний толстого стержня // Вестник Самарского ун-та. Естественнонаучн. сер. 2017. Т. 23. № 4. С. 7–18. URL: DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2017-23-4-7-18.

[11] Жегалов В.И. Об одной задаче для обобщенного уравнения Буссинеска — Лява // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2019. Т. 23. № 4. С. 771–776. DOI: http://doi.org/10.14498/vsgtu1720. EDN: https://www.elibrary.ru/xieeia.

[12] Аттаев А.Х. Характеристическая задача для нагруженного вдоль одной из своих характеристик гиперболического уравнения второго порядка // Вестник КРАУНЦ. Сер.: Физ.-мат. науки. 2018. № 3 (23). С. 14–18. DOI: http://doi.org/10.18454/2079-6641-2018-23-3-14-18

[13] Андреев А.А., Яковлева Ю.О. Задача типа Гурса для гиперболического уравнения и для одной системы гиперболических уравнений третьего порядка // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2019. Т. 23. № 1. С. 186–194. DOI: http://doi.org/10.14498/vsgtu1666.

[14] Миронов А.Н., Миронова Л.Б., Яковлева Ю.О. Метод Римана для уравнений с доминирующей частной производной (обзор) // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2021. Т. 25. № 2. С. 207–240. DOI: http://doi.org/10.14498/vsgtu1853.

[15] Midodashvili B. A nonlocal problem for fourth order hyperbolic equations with multiple characteristics // Electronic Journal of Differential Equations. 2002. Vol. 2002, no. 85, pp. 1–7. URL: https://emis.univie.ac.at//journals/EJDE/Volumes/2002/85/midodashvili.pdf.

[16] Жегалов В.И., Уткина Е.А., Шакирова И.М. Об условиях разрешимости задачи Гурса для обобщенного уравнения Аллера // Изв. вузов. Сер.: Матем. 2018. № 8. С. 21–26. URL: http://mi.mathnet.ru/ivm9383.

[17] Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. Москва: Наука, 2006. 287 с. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17962288. EDN: https://www.elibrary.ru/pdbuih.

[18] Кечина О.М. О разрешимости нелокальной задачи для уравнения третьего порядка // Вестник Самарского ун-та. Естественнонаучн. сер. 2017. Т. 23. № 1. С. 15–20. URL: https://journals.ssau.ru/est/article/view/5142.

[19] Гилев А.В. Об одной нелокальной задаче для гиперболического уравнения с доминирующей смешанной производной // Вестник Самарского ун-та. Естественнонаучн. сер. 2020. Т. 26. № 4. С. 25–35. URL: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-4-25-35.

[20] Соболев С.Л. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1966. 444 с. URL: https://bookree.org/reader?file=446293.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-3-14-21

Submited: 02.09.2021
Revised: 07.10.2021
Accepted: 15.11.2021

A.V. Gilev
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: toshqaaa@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6747-5826
O.M. Kechina
Samara State University of Social Sciences and Education, Samara, Russian Federation
E-mail: omka-83@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5560-8521
L.S. Pulkina
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: louise@samdiff.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7947-6121

CHARACTERISTIC PROBLEM FOR A FOURTH-ORDER EQUATION WITH A DOMINANT DERIVATIVE

ABSTRACT

In this article we consider the Goursat problem for an equation with a dominating fourth-order mixed derivative and prove its unique solvability. The equation under consideration can be interpreted as a generalized Boussinesq — Love equation, which arises when describing longitudinal waves in a rod, taking into account transverse deformations. To justify the solvability, we proposed a method that is based on the possibility of reducing the problem posed to two Goursat problems for second-order equations. One of the problems is the classical Goursat problem for the simplest hyperbolic equation, while the other equation is loaded, and the study of the Goursat problem for it is the main result of the work.

Key words: Boussinesq — Love equation; system of two problems; Goursat problem; equation with dominant derivative; loaded equation; method of successive approximations; existence of a solution; uniqueness of a solution.

Citation. Gilev A.V., Kechina O.M., Pulkina L.S. Characteristic problem for a fourth-order equation with a dominant derivative. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 14–21. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-14-21. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

Anton V. Gilev — postgraduate student of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Olga M. Kechina — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of the Department of Physics, Mathematics and Teaching Methods, Samara State University of Social Sciences and Education, 65/67, M. Gorky, Samara, 443090, Russian Federation.

Ludmila S. Pulkina — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

[1] Bianchi L. Sulla estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari alle derivate parziali d'ordine superiore. *Atti R. Accad. Lincei. Rend. Cl.Sc. fis.,mat. e natur.*, 1895, vol. 4, pp. 89–99, pp. 133–142.

[2] Uizem G. Linear and non-linear waves. Moscow: Mir, 1977, 622 p. Available at: https://www.nehudlit.ru/books/detail5807.html. (In Russ.)

[3] Korpusov M.O. Destruction in nonclassical wave equations. Moscow: URSS, 2010, 237 p. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=19461607. EDN: https://www.elibrary.ru/qjwvpl. (In Russ.)

[4] Kozhanov A.I. An initial-boundary value problem for equations of the generalized Boussinesq equation type with a nonlinear source. *Mathematical Notes*, 1999, vol. 65, no. 1, pp. 59–63. DOI: https://doi.org/10.10072/BF02675010. (In Russ.)

[5] Pulkina L.S., Beylin A.B. Nonlocal approach to problems on longitudinal vibration in a short bar. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2019, vol. 2019, no. 29, pp. 1–9. Available at: https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2019/29/pulkina.pdf.

[6] Yuldashev T.K. On a boundary value problem for a three dimensional analog of the Boussinesq type differential equation. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 3, pp. 424–433. Available at: https://kpfu.ru/portal/docs/F749645498/158_3_phys_mat_8.pdf. (In Russ.)

[7] Namsaraeva G.V. Linear inverse problems for some analogues of the Boussinesq equation. *Mathematical notes of NEFU*, 2014, vol. 21, no. 2, pp. 47–59. Available at: https://www.s-vfu.ru/universitet/rukovodstvo-i-struktura/instituty/niim/mzsvfu/issues/2014-2/47-59.pdf. (In Russ.)

[8] Mehraliyev Y.T. On Solvability of an Inverse Boundary Value Problem for the Boussinesq-Love Equation. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 2013, vol. 6(4), pp. 485–494. Available at: http://elib.sfu-kras.ru/bitstream/handle/2311/10080/

[9] Pulkina L.S. A problem with dynamic nonlocal condition for pseudohyperbolic equation. *Russian Mathematics*, 2016, vol. 60, no. 9, pp. 38–45. DOI: http://doi.org/10.3103/S1066369X16090048.

[10] Beylin A.B., Pulkina L.S. A problem on longitudinal vibration in a short bar with dynamical boundary conditions. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2017, vol. 23, no. 4, pp. 7–18. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2017-23-4-7-18. (In Russ.)

[11] Zhegalov V.I. On a problem for generalized Boussinesq–Love equation. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki* [Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 771–776. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1720. EDN: https://www.elibrary.ru/xieeia. (In Russ.)

[12] Attaev A.H. The characteristic problem for the second-order hyperbolic equation loaded along one of its characteristics. *Vestnik KRAUNC. Fiziko-Matematicheskie Nauki* [Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences], 2018, no. 3(23), pp. 14–18. DOI: http://doi.org/10.18454/2079-6641-2018-23-3-14-18. (In Russ.)

[13] Andreev A.A., Yakovleva J.O. The Goursat-type problem for a hyperbolic equation and system of third order hyperbolic equations. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki* [Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences], 2019, vol. 23, no. 1, pp. 186–194. DOI: http://doi.org/10.14498/vsgtu1666. (In Russ.)

[14] Mironov A.N., Mironova L.B., Yakovleva Yu.O. The Riemann method for equations with a dominant partial derivative (A Review). *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki* [Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences], 2021, vol. 25, no. 2, pp. 207–240. DOI: http://doi.org/10.14498/vsgtu1853. (In Russ.)

[15] Midodashvili B. A nonlocal problem for fourth order hyperbolic equations with multiple characteristics. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2002, vol. 2002, no. 85, pp. 1–7. Available at: https://emis.univie.ac.at//journals/EJDE/Volumes/2002/85/midodashvili.pdf.

[16] Zhegalov V.I., Utkina E.A., Shakirova I.M. On conditions of solvability of the Goursat problem for generalized Aller equation. *Izvestiya VUZ. Matematika* [Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)], 2018, vol. 62, no. 8, pp. 17–21. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X18080030. (In Russ.)

[17] Nakhushev A.M. Problems with displacement for partial differential equations. Moscow: Nauka, 2006, 287 p. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17962288. EDN: https://www.elibrary.ru/pdbuih. (In Russ.)

[18] Ketchina O.M. On solvability of nonlocal problem for third-order equation. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2017, vol. 23, no. 1, pp. 15–20. Available at: https://journals.ssau.ru/est/article/view/5142. (In Russ.)

[19] Gilev A.V. A nonlocal problem for a hyperbolic equation with a dominant mixed derivative. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2020, vol. 26, no. 4, pp. 25–35. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-4-25-35. (In Russ.)

[20] Sobolev S.L. Equations of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1966, 444 p. Available at: https://bookree.org/reader?file=446293. (In Russ.)