



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-2-48-61

УДК 531.39



Дата: поступления статьи: 15.02.2021
после рецензирования: 17.03.2021
принятия статьи: 28.05.2021

П.Г. Великанов

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
г. Казань, Российская Федерация

E-mail: pvelikanov@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0845-2880>

Д.М. Халитова

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
г. Казань, Российская Федерация

E-mail: diana982000@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2239-9222>

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

АННОТАЦИЯ

Современное машиностроение ставит задачи расчета тонкостенных конструкций, сочетающих в себе легкость и экономичность, с одной стороны, и высокую прочность и надежность — с другой. В связи с этим использование анизотропных материалов и пластиков представляется оправданным. Задачи теории пластин и оболочек относятся к классу краевых задач, аналитическое решение которых в силу различных обстоятельств (нелинейность дифференциальных уравнений, сложность геометрии и граничных условий и др.) определить невозможно. Решить эту проблему помогают численные методы. Среди численных методов незаслуженно мало внимания уделено методу граничных элементов. В связи с этим дальнейшее развитие непрямого метода граничных элементов (метода компенсирующих нагрузок) для решения задач теории анизотропных пластин и оболочек, основанных на применении точных фундаментальных решений, является актуальным.

В статье рассматривается применение непрямого метода граничных элементов для решения задачи нелинейного деформирования анизотропных пластин и оболочек. Так как ядра системы сингулярных интегральных уравнений, к которым сводится решение задачи, выражаются через фундаментальное решение и его производные, то, прежде всего, в статье приводится методика определения фундаментальных решений задачи изгиба и плоского напряженного состояния анизотропной пластины. Вектор перемещений определяется из решения системы линейных уравнений, описывающих изгиб и растяжение анизотропной пластины. Решение системы выполняется методом компенсирующих нагрузок, в соответствии с которым область, представляющая план пологой оболочки, дополняется до бесконечной плоскости, и на контуре, который ограничивает область, к бесконечной пластине прикладываются компенсирующие нагрузки. Приведены интегральные уравнения непрямого метода граничных элементов. Изучение нелинейного деформирования анизотропных пластин и пологих оболочек проводится с помощью зависимостей “прогиб – нагрузка”. За ведущий параметр принимался прогиб в заданной точке срединной поверхности оболочки.

Ключевые слова: механика; математика; дифференциальные уравнения; анизотропные пластинки и оболочки; фундаментальные решения; функции влияния; не прямой метод граничных элементов; метод компенсирующих нагрузок.

Цитирование. Великанов П.Г., Халитова Д.М. Решение задач нелинейного деформирования анизотропных пластин и оболочек методом граничных элементов // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2021. Т. 27, № 2. С. 48–61. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-2-48-61>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Великанов П.Г., 2021

Петр Геннадьевич Великанов — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, 420008, Российская Федерация, г. Казань, ул. Кремлевская, 18; кафедра реактивных двигателей и энергетических установок, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н.Туполева-КАИ, 420111, Российская Федерация, г. Казань, ул. К.Маркса, 10

© Халитова Д.М., 2021

Диана Марселевна Халитова — магистрант, Казанский (Приволжский) федеральный университет, 420008, Российская Федерация, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

1. Предварительные сведения

Целью исследования является развитие непрямого метода граничных элементов (НМГЭ) или, как его еще называют, метода компенсирующих нагрузок для решения задач нелинейного деформирования анизотропных пластин и оболочек со сложным контуром в условиях термомеханического нагружения при различных граничных условиях.

Рассматриваются малые деформации тонкой линейно-упругой анизотропной пластинки и оболочки, деформирование которой описывается моделью, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява в рамках теории среднего изгиба [1].

При рассмотрении анизотропных пластин и оболочек постоянной толщины получим систему дифференциальных уравнений равновесия анизотропной пластинки и оболочки, в которой был выделен слева линейный дифференциальный оператор плоского напряженного состояния и изгиба анизотропных пластин.

Для решения поставленной задачи методом граничных элементов (МГЭ) необходимо предварительно определить фундаментальное решение задачи о плоском напряженном состоянии и изгибе анизотропной пластины.

Для определения фундаментального решения задачи о плоском напряженном состоянии и изгибе анизотропной пластины и затем с помощью НМГЭ решения этих задач была использована универсальная методика расчета.

Для отработки методики были решены несколько задач нелинейного деформирования анизотропных пластин и оболочек НМГЭ.

2. Постановка задачи

Рассмотрим малые деформации тонкой линейно-упругой полой оболочки, деформирование которой описывается моделью, основанной на гипотезах Кирхгофа — Лява в рамках теории среднего изгиба [1].

Уравнения равновесия элемента полой оболочки в усилиях имеют вид [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + p_x = 0; \quad \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + p_y = 0, \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + k_x T_x + k_y T_y + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(T_x \frac{\partial w}{\partial x} + T_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_y \frac{\partial w}{\partial x} + T_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + p_z = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где k_x, k_y — главные кривизны оболочки в направлении осей x, y ; p_x, p_y, p_z — компоненты вектора внешней нагрузки, ось z направлена по нормали к центру кривизны.

Усилия и моменты определяются через перемещения по формулам [3; 4]

$$\begin{aligned} T_x = B_{11} \varepsilon_x + B_{12} \varepsilon_y + B_{16} \gamma_{xy}; \quad T_y = B_{12} \varepsilon_x + B_{22} \varepsilon_y + B_{26} \gamma_{xy}; \quad T_{xy} = B_{16} \varepsilon_x + B_{26} \varepsilon_y + B_{66} \gamma_{xy}; \\ \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}; \\ M_x = - \left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right); \quad M_y = - \left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right); \\ M_{xy} = - \left(D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где B_{ij}, D_{ij} ($i, j = 1, 2$) – коэффициенты анизотропии [3]; (u, v, w) – компоненты вектора перемещения точки срединной поверхности; $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$ – тангенциальные деформации срединной поверхности.

Если рассматривать пластины и оболочки постоянной толщины $h = h_0$, то, подставив (2) в (1), получим систему нелинейных дифференциальных уравнений равновесия гибкой пологой анизотропной оболочки вида:

$$\begin{aligned} L_{11} u(x, y) + L_{12} v(x, y) &= l_1(w(x, y)) - p_x; \\ L_{21} u(x, y) + L_{22} v(x, y) &= l_2(w(x, y)) - p_y; \\ L w(x, y) &= l_3(u(x, y), v(x, y), w(x, y)) + p_z, \end{aligned} \quad (3)$$

где $L_{11} = B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$; $L_{12} = L_{21} = B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$;
 $L_{22} = B_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$;
 $L = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ – линейные дифференциальные операторы; l_i ($i = \overline{1, 3}$) – нелинейные дифференциальные операторы.

В (3) были выделены слева линейные операторы задач о плоском напряженном состоянии и изгибе анизотропной пластины.

3. Определение фундаментального решения задачи изгиба и матрицы фундаментального решения задачи о плоском напряженном состоянии анизотропной пластины

Пусть дана система линейных дифференциальных уравнений:

$$L_0 U(x, y) = F(x, y), \quad (4)$$

где $L_0 = \left[L_{lm} \left(\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy} \right) \right]$ – заданный линейный дифференциальный оператор;

$U(x, y) = [u_i(x, y)]^T$ – векторная функция, подлежащая определению;

$F(x, y) = [f_l(x, y)]^T$ – заданная векторная функция правых частей; $l, m = \overline{1, N}$.

Решение системы (4) $U(x, y)$ представимо в виде свертки:

$$U(x, y) = L_0^{-1} F(x, y) = G \times F = \int_{\Omega} G(x - \xi, y - \eta) F(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad \xi, \eta \in \Omega,$$

где L_0^{-1} – интегральный оператор, ядром которого является матрица фундаментального решения $G(x - \xi, y - \eta)$ системы линейных дифференциальных уравнений; Ω – область определения дифференциального оператора L_0 . Матрица фундаментального решения $G(x - \xi, y - \eta)$ определяется из выражения вида:

$$L_0 G(x - \xi, y - \eta) = \delta(x - \xi, y - \eta) I, \quad (5)$$

где $\delta(x - \xi, y - \eta)$ – дельта-функция Дирака; I – единичная матрица размерностью $N \times N$. Фундаментальные решения определяются с точностью до решения однородной системы уравнений $L_0 G(x - \xi, y - \eta) = 0$ и, кроме того, являются обобщенными функциями. Из (5) видно, что фундаментальное решение $G(x - \xi, y - \eta)$ зависит только от свойств дифференциального оператора L_0 .

Для решения поставленной задачи методом граничных элементов необходимо предварительно определить компоненты матрицы фундаментального решения задачи о плоском напряженном состоянии и фундаментальное решение задачи изгиба анизотропной пластины.

Для того чтобы свести задачу по поиску компонент матрицы фундаментального решения задачи о плоском напряженном состоянии анизотропной пластины к дифференциальному уравнению, подобному задаче изгиба анизотропной пластины, воспользуемся методикой, предложенной Л. Хермандером в [5; 6]. Согласно этой методике фундаментальное решение ищем в виде (via the ansatz [6]):

$$G(x - \xi, y - \eta) = L_0^* \vartheta(x - \xi, y - \eta), \quad (6)$$

где $L_0^* = \det(L_0) L_0^{-1}$ – ассоциированный к L_0 дифференциальный оператор, элементами которого являются алгебраические дополнения оператора L_0^T (matrix of cofactors [6]). Таким образом, первоначальный и ассоциированный к нему дифференциальные операторы имеют вид

$$L_0 = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}, \quad L_0^* = \begin{pmatrix} L_{22} & -L_{21} \\ -L_{12} & L_{11} \end{pmatrix}.$$

В результате подстановки (6) в (5) приходим к уравнению относительно скалярной функции $\vartheta(x - \xi, y - \eta)$:

$$\det(L_0) \vartheta(x - \xi, y - \eta) = \delta(x - \xi, y - \eta), \quad (7)$$

где $\det(L_0)$ – определитель первоначального дифференциального оператора.

Таким образом, определение матрицы фундаментального решения системы линейных дифференциальных уравнений данным методом предполагает: 1) вычисление компонент ассоциированного дифференциального оператора по методике, аналогичной методике вычисления компонент обратной матрицы; 2) решение уравнения (7), подобного уравнению задачи изгиба; 3) в соответствии с найденным ассоциированным дифференциальным оператором L_0^* проведение всех необходимых вычислений производных функции $\vartheta(x - \xi, y - \eta)$ по (6).

Таким образом, необходимо найти фундаментальные решения двух подобных дифференциальных уравнений:

$$\left[D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right] G(x - \xi, y - \eta) = \delta(x - \xi, y - \eta),$$

$$\left[a_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2a_{26} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{16} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + a_{11} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right] \vartheta(x - \xi, y - \eta) = \delta(x - \xi, y - \eta),$$

где a_{ij} ($i, j = 1, 2$) – упругие постоянные (коэффициенты деформации) [3].

Таким образом, эти дифференциальные уравнения отличаются лишь коэффициентами в дифференциальных операторах, и их решение может быть найдено по аналогичной методике, например, фундаментальные решения (для разных вариантов корней характеристического уравнения) для задачи изгиба анизотропной пластины при действии нормальной к поверхности нагрузки $q(x, y)$ имеют вид [3]. Без ограничения общности и в целях экономии места далее предполагаем, что точка приложения единичных сосредоточенных нагрузок, которые моделируются обобщенной δ -функцией Дирака, находится в начале координат:

$$L[w(x, y)] = q(x, y),$$

где

$$L = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

– эллиптический дифференциальный оператор; x и y – декартовы прямоугольные координаты срединной поверхности; D_{ij} – коэффициенты анизотропии [3]; $w(x, y)$ – искомая функция прогиба пластины.

Дифференциальное уравнение задачи изгиба бесконечной анизотропной пластины при действии нормальной к поверхности и приложенной в начале системы координат единичной сосредоточенной силы имеет вид:

$$L[G(x, y)] = \delta(x, y),$$

где $G(x, y)$ – фундаментальное решение, $\delta(x, y)$ – дельта-функция Дирака.

Рассмотрим характеристическое уравнение:

$$D_{11} \mu^4 + 4D_{16} \mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \mu^2 + 4D_{26} \mu + D_{22} = 0.$$

В настоящее время известны следующие фундаментальные решения задачи изгиба анизотропных пластин [7–12] (см. таблицу).

В процессе получения фундаментальных решений для задачи изгиба анизотропных пластин все авторы, следуя [3], считали, что корни характеристического уравнения задачи изгиба для реальных однородных анизотропных материалов являются комплексно сопряженными (первой или второй кратности). В общем случае, что особенно важно для поиска компонент матрицы фундаментального решения задачи о плоском напряженном состоянии анизотропной пластины, корни характеристического уравнения могут быть и действительными (первой или второй кратности) — этот вариант ранее в работах учтен не был.

Для нахождения нового точного фундаментального решения задачи изгиба анизотропных пластин (и, как следствие, матрицы фундаментального решения задачи о плоском напряженном состоянии анизотропных пластин) воспользуемся методом Леви, предварительно сделав краткое описание метода.

Пусть имеется следующее дифференциальное уравнение эллиптического типа:

$$\Lambda(u) + \Delta(u) = 0,$$

Таблица
Table

Информация об известных фундаментальных решениях задачи изгиба анизотропных пластин
Information about known fundamental solutions to the problem of bending anisotropic plates

Статьи	Решение для комплексно сопряженных корней характеристического уравнения	Решение для комплексно сопряженных кратных корней характеристического уравнения	Метод получения фундаментального решения	Примечание
[7–9]	+	+	Не приведен	Решение приведено в полярной системе координат, что неудобно
[10]	+	+	Интегральное преобразование Фурье	Хотя был использован один метод, но получены решения, отличающиеся на решение однородного уравнения
[11]	+	+	Интегральное преобразование Фурье	
[12]	+	+	Метод последовательного интегрирования	-

где операторы Λ и Δ имеют вид:

$$\Lambda = \sum_{l+m=2n} a_{lm}(x, y) \frac{\partial^{2n}}{\partial x^l \partial y^m}, \quad \Delta = \sum_{l+m \leq 2n-1} b_{lm}(x, y) \frac{\partial^{l+m}}{\partial x^l \partial y^m}.$$

Обозначим через a_j корни характеристического уравнения

$$\sum_{l+m=2n} a_{lm}(x, y) \alpha^l = 0.$$

Корней будет ровно $2n$, и все они будут комплексно сопряженными (для реальных коэффициентов анизотропии материалов при изгибе D_{ij} ($i, j = 1, 2$)), действительными (для реальных упругих постоянных (коэффициентов деформации) материала в условиях плоского напряженного состояния a_{ij} ($i, j = 1, 2$)) или кратными.

Составим из этих корней определитель Вандермонда

$$d = \begin{bmatrix} \alpha_1^{2n-1} & \alpha_1^{2n-2} & \dots & 1 \\ \alpha_2^{2n-1} & \alpha_2^{2n-2} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{2n}^{2n-1} & \alpha_{2n}^{2n-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Алгебраические дополнения членов первого столбца обозначим d_j .

Введем в рассмотрение выражение

$$\sigma_i(x - \xi, y - \eta) = \alpha_i(x - \xi) + (y - \eta)$$

и составим функцию

$$\psi(x - \xi, y - \eta) = \frac{i}{d} \sum_{j=1}^{2n} (-1)^j d_j \sigma_j^{2n-2}(x - \xi, y - \eta),$$

которая является действительной и однозначной, имеющей особенность в точке $\zeta(\xi, \eta)$, что видно из самой функции ψ .

Искомое фундаментальное решение задачи изгиба анизотропных пластин может быть получено после анализа особенностей функции ψ в виде:

$$G(x - \xi, y - \eta) = \frac{1}{2\pi(2n - 2)!a_{2n,0}} \psi(x - \xi, y - \eta).$$

По вышеприведенной формуле были получены все интересующие нас фундаментальные решения задачи изгиба, а затем в соответствии с ассоциированным дифференциальным оператором по (6) и компоненты матрицы фундаментального решения задачи о плоском напряженном состоянии анизотропных пластин, соответствующие различным корням характеристического уравнения.

Для проверки правильности полученного фундаментального решения задачи изгиба и матрицы фундаментального решения задачи о плоском напряженном состоянии анизотропной пластины были использованы две методики: с помощью формулы дифференцирования обобщенных функций [13]

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)_G + (-1)^{i-1} \delta(x_1, \dots, x_n) \int_{\Gamma} \Phi dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n,$$

где $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)_G$ — обычная производная от функции Φ ; Γ — граница области G (один из контуров, внутри которого находится особенность) и с помощью проверки равновесия пластины, ограниченной кривой, при действии на нее единичной нагрузки. Результаты проверок подтверждают правильность найденных фундаментальных решений.

Найденные в представленной вашему вниманию работе фундаментальные решения были сравнены с решениями, ранее полученными другими методами. Так оказалось, что с точностью до решения однородного уравнения найденные фундаментальные решения совпадают с решениями, полученными в статьях [10–12]. Для случая ортотропного материала полученные фундаментальные решения с точностью до решения однородного уравнения совпадают с результатами, полученными в [13; 14], а для изотропного материала — с результатом, полученным в [10–15].

4. Непрямой метод граничных элементов (метод компенсирующих нагрузок) для решения задач нелинейного деформирования анизотропных пластин и оболочек

Построение итерационного процесса решения задач изгиба пологих оболочек в геометрически нелинейной постановке основано на применении предварительно вычисленных фундаментальных решений задач изгиба и плоского напряженного состояния анизотропной пластины.

На контуре Γ , ограничивающем оболочку, рассматриваются следующие граничные условия:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad u = 0, \quad v = 0 \text{ — жесткая заделка,}$$

$$w = 0, \quad M_n = 0, \quad u = 0, \quad v = 0 \text{ — шарнирное закрепление,}$$

где $M_n = M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha + M_{xy} \sin 2\alpha$ — изгибающий момент на контуре Γ .

Процесс последовательных приближений для решения системы (3) принимается в виде

$$u^{k+1} = u^{(k)} + \alpha_u(u - u^{(k)}); \quad v^{k+1} = v^{(k)} + \alpha_v(v - v^{(k)}); \quad w^{k+1} = w^{(k)} + \alpha_w(w - w^{(k)}); \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (8)$$

где $\alpha_u, \alpha_v, \alpha_w$ ($0 < \alpha_u \leq 1, 0 < \alpha_v \leq 1, 0 < \alpha_w \leq 1$) — параметры, обеспечивающие сходимость итерационного процесса (параметры релаксации). Вектор $U(u, v, w)$ определяется из решения системы линейных уравнений, описывающих изгиб и растяжение анизотропной пластины

$$\begin{aligned} L_{11} u(x, y) + L_{12} v(x, y) &= l_1(w^{(k)}) - p_x; \\ L_{21} u(x, y) + L_{22} v(x, y) &= l_2(w^{(k)}) - p_y; \\ L w(x, y) &= l_3(u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)}) + p_z. \end{aligned} \quad (9)$$

Решение системы (9) выполняется методом компенсирующих нагрузок, в соответствии с которым область Ω , представляющая план пологой оболочки, дополняется до бесконечной плоскости, и на контуре Γ , который ограничивает область Ω , к бесконечной пластине прикладываются компенсирующие нагрузки.

По методу компенсирующих нагрузок решение (9) ищется в виде:

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_{\Gamma} [G_{11}(t, \zeta) \varphi_1(\zeta) + G_{12}(t, \zeta) \varphi_2(\zeta)] ds(\zeta) + u^r(t); \\ v(t) &= \int_{\Gamma} [G_{21}(t, \zeta) \varphi_1(\zeta) + G_{22}(t, \zeta) \varphi_2(\zeta)] ds(\zeta) + v^r(t); \\ w(t) &= \int_{\Gamma} \left[G(t, \zeta) q(\zeta) - \frac{\partial G(t, \zeta)}{\partial n(\zeta)} m(t, \zeta) \right] ds(\zeta) + w^r(t). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $t(x, y) \in \Omega$, $\zeta(\xi, \eta) \in \Gamma$; ds – элемент длины контура Γ ; $G_{ij}(t, \zeta)$, $(i, j = 1, 2)$ – компоненты матрицы фундаментального решения задачи о плоском напряженном состоянии анизотропной пластины; $G(t, \zeta)$ – фундаментальное решение задачи изгиба анизотропной пластины; $n(\zeta)$ – внешняя нормаль к контуру Γ ; $\varphi_1(\zeta)$, $\varphi_2(\zeta)$, $q(\zeta)$, $m(\zeta)$ – компоненты вектора компенсирующих нагрузок на контуре Γ (φ_1 , φ_2 – усилия в срединной поверхности, направленные вдоль координатных осей x , y ; q , m – усилие нормальное срединной поверхности и момент вокруг касательной к контуру Γ).

Функции $u^r(t)$, $v^r(t)$, $w^r(t)$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} u^r(t) &= \int_{\Omega} \left[G_{11}(t, \zeta) l_1(w^{(k)}(\zeta)) + G_{12}(t, \zeta) l_2(w^{(k)}(\zeta)) \right] d\Omega(\zeta); \\ v^r(t) &= \int_{\Omega} \left[G_{21}(t, \zeta) l_1(w^{(k)}(\zeta)) + G_{22}(t, \zeta) l_2(w^{(k)}(\zeta)) \right] d\Omega(\zeta); \\ w^r(t) &= \int_{\Omega} G(t, \zeta) \left[l_3(u^{(k)}(\zeta), v^{(k)}(\zeta), w^{(k)}(\zeta)) + p(\zeta) \right] d\Omega(\zeta). \end{aligned} \quad (11)$$

Разрешающая система сингулярных интегральных уравнений с неизвестными компенсирующими нагрузками получается при подстановке (10) в граничные условия на контуре Γ и после анализа предельных значений потенциалов имеет вид:

1) жесткая заделка

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} G(t, \zeta) q(\zeta) ds(\zeta) - \int_{\Gamma} \frac{\partial G(t, \zeta)}{\partial n_1} m(\zeta) ds(\zeta) + w^r(t) &= 0, \\ \int_{\Gamma} \frac{\partial G(t, \zeta)}{\partial n} q(\zeta) ds(\zeta) - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 G(t, \zeta)}{\partial n \partial n_1} m(\zeta) ds(\zeta) + \frac{\partial w^r(t)}{\partial n} &= 0, \\ \int_{\Gamma} [G_{11}(t, \zeta) \varphi_1(\zeta) + G_{12}(t, \zeta) \varphi_2(\zeta)] ds(\zeta) + u^r(t) &= 0, \\ \int_{\Gamma} [G_{21}(t, \zeta) \varphi_1(\zeta) + G_{22}(t, \zeta) \varphi_2(\zeta)] ds(\zeta) + v^r(t) &= 0; \end{aligned}$$

2) шарнирное закрепление

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} G(t, \zeta) q(\zeta) ds(\zeta) - \int_{\Gamma} \frac{\partial G(t, \zeta)}{\partial n_1} m(\zeta) ds(\zeta) + w^r(t) &= 0, \\ \frac{m(t)}{2} + \int_{\Gamma} L_1(G(t, \zeta)) q(\zeta) ds(\zeta) - \int_{\Gamma} L_1 \left(\frac{\partial G(t, \zeta)}{\partial n_1} \right) m ds(\zeta) + M_n^r(t) &= 0, \\ \int_{\Gamma} [G_{11}(t, \zeta) \varphi_1(\zeta) + G_{12}(t, \zeta) \varphi_2(\zeta)] ds(\zeta) + u^r(t) &= 0, \\ \int_{\Gamma} [G_{21}(t, \zeta) \varphi_1(\zeta) + G_{22}(t, \zeta) \varphi_2(\zeta)] ds(\zeta) + v^r(t) &= 0. \end{aligned}$$

Перемещения и усилия в области Γ и на контуре Γ определяются соотношениями вида (10).

Ядра граничных интегральных уравнений содержат особенности типа $\ln r$, $1/r$, $1/r^2$ при $r \rightarrow 0$. Интегралы с особенностью типа $1/r^2$ определяются в смысле конечных значений по Адамару.

При численной реализации алгоритма контур Γ аппроксимируется отрезками прямых линий или дугами окружностей и разбивается на граничные элементы, в пределах которых компенсирующие нагрузки считаются постоянными. Интегралы, не содержащие особенностей, вычисляются на элементах контура по восьмиузловой квадратурной формуле Гаусса. Сингулярные интегралы вычисляются аналитически или по шестнадцатиузловой квадратурной формуле Гаусса.

Функции u^r , v^r , w^r определяются интегральными операторами со слабой особенностью (интегрирование проводится по срединной поверхности Ω). Для вычисления этих интегралов срединная поверхность разбивается на треугольники или секторы (рис. 1). Далее каждый треугольник разбивается на отдельные элементы (ячейки). На срединную поверхность Ω наносится сеточная область, узлы которой являются центрами тяжести отдельных ячеек. Интегралы по отдельным ячейкам можно представить в виде

$$J = \int_{\Delta_j} k(t_i, \zeta) \varphi(\zeta) d\Omega(\zeta), \quad \zeta \in \Delta_j \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

где t_i — центр тяжести i -й ячейки; Δ_j — площадь j -й ячейки; m — число ячеек в области интегрирования; $k(t_i, \zeta)$ — ядро интегрального оператора; $\varphi(\zeta)$ — плотность, которая удовлетворяет условию Гельдера

$$|\varphi(\zeta) - \varphi(t)| \leq C |\zeta - t|^\alpha; \quad 0 < \alpha \leq 1; \quad C = \text{const} > 0.$$

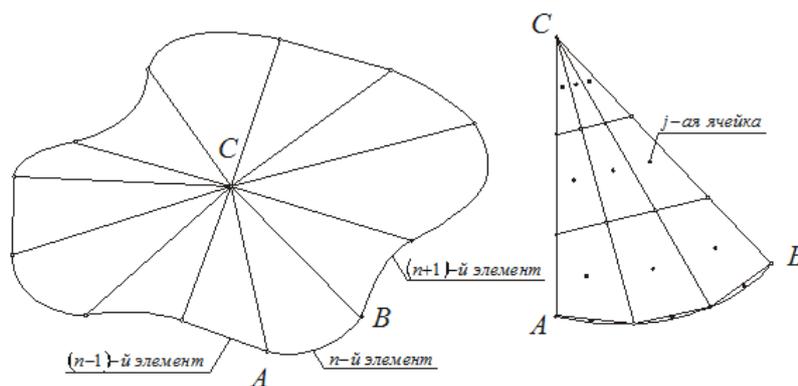


Рис. 1. Методика вычисления частных решений
 Fig. 1. Technique for calculating particular solutions

В ячейки, прилегающие к участкам контура, аппроксимируемым дугами окружности, вносятся поправки: корректируются площадь и положение центра тяжести.

Площадь дугового сектора и положение центра тяжести определяются следующими соотношениями:

$$F = \frac{1}{2} R^2 (\alpha - \sin \alpha); \quad y_c = 2R \frac{\frac{1}{3} \sin \frac{\alpha}{2} (2 + \cos^2 \frac{\alpha}{2}) - \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\alpha - \sin \alpha}.$$

Если $i \neq j$, то интеграл J вычисляется по формуле

$$J = k(t_i, t_j) \varphi(t_j) \Delta_j.$$

При $i = j$ эти интегралы имеют слабую особенность и вычисляются численно по квадратурным формулам Гаусса.

Условие окончания итерационного процесса (9) принимается в следующем виде:

$$\frac{\|U - U^{(k)}\|}{\|U^{(k)}\|} < \varepsilon,$$

где $\|U\|^2 = \sum_i [u^2(t_i) + v^2(t_i) + w^2(t_i)]$ — принятая норма; ε — малая положительная величина; $U^{(k)} = (u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)})$.

Исследование нелинейного деформирования анизотропных пластин и оболочек сводится к решению нелинейных задач, зависящих от параметра, который может задаваться различными способами. При численном решении нелинейных задач строится шаговый процесс для монотонно изменяющихся

значений выбранного параметра. Эффективность алгоритма зависит от способа выбора этого параметра. Вопросом применения метода продолжения по параметру посвящены работы [16; 17].

В настоящей статье изучение нелинейного деформирования анизотропных пластин и пологих оболочек проводится с помощью зависимостей “прогиб – нагрузка”. За ведущий параметр принимался прогиб w^* в заданной точке $t^*(x^*, y^*)$ срединной поверхности оболочки.

В данном случае к системе нелинейных уравнений добавляется уравнение $w(t^*) = w^*$ и нагрузка p считается неизвестной величиной. Строится итерационный процесс с шагом по прогибу Δw^* в заданной точке t^* , т. е. решаются нелинейные задачи для значений прогибов $w_0^*, w_1^*, \dots, w_N^*$ в точке t^* . При этом $w_i^* = w_{i-1}^* + \Delta w^*$ ($i = 1, 2, \dots, N$).

За начальное приближение к решению при значении прогиба w_i^* в точке t^* можно принять

$$u^{(i)} = \beta u^{(i-1)}, v^{(i)} = \beta v^{(i-1)}, w^{(i)} = \beta w^{(i-1)}, \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

где $\beta = \frac{w_i^*}{w_{i-1}^*}$

Задание вышеприведенного начального приближения является эффективным, если деформация оболочки происходит без резкого изменения формы.

При значении в точке t^* прогиба w_0^* начальные приближения можно принять в виде

$$u^{(0)} = 0, v^{(0)} = 0, w^{(0)} = 0.$$

Это соответствует решению на первой итерации задачи изгиба и растяжения анизотропной пластины в линейной постановке.

5. Сопоставление ортотропного и анизотропного материала

Рассмотрим ортотропный материал (рис. 2), главные направления упругости (физические оси x' и y') которого не совпадают с его геометрическими осями (x и y). Между ними угол φ .

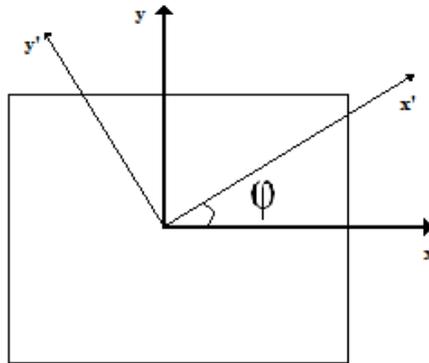


Рис. 2. Ортотропный материал
Fig. 2. Orthotropic material

В результате дифференциальный оператор ортотропного материала

$$L = D_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4}{\partial y^4} - \text{ортотропный оператор задачи изгиба;}$$

в вышеприведенных обстоятельствах после пересчета коэффициентов жесткости ($D_i (i = \overline{1, 3})$)

$$D'_{11} = D_1 \cos^4 \varphi + 2D_3 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + D_2 \sin^4 \varphi,$$

$$D'_{22} = D_1 \sin^4 \varphi + 2D_3 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + D_2 \cos^4 \varphi,$$

$$D'_{66} = D_3 + (D_1 + D_2 - 2D_3) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi,$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{D'_{22}} [D_2 \nu_1 + (D_1 + D_2 - 2D_3) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi],$$

$$D'_{16} = \frac{1}{2} (D_2 \sin^2 \varphi - D_1 \cos^2 \varphi + D_3 \cos 2\varphi) \sin 2\varphi,$$

$$D'_{26} = \frac{1}{2} (D_2 \cos^2 \varphi - D_1 \sin^2 \varphi - D_3 \cos 2\varphi) \sin 2\varphi,$$

примет вид, аналогичный анизотропному материалу

$$L = D'_{11} \frac{\partial^4}{\partial x'^4} + 4D'_{16} \frac{\partial^4}{\partial x'^3 \partial y'} + 2(D'_{12} + 2D'_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x'^2 \partial y'^2} + 4D'_{26} \frac{\partial^4}{\partial x' \partial y'^3} + D'_{22} \frac{\partial^4}{\partial y'^4}$$

— анизотропный оператор

Таким образом, вместо нелинейного деформирования анизотропных пластин и оболочек, решений для которых практически нет, можно исследовать нелинейное деформирование ортотропных пластин и оболочек, главные направления упругости которых не совпадают с его геометрическими осями.

Пример 1

Круглая пластина (рис. 3) с жестко заделанными краями находится под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки интенсивности q ($\varphi = 30^\circ$).

На рис. 3 представлены зависимости “максимальный прогиб — нагрузка” в центре пластины, полученные НМГЭ, на базе метода R-функций [18] и результаты работы [19]. Сплошная линия соответствует решению [18], пунктирная (с длинным пунктиром) — решению [19], а пунктирная (с коротким пунктиром и точками) — решению НМГЭ.

При решении задачи НМГЭ контур пластины был равномерно разбит на 20 одинаковых по длине дуговых элементов. Релаксационные параметры и невязка приняты в виде:

$\alpha_u = \alpha_v = \alpha_w = 0.2$; $\varepsilon = 0.001$. Итерационный процесс сходил за 4–13 итераций.

Исследование проведено на примере пластин, изготовленных из материалов со следующими механическими характеристиками [18]:

1. боропластик (кривая BR): $E_1/E_2 = 10$; $\tilde{G}/E_2 = 1/3$; $\nu_1 = 0.22$;
2. графит (кривая GR): $E_1/E_2 = 40$; $\tilde{G}/E_2 = 0.6$; $\nu_1 = 0.25$;
3. стеклопластик (кривая GL): $E_1/E_2 = 3$; $\tilde{G}/E_2 = 0.6$; $\nu_1 = 0.25$.

Размеры пластины: $R = 0.1$ (м); $h = 0.01$ (м).

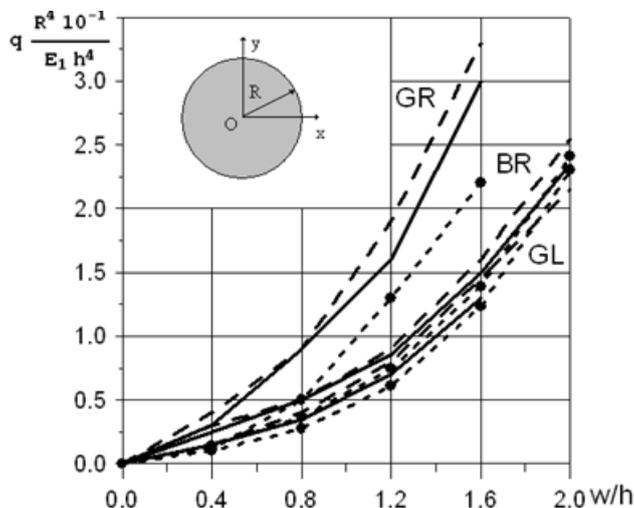


Рис. 3. Результаты вычислений для круглой пластины
 Fig. 3. Calculation results for a round plate

Пример 2

Квадратная в плане полая сферическая оболочка (рис. 4) с шарнирно закрепленными краями с размером стороны $2a$ находится под действием равномерно распределенного нормального давления интенсивности p , направленного к центру кривизны оболочки ($\varphi = 30^\circ$).

На рис. 4 приведены зависимости “максимальный прогиб — нагрузка” для оболочки с параметром кривизны $\bar{k}_x = \bar{k}_y = \bar{k} = \frac{(2a)^2}{Rh} = 16$. Параметр нагрузки $\bar{p} = p \frac{(2a)^4}{Eh^4}$. Контур разбивался на 28 элементов. Длина стороны: $a = 0.1$ (м). Параметры релаксации принимались равными: $\alpha_u = \alpha_v = 0.3$; $\alpha_w = 0.1$ при

точности $\varepsilon = 10^{-3}$. Итерационный процесс сходил за 5–68 итераций. Механические характеристики материала аналогичны приведенным в примере 1.

На рис. 4 приведены зависимости $\bar{q} - \bar{w}$, где $\bar{w} = \frac{w}{h}$ — относительный прогиб в центре оболочек с кривизнами $\bar{k} = 0; 4; 8; 16$. При $\bar{k} = 0; 4$ зависимости $\bar{q} - \bar{w}$ носят монотонный характер. При $\bar{k} = 8; 16$, как видно из рис. 4, оболочка теряет устойчивость хлопком. Например, верхняя и нижняя критические нагрузки для оболочки с кривизной $\bar{k} = 16$ соответственно равны $\bar{q} = 115.73; \bar{q} = 40.4$.

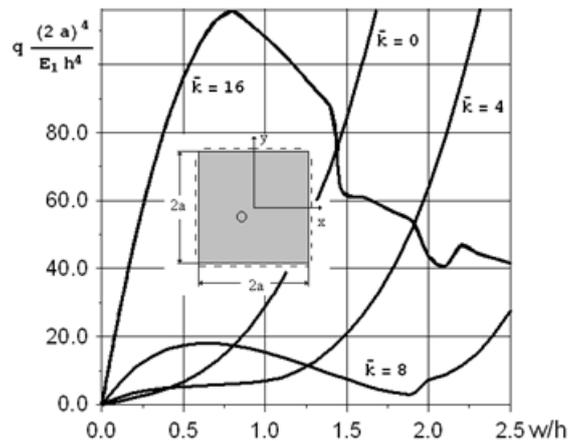


Рис. 4. Результаты вычислений для квадратной в плане пологой сферической оболочки
 Fig. 4. Calculation results for a shallow spherical shell that is square in plan

Выводы

В статье было исследовано применение непрямого метода граничных элементов (метода компенсирующих нагрузок) для решения задачи нелинейного деформирования анизотропных пластин и оболочек. Так как ядра системы сингулярных интегральных уравнений, к которым сводится решение задачи, выражаются через фундаментальное решение и его производные задачи изгиба и плоского напряженного состояния анизотропной пластины, то предварительно были найдены фундаментальные решения и их производные, предельные значения потенциалов для которых сначала были исследованы, а затем с помощью них были сформированы интегральные уравнения. Для решения задачи нелинейного деформирования анизотропных пластин и пологих оболочек использовался метод продолжения по параметру. За ведущий параметр принимался прогиб в заданной точке срединной поверхности оболочки. Приведены примеры решения тестовых задач.

Литература

- [1] Галимов К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1975. 326 с.
- [2] Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. Москва: Наука, 1972. 432 с. URL: <https://dwg.ru/lib/1965>.
- [3] Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. Москва: ОГИЗ-Гостехиздат, 1947. 355 с. URL: <https://lib-bkm.ru/12625>.
- [4] Корнишин М.С. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. Москва: Наука, 1964. 192 с.
- [5] Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: в 4 т. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье / пер. с англ. Москва: Мир, 1986. 464 с.
- [6] Shanz M., Antes H. A Boundary Integral Formulation for the Dynamic Behavior of a Timoshenko Beam // *Electronic Journal of Boundary Elements*, Vol. BETEQ 2001, No. 3, pp. 348–359. URL: https://www.researchgate.net/publication/228746551_A_boundary_integral_formulation_for_the_dynamic_behavior_of_a_Timoshenko_beam.
- [7] Wu B.C., Altiero N.J. A new numerical method for the analysis of anisotropic thin plate bending problems // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1981. Vol. 25, Issue 3, pp. 343–353. DOI: [http://doi.org/10.1016/0045-7825\(81\)90037-2](http://doi.org/10.1016/0045-7825(81)90037-2).

- [8] Shi G., Bezine G. A general boundary integral formulation for the anisotropic plate bending problems // Journal of Composite Materials. 1988. Vol. 22, Issue 8. pp. 694–716. DOI: <http://doi.org/10.1177/002199838802200801>.
- [9] Albuquerque E.L., Sollero P., Venturini W.S., Aliabadi M.H. Boundary element analysis of anisotropic Kirchhoff plates // International Journal of Solids and Structures. July 2006, Volume 43, Issues 14–15, pp. 4029–4046.
- [10] Гурьянов И.Н., Артюхин Ю.П. Фундаментальное решение плоской задачи и задачи изгиба пластин анизотропного тела. Казань: КГУ, 1994. 33 с.
- [11] Левада В.С. Построение фундаментального решения для задачи изгиба анизотропной пластины // Приднепровский научный вестник. 1996. № 4. 8 с.
- [12] Великанов П.Г., Артюхин Ю.П., Куканов Н.И. Изгиб анизотропной пластины методом граничных элементов // Актуальные проблемы механики сплошных сред. Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2020. С. 105–111.
- [13] Артюхин Ю.П., Грибов А.П. Решение задач нелинейного деформирования пластин и пологих оболочек методом граничных элементов. Казань: ФЭн, 2002. 199 с. URL: <https://booksee.org/book/438702>.
- [14] Грибов А.П., Великанов П.Г. Применение преобразования Фурье для получения фундаментального решения задачи изгиба ортотропной пластины // Мат. моделирование и краевые задачи: Труды Всероссийской научной конференции. Самара: СамГТУ, 2004. Ч. 3. С. 67–71. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=7556596>; <http://mi.mathnet.ru/mmkz191>.
- [15] Крауч С., Старфилд С. Методы граничных элементов в механике твердого тела. Москва: Мир, 1987. 328 с. URL: <https://booksee.org/book/438609>.
- [16] Ворович И.Н. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. Москва: Наука, 1989. 376 с. URL: <https://booksee.org/book/449596>.
- [17] Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования. Москва: Наука, 1988. 232 с. URL: <https://booksee.org/book/438580>.
- [18] Рвачев В.Л., Курпа Л.В., Хоменко М.М., Болотина А.Ю. Применение теории R-функций к расчету гибких ортотропных пологих оболочек сложной формы в плане // Труды XV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Т. 1. Казань: Изд-во Казанского университета, 1990. С. 342–347.
- [19] Chia C.Y. Nonlinear analysis of plates.- NY etc. Mc. Graw-Hill intern, 1980, XIV, 422.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-2-48-61

Submitted: 15.02.2021

Revised: 17.03.2021

Accepted: 28.05.2021

P.G. Velikanov

Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russian Federation
E-mail: pvelikanov@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0845-2880>

D.M. Khalitova

Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russian Federation
E-mail: diana982000@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/>

SOLUTIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ANISOTROPIC PLATES AND SHELLS BY BOUNDARY ELEMENTS METHOD

ABSTRACT

Modern mechanical engineering sets the tasks of calculating thin-walled structures that combine lightness and economy on the one hand and high strength and reliability on the other. In this regard, the use of anisotropic materials and plastics seems justified. The problems of the theory of plates and shells belong to the class of boundary value problems, the analytical solution of which, due to various circumstances (nonlinearity of differential equations, complexity of geometry and boundary conditions, etc.), cannot be determined. Numerical methods help to solve this problem. Among numerical methods, undeservedly little attention is paid to the boundary element method. In this regard, the further development of indirect method of compensating loads for solving problems of the anisotropic plates and shells theory based on the application of exact fundamental solutions is relevant.

The paper considers the application of the indirect boundary element method for solving of an anisotropic plates and shells nonlinear deformation problem. Since the kernels of the system of singular integral equations

to which the solution of the problem is reduced are expressed in terms of the fundamental solution and its derivatives, first of all, the article provides a method for determining the fundamental solutions to the problem of bending and the plane stress state of an anisotropic plate. The displacement vector is determined from the solution of linear equations system describing the bending and plane stress state of an anisotropic plate. The solution of the system is performed by the method of compensating loads, according to which the area representing the plan of the shallow shell is supplemented to an infinite plane, and on the contour that limits the area, compensating loads are applied to the infinite plate. Integral equations of indirect BEM are given. In this paper, the study of nonlinear deformation of anisotropic plates and shallow shells is carried out using the “deflection – load” dependencies. The deflection at a given point on the median surface of the shell was taken as the leading parameter.

Key words: mechanics; mathematics; differential equations; anisotropic plates and shells; fundamental solutions; influence functions; indirect boundary elements method; compensating loads method.

Citation. Velikanov P.G., Khalitova D.M. Solutions of boundary value problems for anisotropic plates and shells by boundary elements method. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 48–61. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-2-48-61>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Velikanov P.G., 2021

Peter G. Velikanov — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of the Department of Theoretical Mechanics, Kazan (Volga Region) Federal University, 18, Kremlevskaya Street, Kazan, 420008, Russian Federation; Department of Jet Engines and Power Plants, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev-KAI, 10, K. Marx Street, Kazan, 420111, Russian Federation.

© Khalitova D.M., 2021

Diana M. Khalitova — Master’s degree student, Kazan (Volga Region) Federal University, 18, Kremlevskaya Street, Kazan, 420008, Russian Federation.

References

- [1] Galimov K.Z. Fundamentals of the nonlinear theory of thin shells. Kazan: Izd-vo Kazanskogo un-ta, 1975, 326 p. (In Russ.)
- [2] Volmir A.S. Nonlinear dynamics of plates and shells. Moscow: Nauka, 1972, 432 p. Available at: <https://dwg.ru/lib/1965>. (In Russ.)
- [3] Lekhnitsky S.G. Anisotropic plates. Moscow: OGIz-Gostekhizdat, 1947, 355 p. Available at: <https://lib-bkm.ru/12625>. (In Russ.)
- [4] Kornishin M.S. Nonlinear problems of the plates and shallow shells theory and methods of their solution. Moscow: Nauka, 1964, 192 p. (In Russ.)
- [5] Hormander (должна БЫТЬ О с двумя точками наверху) L. The Analysis of Linear Partial Differential Operators I Distribution Theory and Fourier Analysis. Moscow: Mir, 1986, 464 p. Available at: <http://www.bookre.org/reader?file=442772>. (In Russ.)
- [6] Shanz M., Antes H. A Boundary Integral Formulation for the Dynamic Behavior of a Timoshenko Beam. *Electronic Journal of Boundary Elements*, 2002, vol. BETEQ, no. 3, pp. 348–359. Available at: https://www.researchgate.net/publication/228746551_A_boundary_integral_formulation_for_the_dynamic_behavior_of_a_Timoshenko_beam.
- [7] Wu B.C., Altiero N.J. A new numerical method for the analysis of anisotropic thin plate bending problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1981, vol. 25, issue 3, pp. 343–353. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(81\)90037-2](https://doi.org/10.1016/0045-7825(81)90037-2).
- [8] Shi G., Bezine G. A general boundary integral formulation for the anisotropic plate bending problems. *Journal of Composite Materials*, 1988, vol. 22, pp. 694–716. DOI: <http://doi.org/10.1177/002199838802200801>.
- [9] Albuquerque E.L., Sollero P., Venturini W.S., Aliabadi M.H. Boundary element analysis of anisotropic Kirchhoff plates. *International Journal of Solids and Structures*, July 2006, vol. 43, issues 14–15, pp. 4029–4046. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.03.027>.
- [10] Guryanov I.N., Artyukhin Yu.P. Fundamental solution of the plane problem and the bending plates problem of an anisotropic body. Kazan: KGU, 1994, 33 p. (In Russ.)
- [11] Levada V.S. Construction of a fundamental solution for the bending an anisotropic plate problem. *Pridneprovskii nauchnyi vestnik*, 1996, no. 4, p. 8. (In Russ.)

- [12] Velikanov P.G., Artyukhin Yu.P., Kukanov N.I. Bending of an anisotropic plate by the method of boundary elements. *Actual problems of continuum mechanics-2020*. Kazan: Kazanskii universitet – izd-vo Akademii nauk RT, 2020, pp. 105–111. (In Russ.)
- [13] Artyukhin Yu.P., Gribov A.P. Solving problems of nonlinear deformation of plates and shallow shells by the method of boundary elements. Kazan: Fen, 2002, 199 p. Available at: <https://booksee.org/book/438702>. (In Russ.)
- [14] Gribov A.P., Velikanov P.G. Application of the Fourier transformation to obtain a fundamental solution to the bending an orthotropic plate problem. In: *Proceedings of the All-Russian Scientific Conference (26-28 May 2004). Part 3. Matem. Mod. Kraev. Zadachi*. Samara: SamGTU, 2004, pp. 67–71. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=7556596>; <http://mi.mathnet.ru/mmzkz191> (In Russ.)
- [15] Crouch S.I., Starfield S. Boundary element in solid mechanics. Moscow: Mir, 1987, 328 p. Available at: <https://booksee.org/book/438609>. (In Russ.)
- [16] Vorovich I.N. Mathematical problems of the nonlinear theory of shallow shells. Moscow: Nauka, 1989, 376 p. Available at: <https://booksee.org/book/449596>. (In Russ.)
- [17] Grigolyuk E.I., Shalashilin V.I. Problems of nonlinear deformation. Moscow: Nauka, 1988, 232 p. Available at: <https://booksee.org/book/438580>. (In Russ.)
- [18] Rvachev V.L., Kurpa L.V., Khomenko M.M., Bolotina A.Yu. Application of the theory of R-functions to the calculation of flexible orthotropic flat shells of complex shape in plan. In: *Proceedings of the XV All-Union Conference on the Theory of Shells and Plates, vol. 1*. Kazan: Izdatel'stvo Kazanskogo universiteta, 1990, pp. 342–347. (In Russ.)
- [19] Chia C.Y. Nonlinear analysis of plates. New York: Mc. Graw-Hill International Book Co., 1980, XIV, 422 p.