МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

Научная статья
DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-3-7-13

УДК 517.956

Дата: поступления статьи: 14.09.2021
после рецензирования: 16.10.2021
принятия статьи: 15.11.2021

С.А. Алдашев
Казахский национальный педагогический университет имени Абая,
г. Алматы, Республика Казахстан
E-mail: aldash51@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8223-6900

КОРРЕКТНОСТЬ ОСНОВНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА — БИЦАДЗЕ

АННОТАЦИЯ

Известно, что колебания упругих мембран в пространстве моделируются уравнениями в частных производных. Если прогиб мембраны считать функцией $u(x,t), x = (x_1, ..., x_m), m \geqslant 2$, то по принципу Гамильтона приходим к многомерному волновому уравнению.

Полагая, что в положении изгиба мембрана находится в равновесии, из принципа Гамильтона также получаем многомерное уравнение Лапласа.

Следовательно, колебания упругих мембран в пространстве можно моделировать в качестве многомерного уравнения Лаврентьева — Бицадзе.

Основная смешанная задача в цилиндрической области для многомерных гиперболических уравнений в пространстве обобщенных функций хорошо исследована. В работах автора доказана корректность этой задачи для многомерных гиперболических и эллиптических уравнений, а также получены явные виды классических решений.

Насколько известно, эти вопросы для многомерных гиперболо-эллиптических уравнений не изучены.

Смешанная задача с граничными условиями для многомерного уравнения Лаврентьева — Бицадзе является некорректной.

В данной статье доказана однозначная разрешимость и получен явный вид классического решения основной смешанной задачи с граничными и начальными данными для многомерного уравнения Лаврентьева — Бицадзе.

Ключевые слова: корректность; основная смешанная задача; цилиндрическая область; функция Бесселя.

Цитирование. Алдашев С.А. Корректность основной смешанной задачи для многомерного уравнения Лаврентьева — Бицадзе // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2021. Т. 27, № 3. С. 7–13. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-7-13.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Серик Аймурзаевич Алдашев — доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математики и математического моделирования, Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Республика Казахстан, 050010, г. Алматы, ул. Толе Би, 86.

Введение

Основная смешанная задача для многомерных гиперболических уравнений в пространстве обобщенных функций хорошо изучена [1–4]. В [5–10] получены явные виды классических решений смешанных задач для многомерных гиперболических уравнений.

Насколько известно автору, эти задачи для многомерных эллиптических уравнений изучены только в [11], а для многомерных гиперболо-эллиптических уравнений еще не исследованы.

Смешанная задача с граничными условиями для многомерного уравнения Лаврентьева — Бицадзе является некорректной.

В данной статье доказана однозначная разрешимость и получен явный вид классического решения основной смешанной задачи с граничными и начальными данными для многомерного уравнения Лаврентьева — Бицадзе.

1. Постановка задачи и результат

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}-$ цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,...,x_m,t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma=\{(x,t)::|x|=1\}$, плоскостями $t=\alpha>0$ и $t=\beta<0$, где $|x|-$ длина вектора $x= =(x_1,...,x_m)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через $\Gamma_\alpha,\Gamma_\beta$ – части поверхности Γ, лежащие в полупространствах $t>0$ и $t<0; \sigma_\alpha-$ верхнее, а $\sigma_\beta-$ нижнее основание области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть далее $S-$ общая часть границ области Ω_α, Ω_β, представляющих собой множество $\{t=0, 0<|x|<1\}$ точек из E_m.

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим многомерное уравнение Лаврентьева — Бицадзе

$$(sgnt)\Delta_x u-u_{tt}=0, \tag{1}$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1,...,x_m,\ m\geqslant 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,...,x_m,t$ к сферическим $r,\theta_1,...,\theta_{m-1},t,\ r\geqslant 0,\ 0\leqslant\theta_1<2\pi,\ 0\leqslant\theta_i\leqslant\pi,\ i=2,3,...,m-1, \theta=(\theta_1,...,\theta_{m-1})$.

Рассмотрим следующую основную смешанную задачу с граничными и начальными данными [12]

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t\neq 0$ из класса $C(\bar\Omega_{\alpha\beta})\cap C^1(\Omega_{\alpha\beta})\cap \cap C^2(\Omega_\alpha\cup\Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{\Gamma_\alpha}=\psi_1(t,\theta), \tag{2}$$

$$u\Big|_{\Gamma_\beta}=\psi_2(t,\theta),\ u\Big|_{\sigma_\beta}=\tau(r,\theta),\ u_t\Big|_{\sigma_\beta}=\nu(r,\theta), \tag{3}$$

при этом $\psi_1(0,\theta)=\psi_2(0,\theta),\psi_2(\beta,\theta)=\tau(1,\theta)$.

Пусть $\left\{Y^k_{n,m}(\theta)\right\}-$ система линейно независимых сферических функций порядка n, $1\leqslant k\leqslant k_n$ $(m-2)!n!k_n=(n+m-3)!(2n+m-2)$, $W^l_2(S)$, $l=0,1,...$ пространства Соболева.

Имеет место [13]

Лемма 1. Пусть $f(r,\theta)\in W^l_2(S)$. Если $l\geqslant m-1$, то ряд

$$f(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f^k_n(r)Y^k_{n,m}(\theta), \tag{4}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p\leqslant l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. Для того чтобы $f(r,\theta)\in W^l_2(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (4) удовлетворяли неравенствам

$$|f^1_0(r)|\leqslant c_1,\ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{2l}|f^k_n(r)|^2\leqslant c_2,\ \ c_1,\, c_2=const.$$

Через $\psi^k_{2n}(t),\ \bar\tau^k_n(r),\ \bar\nu^k_n(r)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (4) соответственно функций $\psi_2(t,\theta),\ \tau(r,\theta),\ \nu(r,\theta)$.

Тогда справедлива

Теорема 1. Если $\psi_1(t,\theta)\in W^l_2(\Gamma_\alpha)$, $\psi_2(t,\theta)\in W^l_2(\Gamma_\beta)$, $\tau(r,\theta),\nu(r,\theta)\in W^l_2(S)$, $l>\frac{3m}{2}$, то задача 1 имеет единственное решение.

2. Доказательство теоремы 1

В сферических координатах уравнение (1) в области Ω_β имеет вид [13]

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u + u_{tt} = 0, \tag{5}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),\ g_1 = 1,\ g_j = (\sin\theta_1 ... \sin\theta_{j-1})^2,\ j > 1.$$

Известно [13], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-\ -2)$, $n = 0, 1, ...$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y^k_{n,m}(\theta)$.

Так как искомое решение задачи 1 в области Ω_β принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_\beta) \cap C^2(\Omega_\beta)$, то его можно искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}^k_n(r,t) Y^k_{n,m}(\theta), \tag{6}$$

где $\bar{u}^k_n(r,t)-$ функции, подлежащие определению.

Подставляя (6) в (5), используя ортогональность сферических функций $Y^k_{n,m}(\theta)$ [13], будем иметь

$$\bar{u}^k_{nrr} + \frac{m-1}{r}\bar{u}^k_{nr} + \bar{u}^k_{ntt} - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}^k_n = 0, k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{7}$$

при этом краевое условие (3) с учетом леммы 1 запишется в виде

$$\bar{u}^k_n(1,t) = \psi^k_{2n}(t),\ \bar{u}^k_n(r,\beta) = \bar{\tau}^k_n(r),\ \bar{u}^k_{nt}(r,\beta) = \bar{\nu}^k_n(t),\ k = \overline{1, k_n},\ n = 0, 1, \dots . \tag{8}$$

В формулах (7), (8) произведя замену $\bar{\upsilon}^k_n(r,t) = \bar{u}^k_n(r,t) - \psi^k_{2n}(t)$, получим

$$\bar{\upsilon}^k_{nrr} + \frac{m-1}{r}\bar{\upsilon}^k_{nr} - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\upsilon}^k_n + \bar{\upsilon}^k_{ntt} = \bar{f}^k_n(r,t), \tag{9}$$

$$\bar{\upsilon}^k_n(1,t) = 0,\ \bar{\upsilon}^k_n(r,\beta) = \tau^k_n(r),\ \bar{\upsilon}^k_{nt}(r,\beta) = \nu^k_n(r),\ k = \overline{1, k_n},\ n = 0, 1, \dots, \tag{10}$$

$$\bar{f}^k_n(r,t) = \frac{\lambda_n}{r^2}\psi^k_{2n}(t) - \psi^k_{2ntt},\ \tau^k_n(r) = \bar{\tau}^k_n(r) - \psi^k_{2n}(\beta),\ \nu^k_n(r) = \bar{\nu}^k_n(r) - \psi^k_{2nt}(\beta).$$

Произведя замену $\bar{\upsilon}^k_n(r,t) = r^{\frac{(1-m)}{2}}\upsilon^k_n(r,t)$ задачу (9),(10) приведем к следующей задаче:

$$L_1\upsilon^k_n \equiv \upsilon^k_{nrr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\upsilon^k_n + \upsilon^k_{ntt} = \tilde{f}^k_n(r,t), \tag{11}$$

$$\upsilon^k_n(1,t) = 0,\ \upsilon^k_n(r,\beta) = \tilde{\tau}^k_n(r),\ \upsilon^k_{nt}(r,\beta) = \tilde{\nu}^k_n(r), \tag{12}$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]}{2},\ \tilde{f}^k_n(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{f}^k_n(r,t),\ \tilde{\tau}^k_n(r) = r^{\frac{m-1}{2}}\tau^k_n(r),\ \tilde{\nu}^k_n(r) = r^{\frac{m-1}{2}}\nu^k_n(r).$$

Решение задачи (11), (12) ищем в виде $\upsilon^k_n(r,t) = \upsilon^k_{1n}(r,t) + \upsilon^k_{2n}(r,t)$, где $\upsilon^k_{1n}(r,t)-$ решение задачи

$$L\upsilon^k_{1n} = \tilde{f}^k_n(r,t),\ \upsilon^k_{1n}(1,t) = 0,\ \upsilon^k_{1n}(r,\beta) = \upsilon^k_{1nt}(r,\beta) = 0, \tag{13}$$

а $\upsilon^k_{2n}(r,t)-$ решение задачи

$$L\upsilon^k_{2n} = 0,\ \upsilon^k_{2n}(1,t) = 0,\ \upsilon^k_{2n}(r,\beta) = \tilde{\tau}^k_n(r),\ \upsilon^k_{2nt}(r,\beta) = \tilde{\nu}^k_n(r), \tag{14.}$$

Решение вышеуказанных задач рассмотрим в виде

$$\upsilon^k_n(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r)T_s(t), \tag{15}$$

при этом пусть

$$\tilde{f}^k_n(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a^k_{s,n}R_s(r),\ \tilde{\tau}^k_n(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b^k_{s,n}R_s(r),\ \tilde{\nu}^k_n(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e^k_{s,n}(t)R_s(r). \tag{16}$$

Подставляя (15) в (13), с учетом (16) получим

$$R_{srr} + \left(\frac{\overline{\lambda}_n}{r^2} + \mu\right)R_s = 0,\ 0 < r < 1,\ R_s(1) = 0,\ |R_s(0)| < \infty, \tag{17}$$

$$T_{stt} - \mu T_s(t) = a^k_{s,n}(t),\ \beta < t < 0,\ T_s(\beta) = 0,\ T_{st}(\beta) = 0. \tag{18}$$

Ограниченным решением задачи (17) является [14, с. 404]

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{19}$$

где $\nu = n + \frac{(m-2)}{2}, \mu_{s,n}-$ нули функций Бесселя первого рода $J_\nu(z)$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Задача (18) сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно $T_{s,n}(t)$ [12, с. 49]

$$T_{s,n}(t) - \mu_{s,n}^2 \int\limits_\beta^t (t-\xi) T_{s,n}(\xi) d\xi = \int\limits_\beta^t (t-\xi) a_{s,n}(\xi) d\xi, \tag{20}$$

которое имеет решение и притом единственное.

Подставляя (19) в (16), получим

$$\begin{gathered} r^{-\frac{1}{2}} \tilde{f}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^\infty a_{s,n}^k(t) J_\nu(\mu_{s,n} r),\ r^{-\frac{1}{2}} \tilde{\tau}_n^k(r) = \sum_{s=1}^\infty b_{s,n}^k J_\nu(\mu_{s,n} r), \\ r^{-\frac{1}{2}} \tilde{\nu}_n^k(r) = \sum_{s=1}^\infty e_{s,n}^k J_\nu(\mu_{s,n} r),\ 0 < r < 1. \end{gathered} \tag{21}$$

Ряды (21) — разложение в ряды Фурье — Бесселя [15, с. 83], если

$$a_{s,n}^k(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int\limits_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{f}_n^k(\xi,t) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \tag{22}$$

$$\begin{gathered} b_{s,n}^k = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\tau}_n^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \\ e_{s,n}^k = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\nu}_n^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \end{gathered} \tag{23}$$

где $\mu_{s,n}$, $s = 1, 2, ...-$ положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (19),(20) получим решение задачи (13) в виде

$$\upsilon_{1n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^\infty \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{24}$$

где $a_{s,n}^k(t)$ определяются из (22).

Далее, подставляя (19) в (14), с учетом (16) будем иметь

$$V_{stt} - \mu_{s,n}^2 V_s = 0,\ \beta < t < 0,\ V_s(\beta) = b_{s,n}^k,\ V_{st}(\beta) = e_{s,n}^k,$$

в которой, произведя замену

$$G_{s,n}(t) = V_{s,n}(t) - b_{s,n}^k - (t-\beta) e_{s,n}^k, \tag{25}$$

приходим к следующей задаче:

$$G_{s,ntt} - \mu_{s,n}^2 G_{s,n}(t) = q_{s,n}^k(t),\ \beta < t < 0,\ G_{s,n}(\beta) = 0,\ G_{s,nt}(\beta) = 0, \tag{26}$$

$q_{s,n}^k(t) = \mu_{s,n}^2 \left[b_{s,n}^k + (t-\beta) e_{s,n}^k \right].$

Задача (26) сводится также к интегральному уравнению (20), где вместо $a_{s,n}^k(t)$ берется $q_{s,n}^k(t)$.

Из (19), (20), (25) найдем решение задачи (14) в виде

$$\upsilon_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^\infty \sqrt{r} V_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{27}$$

где $b_{s,n}^k$, $e_{s,n}^k$, находятся из (23).

Следовательно, единственным решением задачи (1), (3) в области Ω_β является функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \psi_{2n}^k(t) + r^{\frac{(1-m)}{2}} \left[\upsilon_{1n}^k(r,t) + \upsilon_{2n}^k(r,t) \right] \right\} Y_{n,m}^k(\theta), \tag{28}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$, $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ определяются из (24) и (27).

Учитывая формулу [15] $2J_\nu'(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$, и оценки [13; 16]

$$\begin{gathered} J_\nu(z) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \tfrac{\pi}{2}\nu - \tfrac{\pi}{4}\right) + 0\left(z^{-\frac{3}{2}}\right),\ \nu \geqslant 0, \\ |k_n| \leqslant c_1 n^{m-2},\ \left|\tfrac{\partial^q}{\partial \theta_j^q} Y_{n,m}^k(\theta)\right| \leqslant c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q},\ j = \overline{1, m-1}, q = 0, 1, \ldots, \end{gathered} \tag{29}$$

а также леммы, ограничения на заданные функции $\psi_2(t,\theta),\tau(r,\theta),\nu(r,\theta)$, как в [4], можно доказать, что полученное решение в виде (28) принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_\beta)\cap C^1(\Omega_\beta\cup S)\cap C^2(\Omega_\beta)$.

Далее из (24), (27), (28) при $t\longrightarrow -0$ имеем

$$\begin{gathered} u(r,\theta,0)=\tau_1(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\tau_{1n}^k(r)Y_{n,m}^k(\theta),\\ \tau_{1n}^k(r)=\psi_{2n}^k(0)+\sum_{s=1}^{\infty}r^{\frac{2-m}{2}}\left[T_{s,n}(0)+V_{s,n}(0)\right]J_{n+\frac{m-2}{2}}(\mu_{s,n}r). \end{gathered} \tag{30}$$

$$\begin{gathered} u_t(r,\theta,0)=\nu_1(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\nu_{1n}^k(r)Y_{n,m}^k(\theta),\\ \nu_{1n}^k(r)=\psi_{2nt}^k(0)+\sum_{s=1}^{\infty}r^{\frac{2-m}{2}}\left[T_{s,nt}(0)+V_{s,nt}(0)\right]J_{n+\frac{m-2}{2}}(\mu_{s,n}r). \end{gathered} \tag{31}$$

Из (21)–(23), (29), а также из лемм вытекает, что $\tau_1(r,\theta)$, $\nu_1(r,\theta)\in W_2^l(S)$, $l>\frac{3m}{2}$.

Таким образом, учитывая краевые условия (2), (30), (31), мы получили в области Ω_α основную смешанную задачу для многомерного волнового уравнения

$$\Delta_x u-u_{tt}=0 \tag{32}$$

с данными

$$u\Big|_S=\tau_1(r,\theta),\ u_t\Big|_S=\nu_1(r,\theta),\ u\Big|_{\Gamma_\alpha}=\psi_1(t,\theta)\,. \tag{33}$$

В [5] доказана следующая теорема.

Теорема 2. Если $\tau_1(r,\theta)$, $\nu_1(r,\theta)\in W_2^l(S)$, $\psi_1(t,\theta)\in W_2^l(\Gamma_\alpha)$, $l>\frac{3m}{2}$, то задача (32), (33) однозначно разрешима.

Далее, используя теорему 2, приходим к справедливости теоремы 1.

Так как в [5] получен явный вид решения задачи (32), (33), то можно записать явное представление и для задачи 1.

Литература

[1] Ладыженская О.А. Смешанная задача для гиперболического уравнения. Москва: Гостехиздат, 1953. 279 с. URL: https://booksee.org/book/579384.

[2] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. Москва: Наука, 1973. 407 с. URL: https://booksee.org/book/442669.

[3] Краснов М.Л. Смешанные задачи для вырождающихся линейных гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка // Матем. сб., 1959. Т. 49(91). С. 29–84. URL: http://mi.mathnet.ru/msb4910

[4] Барановский Ф.Т. Смешанная задача для линейного гиперболического уравнения // Ученые записки Ленингр. пед. ин-та, 1958. Т. 183. С. 23–58.

[5] Алдашев С.А. Корректность смешанной задачи для многомерных гиперболических уравнений с волновым оператором // Укр. матем. журнал, 2017. Т. 69, Вып. 7. С. 992–999.

[6] Aldashev S.A. Well-Posedness of mixed problems for multidimensional hyperbolic equations with wave operator // Ukrainian Mathematical Journal, 2017. Vol. 69, 7. P. 1154–1163. DOI: https://doi.org/10.1007/s11253-017-1422-7.

[7] Aldashev S.A. Well-Posedness of the mixed problems for generate multidimensional hyperbolic equationsr // Modern Problems of Mathematical Modeling, Computational methods and Information: материалы конф. Киев: КНУ им. Т. Шевченко, 2018. С. 14–15.

[8] Алдашев С.А. Корректность смешанной задачи для одного класса вырождающихся многомерных гиперболических уравнений // Вычислительная и прикладная математика, 2019. 2(131). С. 5–14

[9] Алдашев С.А., Канапьянова З.Н. Корректность смешанной задачи для вырождающихся трехмерных гиперболических уравнений // Теория управления и матем. моделирование: материалы Всерос. конф., Ижевск: Удм. гос. ун-т, 2020. С. 24–26

[10] Алдашев С.А., Канапьянова З.Н. Смешанная задача для трехмерных гиперболических уравнений с вырождением типа и порядка // Известия НАН РК. Сер.: Физико-математическая, 2020. № 6(334). С. 13–18. URL: https://journals.nauka-nanrk.kz/physics-mathematics/article/view/632.

[11] Алдашев С.А. Корректность смешанной задачи для одного класса вырождающихся многомерных эллиптических уравнений // Научные ведомости БелГУ. Сер.: Математика. Физика, 2019. Т. 51, № 2. С. 174–182. URL: http://dspace.bsu.edu.ru/handle/123456789/26603.

[12] Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. Москва: Наука, 1981. 448 с. URL: https://knigogid.ru/books/1954660-nekotorye-klassy-uravneniy-v-chastnyh-proizvodnyh/toread.

[13] Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. Москва: Физматгиз, 1962. 254 с. URL: https://booksee.org/book/578442.

[14] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Москва: Наука, 1965. 703 с. URL: https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Kamke_ODE_1971ru.pdf.

[15] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Москва: Наука, 1973. Т. 1. 292 с. URL:http://ega-math.narod.ru/Books/Bateman.htm.

[16] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1966. 724 с. URL: http://alexandr4784.narod.ru/tihonov.html.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-3-7-13

Submited: 14.09.2021
Revised: 16.10.2021
Accepted: 15.11.2021

S.A. Aldashev

Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Republic of Kazakhstan
E-mail: aldash51@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8223-6900

WELL-POSEDNESS OF THE MAIN MIXED PROBLEM FOR THE MULTIDIMENSIONAL LAVRENTIEV — BITSADZE EQUATION

ABSTRACT

It is known that the oscillations of elastic membranes in space are modelled with partial differential equations. If the deflection of the membrane is considered as a function of $u(x,t), x = (x_1, ..., x_m), m \geqslant 2$, then, according to the Hamilton principle, we arrive to a multidimensional wave equation.

Assuming that the membrane is in equilibrium in the bending position, we also obtain the multidimensional Laplace equation from the Hamilton's principle.

Consequently, the oscillations of elastic membranes in space can be modelled with a multidimensional Lavrentiev — Bitsadze equation.

The main mixed problem in the cylindrical domain for multidimensional hyperbolic equations in the space of generalized functions is well studied. In the works of the author, the well-posedness of this problem for multidimensional hyperbolic and elliptic equations is proved, and the explicit forms of classical solutions are obtained.

As far as we know, these questions for multidimensional hyperbolic-elliptic equations have not been studied.

The mixed problem with boundary-value conditions for the multidimensional Lavrentiev — Bitsazde equation is ill-posed.

In this paper, we prove the unique solvability and obtain an explicit form of classical solution of the main mixed problem with boundary and initial conditions for the multidimensional Lavrentiev — Bitsadze equation.

Key words: well-posedness; main mixed problem; cylindrical domain; Bessel function.

Citation. Aldashev S.A. Well-posedness of the main mixed problem for the multidimensional Lavrentiev — Bitsadze equation. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 3, pp. 7–13. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-3-7-13. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

Serik A. Aldashev — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, Abai Kazakh National Pedagogical University, 86,, Tole Bi Street, Almaty, 050100, Republic of Kazakhstan.

References

[1] Ladyzhenskaya O.A. A mixed problem for a hyperbolic equation. Moscow: Gostekhizdat, 1953, 279 p. Available at: https://booksee.org/book/579384. (In Russ.)

[2] Ladyzhenskaya O.A. Boundary value problems of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1973, 407 p. Available at: https://booksee.org/book/442669. (In Russ.)

[3] Krasnov M.L. Mixed boundary problems for degenerate linear hyperbolic differential equations second order. *Mat. sb.*, 1959, vol. 49(91), pp. 29–84. Available at: http://mi.mathnet.ru/msb4910. (In Russ.)

[4] Baranovsky F.T. A mixed problem for a linear hyperbolic equation. *Uchenye zapiski Leningr. ped. ins-ta*, 1958, vol. 183, pp. 23–58. (In Russ.)

[5] Aldashev S.A. Correctness of a mixed problem for multidimensional hyperbolic equations with a wave operator. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2017, vol. 69, no. 7, pp. 992–999. (In Russ.)

[6] Aldashev S.A. Well-Posedness of Mixed Problems for Multidimensional Hyperbolic Equations with Wave Operator. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2017, vol. 69, no. 7, pp. 1154–1163. DOI: https://doi.org/10.1007/s11253-017-1422-7.

[7] Aldashev S.A. Well-Posedness of the mixed problems for generate multidimensional hyperbolic equations. In: *Materials of the conference "Modern Problems of Mathematical Modeling, Computational methods and Information"*. Kyiv: KNU im. T. Shevchenko, 2018, pp. 14–15. (In Russ.)

[8] Aldashev S.A. Correctness of a mixed problem for one class of degenerate multidimensional hyperbolic equations. *Zhurnal "Vychislitel'noi i prikladnoi matematiki"*. Kyiv: KNU im. T. Shevchenko, 2019, no. 2(131), pp. 5–14. (In Russ.)

[9] Aldashev S.A., Kanapyanova Z.N. Correctness of a mixed problem for degenerate three-dimensional hyperbolic equations. In: *Materials of the All-Russian conference "Control Theory and Mathematic Modeling"*. Izhevsk: Udm. gos. un-t, 2020, pp. 24–26. (In Russ.)

[10] Aldashev S.A., Kanapyanova Z.N. Mixed problem for three-dimensional hyperbolic equations with type and order degeneracy. *News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical–Mathematical Series*, 2020, no. 6 (334), pp. 13–18. Available at: https://journals.nauka-nanrk.kz/physics-mathematics/article/view/632. (In Russ.)

[11] Aldashev S.A. Correctness of a mixed problem for one class of degenerate multidimensional elliptic equations. *Belgorod State University Scientific Bulletin. Mathematics & Physics*, 2019, vol. 51, no. 2, pp. 174–182. Available at: http://dspace.bsu.edu.ru/handle/123456789/26603. (In Russ.)

[12] Bitsadze A.V. Some classes of partial differential equations. Moscow: Nauka, 1981, 448 p. Available at: https://knigogid.ru/books/1954660-nekotorye-klassy-uravneniy-v-chastnyh-proizvodnyh/toread. (In Russ.)

[13] Mikhlin S.G. Multidimensional singular integrals and integral equations. Moscow: Fizmatgiz, 1962, 254 p. Available at: https://booksee.org/book/578442. (In Russ.)

[14] Kamke E. Handbook of Ordinary Differential Equations. Moscow: Nauka, 1965, 703 p. Available at: https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Kamke_ODE_1971ru.pdf. (In Russ.)

[15] Bateman G., Erdeyi A. Higher transcendental functions. Moscow: Nauka, 1973, Vol. 1, 292 p. Available at: http://ega-math.narod.ru/Books/Bateman.htm. (In Russ.)

[16] Tikhonov A.N., Samarsky A.A. Equations of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1966, 724 p. Available at: http://alexandr4784.narod.ru/tihonov.html. (In Russ.)