

МЕХАНИКА MECHANICS



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-2-33-47

УДК 531.39



Дата: поступления статьи: 26.02.2021
после рецензирования: 30.03.2021
принятия статьи: 28.05.2021

П.Г. Великанов

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
г. Казань, Российская Федерация

E-mail: pvelikanov@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0845-2880>

Н.И. Куканов

Ульяновский государственный технический университет,
г. Ульяновск, Российская Федерация

E-mail: kukanov_n_i@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0880-4591>

Д.М. Халитова

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
г. Казань, Российская Федерация

E-mail: diana982000@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2239-9222>

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕПРЯМОГО МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАСЧЕТА ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ВИНКЛЕРА И ПАСТЕРНАКА — ВЛАСОВА

АННОТАЦИЯ

Задачи расчета, сочетающих в себе легкость, экономичность, высокую прочность и надежность тонкостенных конструкций на упругом основании, актуальны для современного машиностроения. В связи с этим использование изотропных материалов на упругом основании, представляется оправданным, поэтому их расчет и рассматривается в настоящей статье. Задачи теории пластин и оболочек относятся к классу краевых задач, аналитическое решение которых в силу различных обстоятельств (нелинейность дифференциальных уравнений, сложность геометрии и граничных условий и др.) определить невозможно. Решить эту проблему помогают численные методы. Среди численных методов незаслуженно мало внимания уделено методу граничных элементов. В связи с этим дальнейшее развитие непрямого метода граничных элементов (метода компенсирующих нагрузок) для решения задач теории изотропных пластин на упругом основании Винклера и Пастернака — Власова, основанных на применении точных фундаментальных решений, является актуальным.

Ключевые слова: механика; математика; дифференциальные уравнения; пластинки на упругом основании Винклера и Пастернака — Власова; фундаментальные решения; функции влияния; не прямой метод граничных элементов; метод компенсирующих нагрузок.

Цитирование. Великанов П.Г., Куканов Н.И., Халитова Д.М. Использование непрямого метода граничных элементов для расчета изотропных пластин на упругом основании Винклера и Пастернака — Власова // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2021. Т. 27, № 2. С. 33–47. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-2-33-47>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Великанов П.Г., 2021

Петр Геннадьевич Великанов — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, 420008, Российская Федерация, г. Казань, ул. Кремлевская, 18; кафедра реактивных двигателей и энергетических установок, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ, 420111, Российская Федерация, г. Казань, ул. К. Маркса, 10.

© Куканов Н.И., 2021

Николай Иванович Куканов — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры промышленного и гражданского строительства, Ульяновский государственный технический университет, 432027, Российская Федерация, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, 32.

© Халитова Д.М., 2021

Диана Марселевна Халитова — магистрант, Казанский (Приволжский) федеральный университет, 420008, Российская Федерация, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

1. Предварительные сведения

Целью исследования является развитие непрямого метода граничных элементов (НМГЭ) или, как его еще называют, метода компенсирующих нагрузок для решения задач деформирования изотропных пластин на упругом основании со сложным контуром в условиях термомеханического нагружения (сосредоточенные, распределенные нагрузки и температурные поля) при различных граничных условиях.

Рассматриваются малые деформации тонкой линейно-упругой пластинки на упругом основании, деформирование которой описывается моделью, основанной на гипотезах Кирхгофа — Лява в рамках теории малого изгиба [1].

При рассмотрении пластин постоянной толщины получим дифференциальное уравнение равновесия изотропной пластинки на упругом основании Винклера и Пастернака — Власова, в которой был выделен слева линейный дифференциальный оператор соответствующих задач.

Для решения поставленной задачи МГЭ необходимо предварительно определить фундаментальное решение задачи изгиба изотропной пластины на упругом основании Винклера и Пастернака — Власова.

Для определения фундаментального решения задачи изгиба изотропной пластины на упругом основании Винклера и Пастернака — Власова и затем с помощью НМГЭ решения этих задач была использована универсальная методика, предложенная в [1–4]. Для отработки методики были решены несколько задач изгиба изотропных пластин на упругом основании Винклера и Пастернака — Власова.

2. Постановка задачи

Дифференциальное уравнение изгиба тонкой изотропной линейно-упругой пластины, лежащей на упругом основании и находящейся под действием температурного поля, имеет вид:

$$D\nabla^2\nabla^2W = p_z(x, y) - p(W) - (1 + \nu)\frac{\alpha_t}{h}\Delta T,$$

где ∇^2 — оператор Лапласа; W — прогиб точки срединной поверхности пластины; p_z — интенсивность нормального давления, действующего на пластину; p — реактивное давление, которое зависит от упругого основания, на котором лежит пластина; ν — коэффициент Пуассона (коэффициент поперечной деформации); α_t — коэффициент линейного температурного расширения; h — толщина пластины; ΔT — изменение температуры между поверхностями пластины.

Рассмотрим упругое основание, которое характеризуется следующей функцией:

$$p(W) = K_1W + K_2W^2 + K_3W^3 - g_1\frac{\partial^2W}{\partial x^2} - g_2\frac{\partial^2W}{\partial y^2},$$

где K_i ($i = 1, 2, 3$) и g_i ($i = 1, 2$) — коэффициенты упругого основания. В таблице приведено несколько возможных вариантов оснований.

*Таблица
Table*

Наиболее распространенные варианты упругих оснований
The most common options for elastic foundations

$K_1 \neq 0; K_2 = K_3 = g_1 = g_2 = 0$	Линейное изотропное основание Винклера (Циммермана — Фусса)
$K_1 \neq 0; K_2 = K_3 = 0; g_1 = g_2 = g \neq 0$	Линейное основание Пастернака — Власова
$K_1 \neq 0; K_2 = K_3 = 0; g_1 \neq g_2 \neq 0$	Линейное ортотропное основание
$K_1 \neq 0; K_2 \neq 0; K_3 \neq 0$	Нелинейное основание

В дальнейшем будем рассматривать линейные упругие основания Винклера и Пастернака — Власова как самые распространенные.

3. Определение фундаментального решения задачи изгиба изотропной пластины на упругом основании Винклера и Пастернака — Власова

Пусть дана система линейных дифференциальных уравнений в частных производных [5]:

$$L_0 U(x, y) = F(x, y), \quad (1)$$

где $L_0 = [L_{lm}(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})]$ — исходный линейный дифференциальный оператор в частных производных, $l, m = \overline{1, N}$; $U(x, y) = [u_l(x, y)]^T$ — векторная функция, подлежащая определению; $F(x, y) = [f_l(x, y)]^T$ — заданная векторная функция правых частей; $l, m = \overline{1, N}$.

Решение системы (1) $U(x, y)$ представимо в виде свертки:

$$U(x, y) = L_0^{-1} F(x, y) = G * F = \int_{\Omega} G(x - \xi, y - \eta) F(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad \xi, \eta \in \Omega,$$

где L_0^{-1} — интегральный оператор, ядром которого является матрица фундаментального решения $G(x - \xi, y - \eta)$ системы линейных дифференциальных уравнений; Ω — область определения дифференциального оператора L_0 .

Матрица фундаментального решения $G(x - \xi, y - \eta)$ определяется из выражения вида:

$$L_0 G(x - \xi, y - \eta) = \delta(x - \xi, y - \eta) I, \quad (2)$$

где $\delta(x - \xi, y - \eta)$ — двумерная дельта-функция Дирака; I — единичная матрица размерностью $N \times N$. Фундаментальные решения определяются с точностью до решения однородной системы уравнений $L_0 G(x - \xi, y - \eta) = 0$ и, кроме того, являются обобщенными функциями.

Из (2) видно, что фундаментальное решение $G(x - \xi, y - \eta)$ зависит только от свойств дифференциального оператора L_0 .

В дальнейшем фундаментальное решение $G(x - \xi, y - \eta)$ будем обозначать $G(t, \zeta) = G(t - \zeta)$, где $t(x, y)$ и $\zeta(\xi, \eta)$.

Элементы матрицы $G(t, \zeta)$ определяются из решения систем дифференциальных уравнений вида:

$$\sum_{k=1}^N L_{mk} G_{kl}(t, \zeta) = \delta_{lm} \delta(t - \zeta), \quad (l, m = \overline{1, N}), \quad (3)$$

где δ_{lm} — символ Кронекера.

Решение систем (3) осуществляется, например, методом двумерного интегрального преобразования Фурье [1–4]. Без ограничения общности и в целях экономии места далее предполагаем, что точка приложения единичных сосредоточенных нагрузок, которые моделируются обобщенной δ -функцией Дирака, находится в начале координат.

Двумерная трансформанта (образ, изображение) $\bar{f}(\xi, \eta)$ функции $f(x, y)$ определяется выражением вида:

$$F[f(x, y)] = \bar{f}(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{i(\xi x + \eta y)} dx dy, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Соотношение между трансформантами производных от $f(x, y)$ и самой трансформантой $\bar{f}(\xi, \eta)$ может быть определено следующим выражением:

$$F\left[\frac{\partial^{(n+m)} f(x, y)}{\partial x^n \partial y^m}\right](\xi, \eta) = (-i\xi)^n (-i\eta)^m \bar{f}(\xi, \eta).$$

Трансформанта двумерной обобщенной δ -функции Дирака, которая, в силу присущих ей свойств, представима в виде $\delta(x, y) = \delta(x)\delta(y)$, определяется из следующего соотношения: $F[\delta(x, y)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x, y) e^{i(\xi x + \eta y)} dx dy = \frac{1}{2\pi}$.

Трансформанты для производных δ -функции Дирака примут вид:

$$F[\delta^{(m+n)}(x, y)] = \frac{1}{2\pi} (-i\xi)^m (-i\eta)^n.$$

Системы (3) в пространстве трансформант примут вид:

$$\sum_{k=1}^N L_{mk}(-i\xi, -i\eta) \bar{G}_{kl}(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \delta_{lm}, \quad (l, m = \overline{1, N}).$$

Формула обращения двумерного интегрального преобразования Фурье (прообраз, оригинал) имеет вид: $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\xi, \eta) e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta$.

При вычислении несобственных интегралов будем пользоваться свойством:

$$\frac{\partial^{(n+m)} f(x, y)}{\partial x^n \partial y^m} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (-i\xi)^n (-i\eta)^m \bar{f}(\xi, \eta) e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.$$

Для вычисления интегралов будем использовать теорию вычетов из комплексного анализа: если $Q(z)$ — функция, где z — комплексное число, удовлетворяющая условиям:

- 1) аналитическая при $Im z \geq 0$ всюду, за исключением числа полюсов, лежащих на действительной оси;
- 2) не имеет полюсов на действительной оси;
- 3) при $z \rightarrow \infty$ функция $zQ(z) \rightarrow 0$ равномерно при $0 \leq arg z \leq \pi$;
- 4) интегралы $\int_0^{\infty} Q(x) dx$ и $\int_{-\infty}^0 Q(x) dx$ являются сходящимися, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x) dx = 2\pi i \sum_{Imz \geq 0} Res Q(z).$$

Кроме того,

$$\int_0^{\infty} Q(x) \cos mx dx = \pi i \sum_{Imz \geq 0} Res Q(z) e^{imz};$$

$$\int_0^{\infty} Q(x) \sin mx dx = \pi \sum_{Imz \geq 0} Res Q(z) e^{imz}.$$

Если $z = a$ — полюс функции $Q(z)$ порядка m , то вычет функции $Q(z)$ определяется по формуле:

$$Res Q(a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m Q(z)].$$

Для вычисления расходящихся интегралов далее будем вводить в рассмотрение обобщенную функцию $\Theta(\eta)$, производная от которой также будет обобщенной, и пользоваться правилом дифференцирования обобщенных функций [4].

Рассмотрим вычисление несобственных интегралов следующих типов:

$$I_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)} e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta,$$

$$I_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2 + \lambda^2)} e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.$$

Интеграл $I_1(x, y)$ определим, воспользовавшись свойством интегралов от четных и нечетных функций на интервале, симметричном относительно начала координат:

$$I_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)} e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \eta y d\eta \int_0^{\infty} \frac{\cos \xi x d\xi}{(\xi^2 + \eta^2)} = \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta} e^{-\eta x} \cos \eta y d\eta,$$

где была использована теория вычетов:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \xi x}{(\xi^2 + \eta^2)} d\xi = \pi i \sum_{Imz \geq 0} Res \frac{e^{izx}}{(z^2 + \eta^2)} = \pi i \frac{e^{iz_1 x}}{2z_1} \Big|_{z_1=i\eta} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\eta} e^{-\eta x}.$$

Внешний интеграл вычислим с помощью теории обобщенных функций [4]. Рассмотрим обобщенную функцию вида:

$$\Theta(\eta) = \ln \eta_+ = \begin{cases} 0, & \eta \leq 0, \\ \ln \eta, & \eta > 0. \end{cases}$$

Производная этой функции есть обобщенная функция $\Theta'(\eta) = \frac{1}{\eta}, \eta > 0$.

Согласно правилу дифференцирования обобщенных функций, имеем

$$(\Theta', \varphi) = -(\Theta, \varphi') = - \int \varphi'(\eta)\Theta(\eta)d(\eta),$$

где $\varphi(\eta)$ – основная функция (бесконечное число раз дифференцируемая и в бесконечно удаленной точке сама функция и ее бесконечное число производных стремятся к нулю).

Здесь в качестве основной функции выступает функция $\varphi(\eta) = e^{-\eta x} \cos \eta y$. Учитывая все вышесказанное, получим:

$$\begin{aligned} I_1(x, y) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta} e^{-\eta x} \cos \eta y d\eta = x \int_0^{\infty} e^{-\eta x} \cos \eta y \ln \eta d\eta + y \int_0^{\infty} e^{-\eta x} \sin \eta y \ln \eta d\eta = \\ &= -\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - C = -(\ln r + C), \end{aligned}$$

где входящие интегралы являются табличными; $r^2 = x^2 + y^2$, $C = 0.5772157 \dots$ – постоянная Эйлера.

Рассмотрим интеграл $I_2(x, y)$:

$$I_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2 + \lambda^2)} e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \eta y d\eta \int_0^{\infty} \frac{\cos \xi x d\xi}{(\xi^2 + \eta^2 + \lambda^2)}.$$

Аналогично рассмотренному выше

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \xi x}{(\xi^2 + \eta^2 + \lambda^2)} d\xi = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{\eta^2 + \lambda^2}} e^{-x\sqrt{\eta^2 + \lambda^2}},$$

отсюда

$$I_2(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\eta^2 + \lambda^2}} e^{-x\sqrt{\eta^2 + \lambda^2}} \cos \eta y d\eta = K_0(\lambda r),$$

где $K_0(\lambda r)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка; этот интеграл также является табличным.

Опираясь на все вышеизложенное, можно показать, как получаются фундаментальные решения задачи изгиба изотропной пластины на упругом основании Винклера и Пастернака – Власова.

3.1. Нахождение фундаментального решения с помощью метода последовательного интегрирования

Запишем, например, уравнение изгиба изотропной пластины на упругом основании Винклера в виде:

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \chi^4 \right) W(x, y) = \frac{q(x, y)}{D} \quad (L_0 W(x, y) = \frac{q(x, y)}{D}),$$

где $\chi^4 = \frac{K_1}{D}$; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – изгибная (цилиндрическая) жесткость пластины.

Представим дифференциальный оператор изгиба пластины на упругом основании L_0 в виде двух последовательных операторов Гельмгольца:

$$L_0 = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \chi^4 \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - i\chi^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + i\chi^2 \right).$$

Фундаментальное решение ищем в виде:

$$L_0 G_1(x, y) = \frac{\delta(x, y)}{D}.$$

После введения тривиального обозначения получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - i\chi^2 \right) \tilde{G}_1(x, y) = \frac{\delta(x, y)}{D}.$$

Далее к этому дифференциальному уравнению последовательно применяем двумерное интегральное преобразование Фурье, выделение трансформанты $\tilde{G}_1(x, y)$, применение формулы обращения двумерного интегрального преобразования Фурье. В результате $\tilde{G}_1(x, y)$ примет вид:

$$\tilde{G}_1(x, y) = -\frac{1}{2\pi D} K_0(\sqrt{i}\chi r).$$

Далее по известной величине $\tilde{G}_1(x, y)$ восстанавливаем $G_1(x, y)$:

$$G_1(x, y) = -\frac{i}{2D} \int_0^{\infty} r K_0(\sqrt{i}\chi(r_0)) H_0^{(2)}(\sqrt{i}\chi(r - r_0)) dr_0,$$

где $H_0^{(2)}$ — функция Ханкеля 0-го порядка 2-го рода.

Выполняя аналогичные действия с дифференциальным оператором изгиба пластины на упругом основании L_0 в виде двух переставленных последовательных операторов Гельмгольца, получим

$$L_0 = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \chi^4 \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + i\chi^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - i\chi^2 \right),$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + i\chi^2 \right) \tilde{G}_2(x, y) = \frac{\delta(x, y)}{D},$$

$$\tilde{G}_2(x, y) = \frac{i}{4D} H_0^{(2)}(\sqrt{i}\chi r),$$

$$G_2(x, y) = -\frac{i}{2D} \int_0^{\infty} r H_0^{(2)}(\sqrt{i}\chi(r_0)) K_0(\sqrt{i}\chi(r - r_0)) dr_0.$$

Итоговое фундаментальное решение задачи изгиба изотропной пластины на упругом основании Винклера получим в виде суммы ранее полученных решений, используя свойства цилиндрических функций:

$$G(x, y) = G_1(x, y) + G_2(x, y) = -\frac{l^2}{2\pi D} kei_0\left(\frac{r}{l}\right),$$

где $\chi^4 = \frac{1}{l^4} = \frac{K_1}{D}$; $kei_0\left(\frac{r}{l}\right)$ — функция Томпсона-Кельвина.

Для подтверждения правильности найденного фундаментального решения задачи изгиба изотропной пластины на упругом основании Винклера рассмотрим еще 2 варианта его нахождения:

а) трансформанта Фурье фундаментального решения задачи изгиба изотропной пластины на упругом основании Винклера имеет вид:

$$\bar{G}(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi D} \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)^2 + \chi^4} = \frac{i}{4\pi D \chi^2} \left(\frac{1}{\xi^2 + \eta^2 + i\chi^2} - \frac{1}{\xi^2 + \eta^2 - i\chi^2} \right).$$

Восстанавливая его оригинал с точностью до решения однородного уравнения, получим

$$G(x, y) = \frac{i}{4\pi D \chi^2} K_0(\sqrt{i}\chi r) - \frac{1}{8D \chi^2} H_0^{(2)}(\sqrt{i}\chi r) = -\frac{l^2}{2\pi D} kei_0\left(\frac{r}{l}\right);$$

б) трансформанта Фурье фундаментального решения задачи изгиба изотропной пластины на упругом основании Винклера имеет вид:

$$\bar{G}(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi D} \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2)^2 + \chi^4} = -\frac{1}{2\pi D \chi^2} Im \frac{1}{\xi^2 + \eta^2 + i\chi^2}.$$

Восстанавливая оригинал, получим:

$$G(x, y) = -\frac{1}{2\pi D \chi^2} Im(K_0(\chi r \sqrt{i})) = -\frac{l^2}{2\pi D} kei_0\left(\frac{r}{l}\right).$$

Таким образом, различные варианты получения фундаментального решения задачи изгиба изотропной пластины на упругом основании Винклера совпали.

Для проверки правильности полученного фундаментального решения задачи изгиба изотропной пластины на упругом основании Винклера были использованы две методики: с помощью формулы дифференцирования обобщенных функций [4]

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)_G + (-1)^{i-1} \delta(x_1, \dots, x_n) \int_{\Gamma} \Phi dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n,$$

где $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)_G$ — обычная производная от функции Φ , Γ — граница области G (один из контуров, внутри которого находится особенность) и с помощью проверки равновесия пластины на упругом основании Винклера, ограниченной кривой, при действии на нее единичной нагрузки. Результаты проверок подтверждают правильность найденного фундаментального решения задачи изгиба изотропной пластины на упругом основании Винклера.

Все вышеприведенные действия были также проведены и для получения фундаментального решения задачи изгиба изотропной пластины на упругом основании Пастернака — Власова, изгиб которой описывается дифференциальным уравнением вида:

$$L_0 W(x, y) = \frac{p_z(x, y)}{D},$$

где $L_0 = \nabla^2 - 2p^2 \Delta + \chi^4$ — дифференциальный оператор; k_z, k_t — параметры упругого основания (первый и второй коэффициенты постели или коэффициенты сжатия и сдвига соответственно);

$$2p^2 = \frac{g}{D} = \frac{k_t h^2}{4D}, \quad \chi^4 = \frac{K_1}{D} = \frac{k_z}{D} = \frac{1}{l^4}.$$

В зависимости от величины дискриминанта знаменателя трансформанты в уравнении получаем различные варианты значений для полюсов подынтегральной функции, которые окажут существенное влияние на окончательный вид фундаментального решения. В [1] рассмотрены эти варианты и ряд других, которые получаются из них как частные случаи: а) $p > \chi \Rightarrow G(x, y) = -\frac{1}{4\pi s^2 D} [K_0(\sqrt{p^2 + s^2} r) - K_0(\sqrt{p^2 - s^2} r)]$, $s^2 = \sqrt{p^4 - \chi^4}$;

б) $p < \chi \Rightarrow G(x, y) = -\frac{1}{2\pi \beta^2 D} kei_0(r/l, \varphi)$, $\beta^2 = \sqrt{\chi^4 - p^4}$, $\varphi = \frac{1}{2} \arctan \frac{\beta^2}{p^2}$;

в) $p = \chi \Rightarrow G(x, y) = -\frac{1}{4\pi D \chi^2} kei'_0(r/l, 0)$;

г) $\chi = 0 \Rightarrow G(x, y) = -\frac{1}{4\pi p^2 D} [\ln r + K_0(\sqrt{2p} r)]$;

е) $p = 0 \Rightarrow G(x, y) = -\frac{l^2}{2\pi D} kei_0(r/l)$;

ф) $p = \chi = 0 \Rightarrow G(x, y) = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r$.

Можно заметить, что в этот перечень входят, наряду с другими, фундаментальное решение задачи изгиба изотропной пластины, лежащей на упругом основании Винклера е) и фундаментальное решение задачи изгиба изотропной пластины ф).

Для реально существующих материалов пластин, лежащих на упругом основании Пастернака — Власова, имеет место случай б):

$$G(x, y) = -\frac{1}{2\pi \beta^2 D} kei_0(r/l, \varphi),$$

где $kei_0(x, \varphi)$ — обобщенная функция Томпсона-Кельвина (мнимая часть обобщенной модифицированной функции Бесселя второго рода нулевого порядка K_0).

4. Непрямой метод граничных элементов (метод компенсирующих нагрузок) при изгибе пластин

Рассмотрим тонкую линейно-упругую пластину, срединная поверхность которой занимает область Ω^+ , ограниченную гладким кусочно-лиapunовским контуром Γ (рис. 1). Дополним область Ω^+ областью Ω^- до бесконечной области. По контуру Γ к бесконечной пластине приложим компенсирующие нагрузки $q(\zeta), m(\zeta)$. Нагрузки $q(\zeta)$ и $m(\zeta)$ — распределенные по контуру Γ усилие, нормальное к поверхности пластины, и момент вокруг касательной к контуру Γ соответственно.

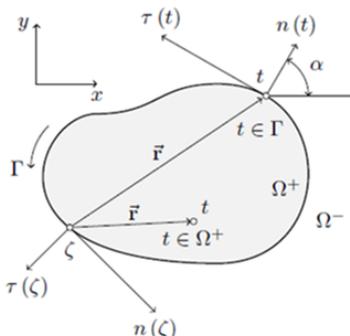


Рис. 1. Тонкая линейно-упругая пластина
 Fig. 1. Thin linear elastic plate

Решение задачи изгиба многосвязной пластины рассматривается как сумма основного (частного) и компенсирующего решений [6]:

$$W(t) = W^r(t) + \sum_{i=1}^M \left[\int_{\Gamma_i} G(t, \zeta) q^i(\zeta) - \frac{\partial G(t, \zeta)}{\partial n_1} m^i(\zeta) ds(\zeta) \right], \quad (4)$$

где $W^r(t) = \int_{\Omega^+} G(t, \zeta) p_z(\zeta) d\Omega(\zeta) + \sum_{i=1}^n G(t, \zeta_i) P_i(\zeta_i)$.

Здесь $t(x, y)$ — точка внутренней области Ω^+ ; $\zeta(\xi, \eta)$ — точка контура Γ ; $G(t, \zeta)$ — фундаментальные решения задачи изгиба пластины, лежащей на упругом основании Винклера или Пастернака — Власова; $p_z(\zeta)$ — интенсивность нормального давления, действующего на пластину; P_i — модуль сосредоточенной силы, приложенной в точке ζ_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Основное решение определяет деформацию бесконечной пластины от заданных нагрузок; компенсирующее решение определяет действие на бесконечную пластину системы сил, распределенных по контуру (компенсирующих нагрузок), за счет действия которых выполняются краевые условия на контуре пластины. Сумма основного и компенсирующего решения должна удовлетворять дифференциальному уравнению изгиба изотропной пластины, лежащей на упругом основании Винклера или Пастернака — Власова.

На контуре пластины рассмотрим следующие граничные условия:

$$W = 0, \quad W_{,n} = \frac{\partial W}{\partial n} = 0 \text{ — жесткая заделка,} \quad (5)$$

$$W = 0, \quad M_n = 0 \text{ — шарнирное опирание,} \quad (6)$$

$$V_n = k_1 W, \quad M_n = k_2 W_{,n} \text{ — упругое закрепление.} \quad (7)$$

Здесь M_n, V_n — изгибающий момент и обобщенная поперечная сила на контуре Γ ; k_1, k_2 — постоянные, определяющие упругие свойства закрепления (при $k_1 = k_2 = 0$ получим граничные условия свободного края).

Усилия и моменты на контуре пластины в глобальной декартовой системе координат X, Y определяются по формулам [4]:

$$\begin{aligned} M_n &= M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha + M_{xy} \sin 2\alpha; \\ M_T &= M_x \sin^2 \alpha + M_y \cos^2 \alpha - M_{xy} \sin 2\alpha; \\ M_{n\tau} &= -\frac{M_x - M_y}{2} \sin 2\alpha + M_{xy} \cos 2\alpha; \quad Q_n = Q_x \cos \alpha + Q_y \sin \alpha; \\ V_n &= Q_n + \frac{\partial M_{n\tau}}{\partial s}, \end{aligned}$$

где для задачи изгиба изотропной пластины соотношения примут вид:

$$\begin{aligned} M_x &= -D(W_{,xx} + \nu W_{,yy}); \quad M_y = -D(W_{,yy} + \nu W_{,xx}); \quad M_{xy} = -D(1 - \nu)W_{,xy}; \\ Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta W = -D(W_{,xxx} + W_{,xyy}); \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta W = -D(W_{,yyy} + W_{,xxy}). \end{aligned}$$

Для изотропной пластины, лежащей на упругом основании, моменты и усилия на контуре пластины можно также определить в локальной системе координат n, τ , построенной в точке $t(x, y)$ контура, где записываются граничные условия. При этом ось n — внешняя нормаль к контуру в этой точке; а ось τ — касательная к контуру в этой точке.

Усилия и моменты в локальной системе координат для задачи изгиба изотропной пластины определяются по формулам:

$$\begin{aligned} M_n &= -D(\Delta W - (1 - \nu)W_{,\tau\tau}); \quad M_\tau = -D(\Delta W - (1 - \nu)W_{,nn}); \\ M_{n\tau} &= -D(1 - \nu)W_{,n\tau}; \quad Q_n = -D\Delta W_{,n} \quad V_n = Q_n + \frac{\partial M_{n\tau}}{\partial s}, \end{aligned}$$

где $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial n^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$ — оператор Лапласа в локальной системе координат.

При определении производной по дуговой координате контура $\frac{\partial M_{n\tau}}{\partial s}$ следует учитывать, что $\alpha = \alpha(s)$; $k = \frac{\partial \alpha}{\partial s} = \pm \frac{1}{\rho'}$ — кривизна контура в рассматриваемой точке (алгебраическая величина), ρ' — радиус кривизны контура в данной точке. В результате выражение для обобщенной поперечной силы запишем в виде:

$$V_n = -D \left(\frac{\partial}{\partial n} \Delta W + (1 - \nu) \left[\frac{\partial^3 W}{\partial n \partial \tau^2} - k(2W_{,xy} \sin 2\alpha + [W_{,xx} - W_{,yy}] \cos 2\alpha) \right] \right) =$$

$$= -D\left(\frac{\partial}{\partial n}\Delta W + (1 - \nu)\left[\frac{\partial^3 W}{\partial n \partial \tau^2} - k\left(\frac{\partial^2 W}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}\right)\right]\right).$$

Компенсирющие нагрузки определяются из граничных условий (5)–(7) на контуре пластины, которые записываются на контуре Γ для области Ω^+ .

Известно, что выражение (4) в точности удовлетворяет дифференциальным уравнениям задачи изгиба изотропной пластины на упругом основании Винклера и Пастернака — Власова. Чтобы (4) было решением краевой задачи, необходимо из системы сингулярных интегральных уравнений, которая получается при подстановке (4) в краевые условия (5)–(7) на контуре пластины, определить компенсирующие нагрузки $q(\zeta)$, $m(\zeta)$. При этом нужно совершить предельный переход точки $t(x, y)$ из внутренней области Ω^+ на границу Γ . Тогда ядра интегральных уравнений будут определены во всех точках контура, за исключением точки, где $t(x, y) = \zeta(\xi, \eta)$. В этой точке ядра потенциалов будут иметь особенности.

В области Ω^+ изгибающие и крутящий моменты, а также поперечные силы для изотропной пластины, лежащей на упругом основании, по известным компенсирующим нагрузкам $q(\zeta)$, $m(\zeta)$, определяются по формулам:

$$M_x(t) = -D \int_{\Gamma} \left[\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) q(\zeta) - \left(\frac{\partial^3 G}{\partial x^2 \partial n_1} + \nu \frac{\partial^3 G}{\partial y^2 \partial n_1} \right) m(\zeta) \right] ds(\zeta) + M_x^r(t);$$

$$M_y(t) = -D \int_{\Gamma} \left[\left(\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right) q(\zeta) - \left(\frac{\partial^3 G}{\partial y^2 \partial n_1} + \nu \frac{\partial^3 G}{\partial x^2 \partial n_1} \right) m(\zeta) \right] ds(\zeta) + M_y^r(t);$$

$$M_{xy}(t) = -D(1 - \nu) \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} q(\zeta) - \frac{\partial^3 G}{\partial x \partial y \partial n_1} m(\zeta) \right] ds(\zeta) + M_{xy}^r(t);$$

$$Q_x(t) = -D \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial \Delta G}{\partial x} q(\zeta) - \frac{\partial^2 \Delta G}{\partial x \partial n_1} m(\zeta) \right] ds(\zeta) + Q_x^r(t);$$

$$Q_y(t) = -D \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial \Delta G}{\partial y} q(\zeta) - \frac{\partial^2 \Delta G}{\partial y \partial n_1} m(\zeta) \right] ds(\zeta) + Q_y^r(t),$$

где

$$M_x^r(t) = -D\left(\frac{\partial^2 W^r(t)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W^r(t)}{\partial y^2}\right); \quad M_y^r(t) = -D\left(\frac{\partial^2 W^r(t)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W^r(t)}{\partial x^2}\right); \quad M_{xy}^r(t) = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 W^r(t)}{\partial x \partial y};$$

$$Q_x^r(t) = -D\left(\frac{\partial^3 W^r(t)}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 W^r(t)}{\partial x \partial y^2}\right); \quad Q_y^r(t) = -D\left(\frac{\partial^3 W^r(t)}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 W^r(t)}{\partial y^3}\right).$$

5. Определение ядер потенциалов, входящих в интегральные уравнения изгиба пластин на упругом основании, и интегральные уравнения изгиба изотропной пластины, лежащей на упругом основании

Для формирования разрешающей системы интегральных уравнений метода компенсирующих нагрузок и при определении перемещений и напряжений в пластине необходимы аналитические выражения ядер потенциалов, которые получаются при подстановке (4) в краевые условия (5)–(7).

С учетом предельных значений потенциалов по методике [7], а также результатов дифференцирования фундаментального решения задачи изгиба пластины на упругом основании запишем сингулярные интегральные уравнения, из решения которых определяются компенсирующие нагрузки $q(\zeta)$, $m(\zeta)$ для различных граничных условий. При этом предельные значения потенциалов берутся в области Ω^+ .

1) Жесткая заделка

$$\int_{\Gamma} G(t, \zeta) q(\zeta) ds(\zeta) - \int_{\Gamma} \frac{\partial G(t, \zeta)}{\partial n_1} m(\zeta) ds(\zeta) + W^r(t) = 0,$$

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial G(t, \zeta)}{\partial n} q(\zeta) ds(\zeta) - \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 G(t, \zeta)}{\partial n \partial n_1} m(\zeta) ds(\zeta) + \frac{\partial W^r(t)}{\partial n} = 0.$$

2) Шарнирное закрепление

$$\int_{\Gamma} G(t, \zeta) q(\zeta) ds(\zeta) - \int_{\Gamma} \frac{\partial G(t, \zeta)}{\partial n_1} m(\zeta) ds(\zeta) + W^r(t) = 0,$$

$$\frac{1}{2} m(t) - D \int_{\Gamma} [\Delta G(t, \zeta) - (1 - \nu) \frac{\partial^2 G(t, \zeta)}{\partial \tau^2}] q(\zeta) ds(\zeta) +$$

$$+ D \int_{\Gamma} [\frac{\partial \Delta G(t, \zeta)}{\partial n_1} - (1 - \nu) \frac{\partial^3 G(t, \zeta)}{\partial \tau^2 \partial n_1}] m(\zeta) ds(\zeta) + M_n^r(t) = 0,$$

3) Свободный край

$$\frac{1}{2} m(t) - D \int_{\Gamma} [\Delta G(t, \zeta) - (1 - \nu) \frac{\partial^2 G(t, \zeta)}{\partial \tau^2}] q(\zeta) ds(\zeta) + D \int_{\Gamma} [\frac{\partial \Delta G(t, \zeta)}{\partial n_1} - (1 - \nu) \frac{\partial^3 G(t, \zeta)}{\partial \tau^2 \partial n_1}] m(\zeta) ds(\zeta) +$$

$$+ M_n^r(t) = 0,$$

$$\frac{1}{2} q(t) - D \int_{\Gamma} [\frac{\partial \Delta G(t, \zeta)}{\partial n} + (1 - \nu) (\frac{\partial^3 G(t, \zeta)}{\partial n \partial \tau^2} - k(t) (\frac{\partial^2 G(t, \zeta)}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 G(t, \zeta)}{\partial \tau^2}))] q(\zeta) ds(\zeta) + D \int_{\Gamma} [\frac{\partial^2 \Delta G(t, \zeta)}{\partial n \partial n_1} +$$

$$+ (1 - \nu) (\frac{\partial^4 G(t, \zeta)}{\partial n \partial \tau^2 \partial n_1} - k(t) (\frac{\partial^3 G(t, \zeta)}{\partial n^2 \partial n_1} - \frac{\partial^3 G(t, \zeta)}{\partial \tau^2 \partial n_1}))] m(\zeta) ds(\zeta) + V_n^r(t) = 0,$$

где введены обозначения

$$M_n^r(t) = -D[W_{,nn}^r(t) + \nu W_{,\tau\tau}^r(t)];$$

$$V_n^r(t) = -D(\frac{\partial}{\partial n} \Delta W^r(t) + (1 - \nu) [\frac{\partial^3 W^r(t)}{\partial n \partial \tau^2} - k(t) (\frac{\partial^2 W^r(t)}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 W^r(t)}{\partial \tau^2})]).$$

Функции плотностей $q(\zeta)$ и $m(\zeta)$ удовлетворяют условию Гельдера:

$$|q(t) - q(\zeta)| \leq C|t - \zeta|^\alpha, \quad |m(t) - m(\zeta)| \leq C|t - \zeta|^\alpha,$$

где $C = const > 0$, $0 < \alpha \leq 1$.

Внеинтегральные члены $q(t)/2, m(t)/2$ в интегральных уравнениях получаются на основе анализа предельных значений потенциалов [7].

6. Численная реализация

Для формирования и численного решения системы сингулярных интегральных уравнений контур Γ , ограничивающий область Ω^+ , занимаемую пластиной, разбивается на граничные элементы, которые являются отрезками прямых линий или дугами окружностей, т. е. контур Γ аппроксимируется контуром $\Gamma^N = \sum_{j=1}^N \Gamma_j$ и $\Gamma^N \rightarrow \Gamma$ при $N \rightarrow \infty$ или $\max_j |\Gamma_j| \rightarrow 0$, где N – количество элементов контура Γ^N .

В пределах элемента компенсирующие нагрузки $q(\zeta)$ и $m(\zeta)$ считаются постоянными. Точки коллокации берутся в узлах, которые располагаются в серединах элементов Γ_j .

Для решения систем сингулярных интегральных уравнений применяется метод механических квадратур [4]. При удовлетворении граничным условиям в узлах, после вычисления интегралов, решение задачи сводится к системе линейных алгебраических уравнений вида:

$$\sum_{j=1}^N q(\zeta_j) G_{ij} - \sum_{j=1}^N m(\zeta_j) H_{ij} + A_i = 0, \quad \overline{1, N},$$

$$\sum_{j=1}^N q(\zeta_j) R_{ij} - \sum_{j=1}^N m(\zeta_j) M_{ij} + B_i = 0, \quad \overline{1, N},$$

где коэффициенты $G_{ij}, H_{ij}, R_{ij}, M_{ij}$ в зависимости от вида граничных условий принимают соответствующие выражения и представляют собой интегралы по элементу Γ_j ; A_i, B_i – правые части системы уравнений, принимающие соответствующие выражения в зависимости от граничных условий; $q(\zeta_j) = q_i, m(\zeta_j) = m_j$ – искомые значения компенсирующих нагрузок, принимающие постоянные значения в пределах каждого элемента Γ_j . Система состоит из $2N$ уравнений с $2N$ неизвестными, т. е. является замкнутой и имеет единственное решение.

Интегралы $G_{ij}, H_{ij}, R_{ij}, M_{ij}$ при $i \neq j$ не имеют особенностей и вычисляются по восьмиузловой квадратурной формуле Гаусса. При $i = j$ ядра интегралов имеют особенности типа $\ln r, 1/r, 1/r^2$ при $r \rightarrow 0$ и, кроме того, необходимо учесть внеинтегральные члены уравнений. Такие сингулярные интегралы по Γ_j вычисляются аналитически.

7. Вычисление сингулярных интегралов по элементам контура

Рассмотрим для примера аналитического вычисления интегралов от фундаментального решения и его производных по прямолинейным элементам контура, где подынтегральные функции могут иметь особенности при $x \rightarrow \xi, y \rightarrow \eta$. Считаем, что компенсирующие нагрузки в пределах этих элементов постоянны, поэтому они входят в интегральные уравнения в виде множителей перед интегралами от фундаментального решения и его производных.

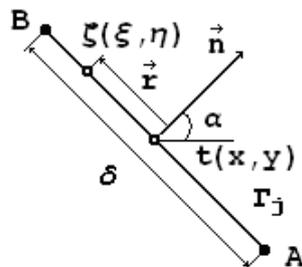


Рис. 2. Прямолинейный граничный элемент
 Fig. 2. Straight boundary element

Пусть $\Gamma_j (j = 1, 2, \dots, N)$ — один из элементов контура Γ , представляющий собой отрезок прямой (рис. 2), соединяющей точки (x_A, y_A) и (x_B, y_B) , а $t(x, y)$ — середина отрезка Γ_j :

$$x = (x_A + x_B)/2; y = (y_A + y_B)/2.$$

Введем координату t_0 , определяющую положение точки $\zeta(\xi, \eta)$ на Γ_j :

$$\xi = \frac{(x_A + x_B)}{2} + \frac{(x_B - x_A)}{2}t_0; \quad \eta = \frac{(y_A + y_B)}{2} + \frac{(y_B - y_A)}{2}t_0,$$

где $t_0 \in [-1; +1]$.

Расстояние между точками t и ζ равно

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} = \frac{|t_0|}{2} \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \frac{|t_0|}{2} \delta,$$

где δ — длина отрезка Γ_j .

Фундаментальное решение и его производные зависят от аргументов $x - \xi, y - \eta$, которые определяются выражениями

$$x - \xi = -\frac{(x_B - x_A)}{2}t_0; \quad y - \eta = -\frac{(y_B - y_A)}{2}t_0.$$

Выразим элемент длины ds через координату t_0

$$ds = \sqrt{(\xi'_{t_0})^2 + (\eta'_{t_0})^2} dt_0 = \sqrt{\left(\frac{(x_B - x_A)}{2}\right)^2 + \left(\frac{(y_B - y_A)}{2}\right)^2} dt_0 = \frac{\delta}{2} dt_0.$$

Таким образом, все подынтегральные выражения от фундаментального решения и его производных зависят лишь от t_0 и сингулярные интегралы от них могут быть легко вычислены.

8. Результаты решения некоторых задач

Пример 1

Кольцевая пластина с внешним радиусом $R = 0.1$ м и внутренним радиусом $r = 0.05$ м лежит на упругом основании Пастернака — Власова с коэффициентами постели $k_z = 15400$ МН/м³, $k_t = 10000$ МН/м³ (рис. 3). Внутренний контур шарнирно оперт, а внешний — жестко зацементирован. На пластину действует постоянная равномерно распределенная поперечная нагрузка $p_z = 1$ МПа. Физические параметры: $h = 0.01$ м, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0.3$. При численном решении каждый контур разбивался на 40 элементов, а частное решение принято в виде $W^r(t) = \frac{p_z}{k_z}$. На рис. 4, а, б приведены результаты решения поставленной задачи: графики распределения прогибов W , углов поворота W_r , радиального M_r и тангенциального M_φ моментов по радиусу пластины. Точки соответствуют численному решению НМГЭ, а непрерывные линии — точному решению задачи, которое ищется в виде:

$$W(r) = C_1 ber\left(\frac{r}{l}, \varphi\right) + C_2 bei\left(\frac{r}{l}, \varphi\right) + C_3 ker\left(\frac{r}{l}, \varphi\right) + C_4 kei\left(\frac{r}{l}, \varphi\right) + W^r(r),$$

где постоянные C_i определяются из граничных условий на контурах пластины. Как видно, в пределах точности графиков результаты решений совпадают.

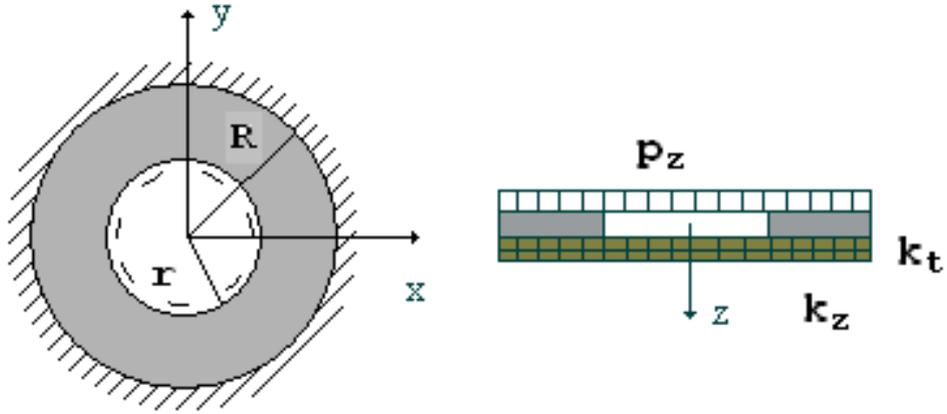


Рис. 3. Кольцевая пластина для расчета
Fig. 3. Ring plate for calculation

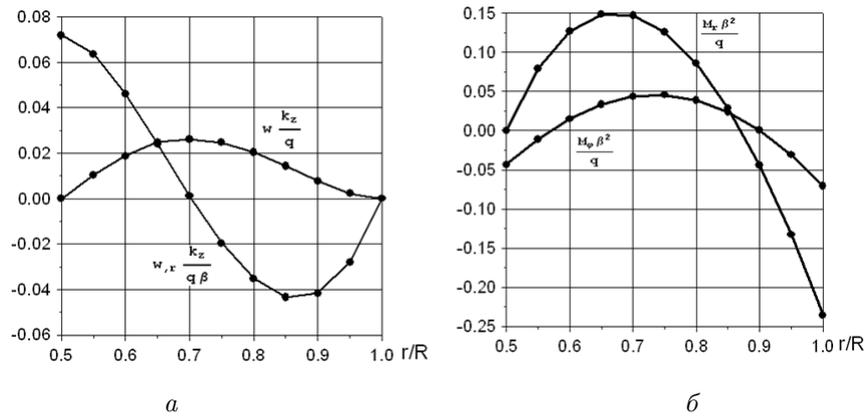


Рис. 4. Результаты расчета
Fig. 4. Calculation results

Пример 2

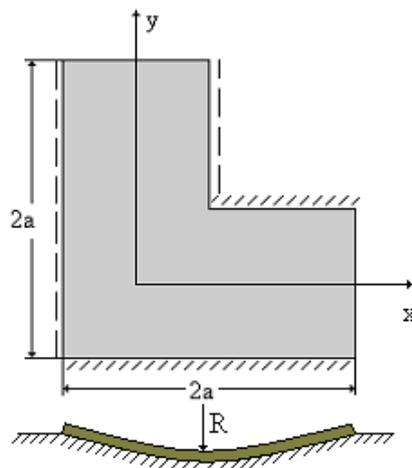


Рис. 5. Пологая сферическая оболочка
Fig. 5. Shallow spherical shell

Квадратная в плане пологая изотропная сферическая оболочка радиуса R с угловым вырезом размером a с граничными условиями шарнирного закрепления (пунктирная линия), жесткой заделки (наклонная линия) и свободного края (нет линии) (рис. 5) лежит на упругом основании Винклера. Оболочка находится под действием постоянного температурного поля, которое по толщине пластины изменяется по линейному закону, и сосредоточенной силы P , приложенной в начале координат. Перепад температуры по толщине пластины $\Delta T = 100$ град. Коэффициент температурного расширения материала примем следующим: $\alpha_t = 0.125 \cdot 10^{-4}$ град $^{-1}$. Геометрические и механические параметры пластины: $a = 0.1$ м, $h = 0.01$ м, $R = 0.5$ м, $K_z = 15400$ МН/м 3 , $P = 4000$ Н, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0.3$. Контур разбит на 60 элементов, по 10 на каждую сторону.

В качестве дифференциального уравнения изгиба оболочки необходимо использовать уравнение следующего вида:

$$\nabla^2 \nabla^2 W - \frac{k_t h^2}{4D} \nabla^2 W + \frac{1}{D} \left(k_z + \frac{Eh}{R^2} \right) W = \frac{p_z(x, y)}{D} - (1 + \nu) \frac{\alpha_t}{h} \nabla^2 \Delta T,$$

конкретизируя его на случай основания Винклера ($k_t = 0$).

На рис. 6 представлены результаты решения поставленной задачи: на рис. 6, а прогиб w , а на рис. 6, б напряжения (как нормальные, так и касательные) $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ при $z = h/2$ в сечении пластины $x = 0$. На графиках напряжений сплошная линия соответствует σ_x ; пунктирные линии (линия с большей длиной пунктира и линия с меньшей длиной пунктира) – соответственно σ_y и τ_{xy} .

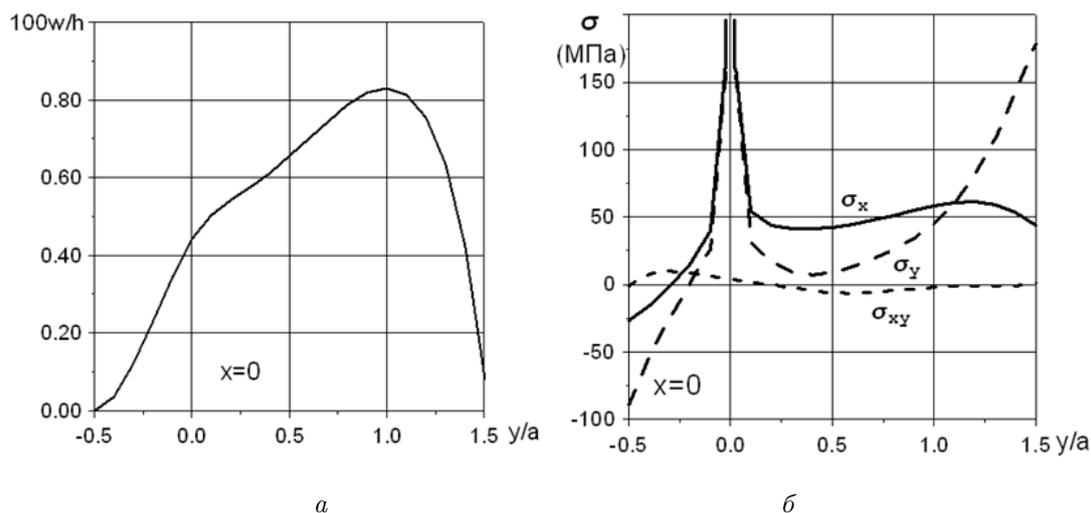


Рис. 6. Результаты расчета
 Fig. 6. Calculation results

Пример 3

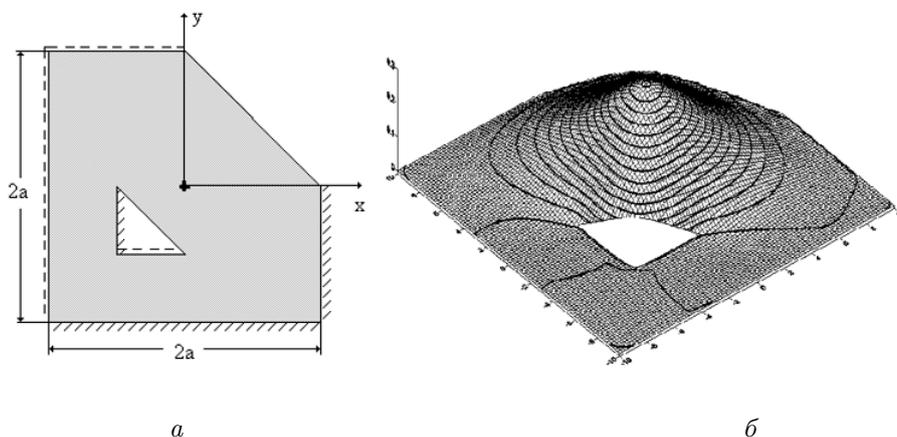


Рис. 7. Двусвязная пластина сложной формы
 Fig. 7. Doubly connected plate of complex shape

Двусвязная пластина сложной формы с различными граничными условиями на отдельных участках лежит на упругом основании и находится под действием термомеханического нагружения (сосредоточенной силы P , приложенной в начале координат и линейного по толщине температурного поля) (рис. 7, *a*). Параметры пластины и поля: $h = 0.01$ м, $a = 0.1$ м, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0.3$, $k_z = 15400$ МН/м³, $P = 5000$ Н, $\Delta T = 100$ град, $\alpha_t = 0.125 \cdot 10^{-4}$ град⁻¹.

На рис. 7, *б* приведена поверхность распределения прогиба W с линиями уровня.

Выводы

Таким образом, в данной статье сначала различными методами были получены фундаментальные решения, а затем НМГЭ были решены задачи расчета изотропных пластин на упругом основании Винклера и Пастернака — Власова. Для отработки методики были решены тестовые задачи, подтвердившие высокую точность результатов.

Литература

- [1] Великанов П.Г. Метод граничных интегральных уравнений для решения задач изгиба изотропных пластин, лежащих на сложном двухпараметрическом упругом основании // Известия Саратовского университета. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8, Вып. 1. С. 36–42. DOI: <http://doi.org/10.18500/1816-9791-2008-8-1-36-42>.
- [2] Куканов Н.И., Великанов П.Г. Температурный изгиб односвязных и многосвязных изотропных пластин непрямым методом граничных элементов // Актуальные проблемы современной науки: Труды 2-го Международного форума. Естественные науки. Ч. 1–3. Самара: Изд-во СГТУ, 2006. С. 178–183.
- [3] Великанов П.Г., Куканов Н.И., Халитова Д.М. Нелинейное деформирование цилиндрической панели ступенчато-переменной жесткости на упругом основании методом граничных элементов // Актуальные проблемы механики сплошной среды. Ижевск: ООО "Принт" 2020. С. 111–115.
- [4] Артюхин Ю.П., Грибов А.П. Решение задач нелинейного деформирования пластин и пологих оболочек методом граничных элементов. Казань: Фэн, 2002. 199 с. URL: <https://booksee.org/book/438702>.
- [5] Шевченко В.П. Интегральные преобразования в теории пластин и оболочек. Донецк: Донецкий государственный университет, 1977. 115 с.
- [6] Корнев Б.Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. Москва: Физматгиз. 1960. 458 с.
- [7] Панич О.И. О потенциалах полигармонического уравнения четвертого порядка // Мат. сборник. 1960. Вып. 3. Т. 50. С. 335–354. URL: <http://mi.mathnet.ru/msb4795>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-2-33-47

Submitted: 26.02.2021

Revised: 30.03.2021

Accepted: 28.05.2021

P.G. Velikanov

Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russian Federation
E-mail: pvelikanov@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0845-2880>

N.I. Kukanov

Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, Russian Federation
E-mail: kukanov_n_i@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0880-4591>

D.M. Khalitova

Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russian Federation
E-mail: diana982000@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2239-9222>

USE OF THE INDIRECT BOUNDARY ELEMENTS METHOD FOR
ISOTROPIC PLATES ON AN ELASTIC WINKLER BASE
AND PASTERNAK — VLASOV BASE

ABSTRACT

The calculation tasks combining lightness, economy, high strength and reliability of thin-walled structures on an elastic base are relevant for modern mechanical engineering. In this regard, the use of isotropic materials on an elastic base seems justified, therefore their calculation is considered in this article. The problems of the theory of plates and shells belong to the class of boundary value problems, the analytical solution of which, due to various circumstances (the nonlinearity of differential equations, the complexity of geometry and boundary conditions, etc.), cannot be determined. Numerical methods help to solve this problem. Among numerical methods, undeservedly little attention is paid to the boundary element method. In this regard, the further development of indirect compensating loads method for solving problems of the theory of isotropic plates on an elastic base of Winkler and Pasternak — Vlasov, based on the application of exact fundamental solutions, is relevant.

Key words: mechanics; mathematics; differential equations; plates on an elastic base of Winkler and Pasternak — Vlasov; fundamental solutions; influence functions; indirect boundary elements method; compensating loads method.

Citation. Velikanov P.G., Kukanov N.I., Khalitova D.M. Use of the indirect boundary elements method for isotropic plates on an elastic Winkler base and Pasternak-Vlasov base. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 33–47. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-2-33-47>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Velikanov P.G., 2021

Peter G. Velikanov — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of the Department of Theoretical Mechanics, Kazan (Volga Region) Federal University, 18, Kremlevskaya Street, Kazan, 420008, Russian Federation; Department of Jet Engines and Power Plants, Kazan National Research Technical University named after A.N.Tupolev-KAI, 10, K. Marx Street, Kazan, 420111, Russian Federation.

© Kukanov N.I., 2021

Nikolay I. Kukanov — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of the Department of Industrial and Civil Engineering, Ulyanovsk State Technical University, 32 Severny Venets Street, Ulyanovsk, 432027, Russian Federation.

© Khalitova D.M., 2021

Diana M. Khalitova — Master's degree student, Kazan (Volga Region) Federal University, 18, Kremlevskaya Street, Kazan, 420008, Russian Federation.

References

- [1] Velikanov P.G. Investigation of the isotropic plates bending lying on the complex two-parameter elastic foundation by boundary element method. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2008, vol. 8, issue 1, pp. 36–42. DOI: <http://doi.org/10.18500/1816-9791-2008-8-1-36-42>. (In Russ.)
- [2] Kukanov N.I., Velikanov P.G. Temperature bending of single-connected and multi-connected isotropic plates by the indirect boundary elements method. In: *Actual problems of modern science: proceedings of the 2nd International forum. Natural sciences. Parts 1–3*. Samara: Izd-vo SGTU, 2006, pp. 178–183. (In Russ.)
- [3] Velikanov P.G., Kukanov N.I., Khalitova D.M. Nonlinear deformation of a cylindrical panel of step-variable stiffness on an elastic base by the method of boundary elements. In: *Actual problems of continuum mechanics-2020*. Izhevsk: OOO "Print 2020, pp. 111–115. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44838517>; https://kpfu.ru/portal/docs/F600474390/apcm_2020.pdf. (In Russ.)
- [4] Artyukhin Yu.P., Gribov A.P. Solving of nonlinear deformation problems of plates and shallow shells by the boundary elements method. Kazan: Fen, 2002, 199 p. Available at: <https://booksee.org/book/438702>. (In Russ.)
- [5] Shevchenko V.P. Integral transformations in the theory of plates and shells. Donetsk: Donetskii gosudarstvennyi universitet, 1977, 115 p. (In Russ.)
- [6] Korenev B.G. Some problems of the theory of elasticity and thermal conductivity solved in Bessel functions. Moscow: Fizmatgiz, 1960, 458 p. (In Russ.)
- [7] Panich O.I. Potentials for polyharmonic equations of the fourth order. *Matematicheskii Sbornik. Novaya Seriya*, 1960, Vol. 50(92), Issue 3, pp. 335–354. Available at: <http://mi.mathnet.ru/msb4795>. (In Russ.)