 Научная статья
DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-2-25-32

УДК 517.982.22

Дата: поступления статьи: 11.03.2021
после рецензирования: 15.04.2021
принятия статьи: 28.05.2021

С.И. Страхов
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: www.stepan121@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2905-9124

ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ СИЛЬНО ВЛОЖЕННЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ В СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

АННОТАЦИЯ
Показано, что наличие нижней p-оценки с константой 1 в симметричном пространстве E достаточно для того, чтобы условие эквивалентности сходимости по норме и по мере на подпространстве H пространства E выполнялось тогда и только тогда, когда числовая характеристика $\eta_E(H) < 1$. Последний критерий справедлив также для симметричных пространств, "близких "к L_1, точнее, для которых справедлив аналог критерия Данфорда — Петтиса о слабой компактности. В частности, показано, что пространства, "близкие "к L_1, обладают свойством бинарности: характеристика $\eta_E(H)$ принимает лишь два значения, 0 и 1. Тем самым получен пример бинарных пространств Орлича, отличных от пространств L_p.

Ключевые слова: симметричное пространство; пространство Орлича; норма Люксембурга; норма Орлича; нижняя p-оценка; сильно вложенное подпространство; эквивалентные нормы; сходимость по мере.

Цитирование. Страхов С.И. Об одной характеристике сильно вложенных подпространств в симметричных пространствах // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2021. Т. 27, № 2. С. 25–32. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-2-25–32.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Степан Игоревич Страхов — аспирант кафедры функционального анализа и теории функций, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

В работе изучается следующая числовая характеристика подпространства H симметричного пространства (с. п.) E:

$$\eta_E(H) = \lim_{\tau\to 0} \sup_{x\in H} \frac{\|x^*\chi_{[0,\tau]}\|_E}{\|x\|_E}, \tag{1}$$

где $x^*(t)$ — невозрастающая непрерывная слева перестановка функции (см. § 2), в неявном виде впервые появившаяся в работе Кадеца — Пелчинского [1] для L_1, позже для произвольного с. п. у Токарева в [2]. Нас будут интересовать значения этой характеристики на подпространствах, в которых сходимость по норме эквивалентна сходимости по мере (т. е. на *сильно вложенных* подпространствах). Один из критериев сильной вложенности подпространства H говорит о том, что в сепарабельном случае она

[1]Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2021-1393).

эквивалентна отсутствию в нём почти дизъюнктных последовательностей. В то же время, если H содержит почти дизъюнктную последовательность, то $\eta_E(H) = 1$. Если для любого подпространства с. п. E верно также и обратное утверждение, то мы будем говорить, что E имеет *η-нормальную структуру.* Как показано в [3], сепарабельные пространства Орлича с нормой Люксембурга имеют η-нормальную структуру. С другой стороны, при некоторых условиях на индексы Бойда в несепарабельном с. п. можно ввести эквивалентную норму так, чтобы η-нормальная структура отсутствовала [4]. В данной работе показано, что с. п. E имеет η-нормальную структуру, если E удовлетворяет нижней p-оценке с константой 1 для некоторого $p < \infty$.

Характеристика (1), вообще говоря, не инвариантна относительно эквивалентных перенормировок, поэтому возникает вопрос, когда η-нормальная структура сохраняется при такой перенормировке. В частности, этим свойством обладают бинарные пространства, т. е. такие, в которых характеристика (1) принимает лишь два значения, 0 и 1. Симметричные пространства, в которых верен аналог критерия Данфорда — Петтиса о слабой компактности, бинарны (см. теорему 3). С помощью этого результата мы получим примеры бинарных пространств Орлича, отличных от пространств L_p.

1. Предварительные сведения

Банахово пространство E измеримых на $[0, 1]$ функций называется *симметричным* (кратко с. п.) или *перестановочно-инвариантным*, если

1) оно идеально, т. е. из $|x(t)| \leqslant |y(t)|$ для п. в. $t \in [0, 1]$, измеримости x и $y \in E$ следует: $x \in E$ и $\|x\|_E \leqslant \|y\|_E$;

2) из *равноизмеримости* функций x и y, т. е. равенства

$$\mu(\{t \in [0, 1] : |y(t)| > u\}) = \mu(\{t \in [0, 1] : |x(t)| > u\}), \ \ \forall u > 0,$$

где $\mu(e)$ — мера Лебега множества $e \subset \mathbb{R}$, и $y \in E$ вытекает $x \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$.

В частности, любая измеримая на $[0, 1]$ функция $x(t)$ равноизмерима со своей невозрастающей непрерывной слева *перестановкой*

$$x^*(t) := \inf\{u \geqslant 0 \ : \ \mu(\{s \in [0, 1] : |x(s)| > u\}) < t\}, \ \ 0 < t \leqslant 1.$$

Хорошо известно, что всякое с. п. является промежуточным между L_∞ и L_1, т. е. $L_\infty \subset E \subset L_1$. Также будем считать, что в с. п. выполнено условие нормировки:

$$\|\chi_{[0,1]}\|_E = 1,$$

где χ_e — характеристическая функция множества $e \subset [0, 1]$.

Стандартный пример симметричного пространства — пространство Лебега L_p, $p \in [1, \infty]$. Естественным обобщением L_p служат так называемые пространства Орлича. Функция $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ называется функцией Орлича, если она строго возрастает, непрерывна, $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = \infty$, $\phi(0) = 0$ и $\phi(1) = 1$. Пространство Орлича L_ϕ состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций $x = x(t)$ таких, что норма Люксембурга

$$||x||_\phi = \inf\left\{u > 0 : \int_0^1 \phi\left(\frac{|x(t)|}{u}\right) dt \leqslant 1\right\}$$

конечна. Часто пространство L_ϕ рассматривают с нормой Орлича

$$\|x\|^0_\phi = \sup\Big\{ \int\limits_0^1 |x(t)y(t)|dt : \int\limits_0^1 \psi(|y(t)|)dt \leqslant 1\Big\},$$

где $\psi(t) := \sup_{u\geqslant 0}(ut - \phi(u))$ — сопряженная функция к ϕ. Введенные нормы эквивалентны:

$$\|x\|_\phi \leqslant \|x\|^0_\phi \leqslant 2\|x\|_\phi.$$

Определение 1. Функция Орлича ϕ удовлетворяет Δ_2^∞-условию ($\phi \in \Delta_2^\infty$), если существуют константа $K \geqslant 2$ и $t_0 \geqslant 0$ такие, что

$$\phi(2t) \leqslant K\phi(t) \ \text{ для всех } \ t \geqslant t_0.$$

Если это неравенство имеет место для всех $t \geqslant 0$, то говорят, что ϕ удовлетворяет Δ_2 — условию ($\phi \in \Delta_2$).

Более полную информацию о функциях Орлича и пространствах Орлича можно найти в книгах [5–7].

Определение 2. [8, определение 6.4.4] Подпространство H симметричного пространства E называется сильно вложенным, если на H сходимость по норме E эквивалентна сходимости по мере.

Легко показать, что подпространство H сильно вложено тогда и только тогда, когда для некоторого $\varepsilon > 0$ имеем $H \subset M_{E,\varepsilon}$, где $M_{E,\varepsilon}$ — множество Кадеца — Пелчинского:

$$M_{E,\varepsilon} = \{x \in E, \quad \mu\big(t : |x(t)| \geqslant \varepsilon \|x\|_E\big) \geqslant \varepsilon\}.$$

В данной работе в основном изучается числовая характеристика (1). Очевидно, что $0 \leqslant \eta_E(H) \leqslant 1$ для любого подпространства H. Более того [9, предложение 3], $\eta_E(H) = 0$ тогда и только тогда, когда шар $B_1^H := \{x \in H : \|x\|_E \leqslant 1\}$ имеет равностепенно непрерывные нормы, т. е. если

$$\lim_{e \subset [0,1], \mu(e) \to 0} \sup_{x \in B_1^H} \|x\chi_e\|_E = 0. \tag{2}$$

С. п. E удовлетворяет нижней p-оценке с константой M, если для всякой последовательности попарно дизъюнктных функций $\{x_i\}_{i=1}^n$ из E выполняется

$$M\Big\| \sum_{i=1}^n x_i \Big\|_E \geqslant \Big(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_E^p \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

.

2. Основные результаты

Теорема 1. Пусть E — симметричное пространство и $H \subset E$ — подпространство. Рассмотрим следующие 3 условия:
(i) $\eta_E(H) < 1$;
(ii) существует $\varepsilon > 0$ такое, что $H \subset M_{E,\varepsilon}$;
(iii) существует $\delta > 0$ такое, что $H \subset R_{E,\delta}$, где

$$R_{E,\delta} = \{x \in E : \forall F \subset [0,1] : \mu(F) \geqslant 1 - \delta \text{ выполнено: } \quad \|x\chi_F\|_E \geqslant \delta \|x\|_E\}.$$

Тогда $(ii) \iff (iii), (i) \Rightarrow (ii)$. Более того, если E удовлетворяет нижней p-оценке с константой 1 для некоторого $p < \infty$, то $(ii) \Rightarrow (i)$.

Доказательство. Покажем справедливость импликации $(ii) \Rightarrow (iii)$. Пусть $H \subset M_{E,\varepsilon}$, то есть для всякого $x \in H$ мера $\mu(Q_1) \geqslant \varepsilon$, где

$$Q_1 := \{t : |x(t)| \geqslant \varepsilon \|x\|\}.$$

В данной теореме мы работаем только с нормой с. п. E, поэтому индекс у нормы опускаем.

Пусть $F \subset [0,1]$ и $\mu(F) \geqslant 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. Заметим, что $\mu(Q_1 \cap F) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Таким образом, если $x \in H$, то

$$\|x\chi_F\| \geqslant \|x\chi_{(F \cap Q_1)}\| \geqslant \varepsilon \|x\| \|\chi_{(F \cap Q_1)}\| \geqslant \varepsilon \|\chi_{[0,\frac{\varepsilon}{2}]}\| \|x\|.$$

Отсюда $x \in R_{E,\delta}$, где $\delta := \min(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon \|\chi_{[0,\frac{\varepsilon}{2}]}\|)$. Следовательно, $H \subset R_{E,\delta}$.

Докажем обратную импликацию $(iii) \Rightarrow (ii)$. Предположим, что (ii) не выполняется, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in H : \mu\big(t \in [0,1] : |x(t)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \|x\|\big) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Обозначим

$$Q_2 := \{t \in [0,1] : |x(t)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \|x\|\}.$$

Тогда $\mu([0,1] \setminus Q_2) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ и для каждого $t \in [0,1] \setminus Q_2$

$$|x(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \|x\|.$$

Отсюда

$$\|x\chi_{[0,1] \setminus Q_2}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \|x\| \|\chi_{[0,1] \setminus Q_2}\| < \varepsilon \|x\|,$$

т. е. $x \notin R_{E,\varepsilon}$. Так как $x \in H$ и ε произвольно, то получено противоречие с условием (iii).

Импликация $(i) \Rightarrow (ii)$ хорошо известна [3], для удобства читателя приведём доказательство. Пусть H не содержится в $M_{E,\varepsilon}$ для любого $\varepsilon > 0$, т. е. для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $x \in H$ такое, что $\mu(Q_1) < \varepsilon$. Из этого условия получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} \|x^*\chi_{[0,\varepsilon]}\| &\geqslant \|x^*\chi_{[0,\mu(Q_1)]}\| \geqslant \|x\chi_{Q_1}\| \geqslant \|x\| - \|x\chi_{[0,1] \setminus Q_1}\| \\ &\geqslant \|x\| - \varepsilon \|x\| \|\chi_{[0,1]}\| \geqslant (1 - \varepsilon)\|x\|. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\eta_E(H) \geqslant \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\|x^*\chi_{[0,\varepsilon]}\|}{\|x\|} \geqslant \lim_{\varepsilon\to 0}(1-\varepsilon) = 1,$$

и импликация доказана.

Предположим, что E удовлетворяет нижней p-оценке с константой 1 для некоторого $p < \infty$. Покажем, что тогда из (ii) следует (i). Если (i) не выполняется, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $H \subset M_{E,\varepsilon}$ и $\eta_E(H) = 1$. Отсюда, по определению характеристики $\eta_E(H)$ существуют последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\|x_n\| = 1$, $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\delta_n \to 0$ такие, что

$$\|x_n^*\chi_{(0,\delta_n)}\| \geqslant 1 - \frac{1}{n}.$$

Пусть $\delta_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. В силу условия $H \subset M_{E,\varepsilon}$ имеем

$$\|x_n^*\chi_{(\delta_n,1)}\| \geqslant \|x_n^*\chi_{(\frac{\varepsilon}{2},\varepsilon)}\| \geqslant \varepsilon\|\chi_{(0,\frac{\varepsilon}{2})}\|.$$

Так как пространство удовлетворяет нижней p-оценке с константой 1, то в силу полученных выше неравенств, при $\delta_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$,

$$1 = \|x_n^*\| \geqslant \Big(\|x_n^*\chi_{(0,\delta_n)}\|^p + \|x_n^*\chi_{(\delta_n,1)}\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \geqslant \Big((1-\frac{1}{n})^p + \varepsilon^p\|\chi_{(0,\frac{\varepsilon}{2})}\|^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

что невозможно, так как при достаточно большом n правая часть последнего неравенства строго больше 1.

В связи с доказанной теоремой введём

Определение 3. Симметричное пространство имеет η-нормальную структуру, если $\eta_E(H) < 1$ для всякого сильно вложенного подпространства $H \subset E$.

В [3] показано, что пространство Орлича с нормой Люксембурга при $\phi \in \Delta_2^{\infty}$ имеет η-нормальную структуру. Приведем другое (более короткое) доказательство этого результата в случае, когда $\phi \in \Delta_2$.

Следствие 1. Пусть ϕ — функция Орлича, $\phi \in \Delta_2$ и $\big(L_\phi, \|\cdot\|_\phi\big)$ — пространство Орлича с нормой Люксембурга. Тогда $\big(L_\phi, \|\cdot\|_\phi\big)$ имеет η-нормальную структуру.

Доказательство. Покажем, что для некоторого конечного p пространство $\big(L_\phi, \|\cdot\|_\phi\big)$ с нормой Люксембурга удовлетворяет нижней p-оценке с константой 1. Для этого достаточно в силу [10, следствие 3.4] показать, что отношение $\phi(t)/t^p$ при $t \to \infty$ убывает. Действительно, пусть $0 < s < t$ и

$$r := \log_2 K,$$

где K — константа из Δ_2-условия. Если $t \in [2^{m-1}s, 2^m s]$ для некоторого $m \geqslant 2$, то, применяя неравенство из Δ_2-условия m раз, получим

$$\frac{\phi(t)}{t^r} \leqslant K^m\frac{\phi(s)}{t^r} \leqslant K^m\frac{\phi(s)}{2^{r(m-1)}s^r} = K\frac{\phi(s)}{s^r}.$$

Отсюда

$$\frac{\phi(t)}{\phi(s)} \leqslant K\Big(\frac{t}{s}\Big)^r \leqslant \Big(\frac{t}{s}\Big)^{2r} = \Big(\frac{t}{s}\Big)^{2\log_2 K}.$$

Если же $t \in (s, 2s)$, то $t = (1-\theta)s + \theta\cdot 2s$, где $\theta := \frac{t}{s} - 1$ и тогда

$$\phi(t) \leqslant (1-\theta)\phi(s) + \theta\phi(2s) \leqslant (1-\theta+K\theta)\phi(s),$$

откуда, так как $K \geqslant 2$, по неравенству Бернулли,

$$\frac{\phi(t)}{\phi(s)} \leqslant 1 + (K-1)\theta \leqslant (1+\theta)^{K-1} = \Big(\frac{t}{s}\Big)^{K-1}.$$

Следовательно, отношение $\phi(t)/t^p$ убывает, если $p = \max(2\log_2 K; K-1)$. Для завершения доказательства осталось лишь воспользоваться теоремой 1.

С помощью аналогичных рассуждений этот результат можно доказать для нормы Орлича.

Следствие 2. Пусть ϕ — функция Орлича, такая, что $\phi \in \Delta_2$ и сопряжённая функция $\psi \in \Delta_2$. Тогда пространство Орлича $\big(L_\phi, \|\cdot\|_\phi^0\big)$ с нормой Орлича имеет η-нормальную структуру.

Доказательство. В силу теоремы 1, достаточно показать, что для некоторого конечного p пространство $\big(L_\phi, \|\cdot\|_\phi^0\big)$ удовлетворяет нижней p-оценке с константой 1.

Так как функция $\phi \in \Delta_2$, то существует такое конечное $p > 1$, что отношение $\phi(t)/t^p$, при $t \to \infty$, убывает. Заметим, что отношение $\phi(t)/t^p$ убывает тогда и только тогда, когда $\phi(t^{1/p})/t$ убывает (аналогично для возрастания). Покажем, что $\psi(s^{1/q})/s$ возрастает, где $1/p + 1/q = 1$. Действительно, по определению

$$\frac{\psi(s^{1/q})}{s} = \frac{1}{s}\sup_{t\geqslant 0}\bigl(ts^{1/q} - \phi(t)\bigr) = \Bigl[t := (sv)^{1/p}\Bigr] = \sup_{v\geqslant 0}\bigl(v(v^{-1/q} - \frac{\phi((sv)^{1/p})}{sv})\bigr).$$

Отсюда видно, что $\psi(s^{1/q})/s$ возрастает, следовательно, и $\psi(s)/s^q$ возрастает. Согласно [10, следствие 3.4] пространство $\bigl(L_\psi, \|\cdot\|_\psi\bigr)$ с нормой Люксембурга удовлетворяет верхней q-оценке с константой 1.

По [11, предложение 1.f.5], если с. п. E удовлетворяет верхней q-оценке с константой M, то сопряжённое пространство E^* удовлетворяет нижней p-оценке с константой M. По условию $\psi \in \Delta_2$, а значит,

$$\bigl(L_\psi, \|\cdot\|_\psi\bigr)^* = \bigl(L_\phi, \|\cdot\|_\phi^0\bigr),$$

см. [5, теорема 9.1]. Таким образом, $\bigl(L_\phi, \|\cdot\|_\phi^0\bigr)$ удовлетворяет нижней p-оценке с константой 1.

В [4, предложение 3] показано, что для произвольного с. п. $(E, \|\cdot\|_E)$ норма $|||x||| := \|x\|_E + \|x\|_{L_1}$ эквивалентна исходной норме $\|x\|_E$ и пространство $(E, |||\cdot|||)$ имеет η-нормальную структуру. Иными словами, всякое с. п. можно эквивалентно перенормировать так, чтобы в новой норме оно имело η-нормальную структуру.

С другой стороны, несепарабельное пространство, у которого индексы Бойда удовлетворяют условию $0 < \alpha_E \leqslant \beta_E < 1/2$, при соответствующей перенормировке не имеет η-нормальной структуры [4, теорема 3].

Определение 4. Симметричное пространство E называется бинарным, если характеристика $\eta_E(H)$ принимает лишь два значения, 0 и 1.

Теорема 2. Пусть симметричное пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ имеет η-нормальную структуру и бинарно. Тогда пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ сохраняет η-нормальную структуру при любой эквивалентной перенормировке.

Доказательство. Пусть $\|\cdot\|_1$ — норма, эквивалентная норме $\|\cdot\|_E$, и H — сильно вложенное подпространство $(E, \|\cdot\|_1)$. Так как нормы эквивалентны, то H будет также сильно вложенным подпространством пространства $(E, \|\cdot\|_E)$. Отсюда, применяя условия теоремы, получаем

$$\eta_{(E,\|\cdot\|_E)}(H) = 0.$$

Напомним, что $\eta_E(H) = 0$ тогда и только тогда, когда шар B_1^H имеет равностепенно непрерывные нормы (см. (2)). Но равенство (2) инвариантно относительно перенормировок, и, значит, оно имеет место и для $(E, \|\cdot\|_1)$. Тогда

$$\eta_{(E,\|\cdot\|_1)}(H) = 0,$$

и теорема доказана.

В частности, условиям последней теоремы, удовлетворяют пространства L_p, $p \in [1, 2)$. Действительно, они бинарны [3, теорема III.2] и по следствию 1 имеют η-нормальную структуру. Следующий результат показывает, что с. п., в некотором смысле "близкие "к L_1, бинарны. Более точно, если в с. п. верен аналог критерия Данфорда — Петтиса о слабой компактности (такие с. п. в [12] охарактеризованы как пространства с (Wm)-свойством), то оно будет бинарным.

Определение 5 [12]. Говорят, что симметричное пространство E на $[0, 1]$ имеет (Wm) - свойство $(E \in (Wm))$, если из слабой сходимости и сходимости по мере следует сходимость по норме, т. е., если из условий $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset E$, $x_n \overset{w}{\to} 0$ и $x_n \overset{\mu}{\to} 0$ следует: $\|x_n\|_E \to 0$.

Теорема 3. Если симметричное пространство $E \in (Wm)$, то E — бинарное пространство.

Доказательство. Пространство $L_1 \in (Wm)$ [12, теорема 5.5] и [8, теорема 5.2.9] и, как было сказано выше, бинарно. Пусть теперь $E \neq L_1$, $H \subset E$ — подпространство и $\eta_E(H) < 1$, и, значит, нормы L_1 и E эквивалентны на H. Легко видеть, что для любого $\tau \in [0, 1]$ отображение

$$x^*(t) \to \int\limits_0^1 x^*(t)\chi_{[0,\tau]}(t)dt,$$

где $x^*(t)$ — невозрастающая непрерывная слева перестановка функции (см. § 2), порождает линейный ограниченный функционал на E. Используя этот факт и эквивалентность норм на H, получим

$$\begin{aligned}\eta_{L_1}(H) \quad &= \quad \lim_{\tau\to 0}\sup_{x\in H}\frac{\|x^*\chi_{[0,\tau]}\|_{L_1}}{\|x\|_{L_1}} = \lim_{\tau\to 0}\sup_{x\in H}\frac{\int\limits_0^1 x^*(t)\chi_{[0,\tau]}(t)dt}{\|x\|_{L_1}} \leqslant \\ &\leqslant \lim_{\tau\to 0}\sup_{x\in H}\frac{\|x^*\|_E\|\chi_{[0,\tau]}\|_{E^*}}{\|x\|_{L_1}} \leqslant C\lim_{\tau\to 0}\|\chi_{[0,\tau]}\|_{E^*}.\end{aligned}$$

Так как $E \neq L_1$, то $E^* \neq L_\infty$, откуда $\lim_{\tau\to 0} \|\chi_{[0,\tau]}\|_{E^*} = 0$ и $\eta_{L_1}(H) = 0$. Отсюда шар B_1^H имеет равностепенно непрерывные нормы в L_1, и по теореме Данфорда — Петтиса [8, теорема 5.2.9] B_1^H относительно слабо компактно в L_1, что равносильно рефлексивности подпространства.

Рассмотрим тождественный оператор $I : E \to L_1$ (всякое с. п. вложено в L_1 (см. § 2), и поэтому оператор задан корректно). На основании эквивалентности норм E и L_1 на H сужение $I|_H$ — изоморфизм. Как известно из курса функционального анализа, нормированное пространство, изоморфное рефлексивному пространству, рефлексивно. Тогда H рефлексивно в E, и B_1^H относительно слабо компактно в H по норме E. Так как $E \in (Wm)$, то в E выполняется аналог критерия Данфорда — Петтиса [12], и, значит, B_1^H имеет равностепенно непрерывные нормы в E, откуда $\eta_E(H) = 0$.

Следствие 3. Пусть симметричное пространство $(E, \|\cdot\|_E) \in (Wm)$. Тогда E имеет η-нормальную структуру.

Доказательство. Пусть $\|\cdot\|_1$ — норма, эквивалентная $\|\cdot\|_E$, и такая, что с. п. $(E, \|\cdot\|_1)$ имеет η-нормальную структуру (см. рассуждения после следствия 2). Заметим, что (Wm)-свойство сохраняется при эквивалентной перенормировке, поэтому с. п. $(E, \|\cdot\|_1) \in (Wm)$, и, следовательно, оно бинарно. Тогда $(E, \|\cdot\|_1)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 и, значит, с. п. $(E, \|\cdot\|_E)$ обладает η-нормальной структурой.

Следствие 4. Пусть функция Орлича ϕ такая, что для сопряженной функции ψ выполняется:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\psi(Ct)}{\psi(t)} = \infty \tag{3}$$

для некоторого $C > 0$. Тогда пространство Орлича $\left(L_\phi, \|\cdot\|_\phi\right)$ бинарно.

Доказательство. Если ϕ удовлетворяет условию теоремы, то L_ϕ с нормой Люксембурга имеет свойство (Wm) [12, предложение 5.8], а все с. п. со свойством (Wm) бинарны.

Функции Орлича, удовлетворяющие условию последнего следствия, изучались в работах [12–14].

Если для функции Орлича ψ выполняется (3), то $\psi \notin \Delta_2^\infty$ (и, очевидно, $\psi \notin \Delta_2$), но, как легко показать, $(L_\phi, \|\cdot\|_\phi^0)$ будет иметь η-нормальную структуру. Это замечание несколько усиливает следствие 2, так как оно показывает, что условие $\psi \in \Delta_2$ не является необходимым в этом следствии. Стоит отметить, что существуют функции $\psi \notin \Delta_2^\infty$ и не удовлетворяющие (3) [14, теорема 4].

Литература

[1] Kadec M.I., Pelczyński A. Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p. *Studia Mathematica*, 21 (1962), pp. 161–176. DOI: https://doi.org/10.4064/SM-21-2-161-176.

[2] Токарев Е.В. О подпространствах некоторых симметричных пространств // Теория функций, функциональный анализ и их приложения: республиканский научный сборник. Харьков: Издательство Харьковского университета, 1962–1992. 1975. Вып. 24. С. 156–161. URL: http://dspace.univer.kharkov.ua/handle/123456789/16387.

[3] Новиков С.Я. Геометрические свойства симметричных пространств: дис. ... канд. физ.-матем. наук. Воронеж, 1980.

[4] Асташкин С.В., Семенов Е.М. Об одном свойстве симметричных пространств, второе ассоциированное пространство к которым несепарабельно // Матем. заметки, 2020. Т. 107. Вып. 1, С. 11-–22. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12365.

[5] Maligranda L. Orlicz Spaces and Interpolation // Seminars in Mathematics, 5, University of Campinas, Campinas, 1989.

[6] Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б. Выпуклые функции и пространства Орлича (Современные проблемы математики). Москва: Физматгиз, 1958. URL: https://knigogid.ru/books/1888340-vypuklye-funkcii-i-prostranstva-orlicha/toread.

[7] Harjulehto P., Hästö P. Orlicz spaces and Generalized Orlicz spaces. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Cham, 2019. DOI: http://doi.org/10.1007/978-3-030-15100-3.

[8] Albiac F., Kalton N.J. Topics in Banach Space Theory. Graduate Texts in Mathematics, vol. 233. New York: Springer, 2006. DOI: http://doi.org/10.1007/978-3-319-31557-7.

[9] Асташкин С.В., Страхов С.И. О симметричных пространствах со сходимостью по мере на рефлексивных подпространствах // Изв. вузов. Сер.: Матем., 2018, № 8, С. 3-–11. URL: http://mi.mathnet.ru/ivm9381

[10] Hao C., Kaminska A., Tomczak-Jaegermann N. Orlicz spaces with convexity or concavity constant one. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2006, vol. 320, issue 1, pp. 303–321. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.06.078.

[11] Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces, II. Function spaces. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1979. URL: https://books.google.ru/books?id=yPPrCAAAQBAJ&hl=ru&source=gbs_similarbooks.

[12] Astashkin S.V., Kalton N.J., Sukochev F.A. Cesaro mean convergence of martingale differences in rearrangement invariant spaces // *Positivity*, 2008, vol. 12, pp. 387-–406.

[13] Leśnik K., Maligranda L., Tomaszewski J. Weakly compact sets and weakly compact pointwise multipliers in Banach function lattices, 2019. URL: https://arxiv.org/pdf/1912.08164.pdf.

[14] Асташкин С.В., Страхов С.И. О дизъюнктно однородных пространствах Орлича–Лоренца // Матем. заметки, 2020. № 108:5. С. 643-–656. DOI: http://doi.org/10.4213/mzm12694.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-2-25-32

Submited: 11.03.2021
Revised: 15.04.2021
Accepted: 28.05.2021

S.I. Strakhov
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: www.stepan121@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2905-9124

ON A CHARACTERISTIC OF STRONGLY EMBEDDED SUBSPACES IN SYMMETRIC SPACES[2]

ABSTRACT

It is shown that the presence of a lower p - estimate with constant 1 in the symmetric space E is sufficient for the condition of equivalence of convergence in norm and in measure on the subspace H of the space E to be satisfied if and only if the numerical characteristic $\eta_E(H) < 1$. The last criterion is also valid for symmetric spaces "close "to L_1, more precisely, for which an analog of the Dunford - Pettis criterion of weak compactness is valid. In particular, it is shown that spaces "close "to L_1, have the binary property: the characteristic $\eta_E(H)$ takes only two values, 0 and 1. This gives an example of binary Orlicz spaces different from the spaces L_p.

Key words: rearrangement invariant space; Orlicz space; Luxemburg norm; Orlicz norm; lower p-estimate with constant one; strongly embedded subspace; equivalent norms; convergence in measure.

Citation. Strakhov S.I. On a characteristics of strongly embedded subspaces in symmetric spaces. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 25–32. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-2-25–32. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

Stepan I. Strakhov — postgraduate student of the Department of Functional Analysis and Function Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

[1] Kadec M.I., Pelczyński A. Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p. *Studia Mathematica*, 21 (1962), pp. 161–176. DOI: https://doi.org/10.4064/SM-21-2-161-176.

[2] Tokarev E.V. Subspaces of symmetric spaces of functions. *Functional Analysis and Its Applications*, 1979, vol. 13, pp. 152–153. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01077255. (English; Russian original)

[3] Novikov S.Ya. Geometric properties of symmetric spaces: Candidate's of Physical and Mathematical Sciences thesis. Voronezh, 1980. (In Russ.)

[4] Astashkin S.V., Semenov E.M. On a Property of Rearrangement Invariant Spaces whose Second Kothe Dual is Nonseparable. *Mathematical Notes*, 2020, vol. 107, pp. 10–19. DOI: http://doi.org/10.1134/S0001434620010022 (English; Russian original)

[2]The work was completed as a part of the implementation of the development program of the Scientific and Educational Mathematical Center of the Volga Federal District, agreement no. 075-02-2021-1393.

[5] Maligranda L. Orlicz Spaces and Interpolation. *Seminars in Mathematics 5*, University of Campinas, Campinas, 1989.

[6] Krasnoselskii M.A., Rutitskii Ya.B. Convex functions and Orlicz spaces (Modern problems of Mathematics). Moscow: Fizmatgiz, 1958. Available at: https://knigogid.ru/books/1888340-vypuklye-funkcii-i-prostranstva-orlicha/toread. (In Russ.)

[7] Harjulehto P., Hästö P. Orlicz spaces and Generalized Orlicz spaces. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Cham, 2019. 169 p. DOI: http://doi.org/10.1007/978-3-030-15100-3

[8] Albiac F., Kalton N.J. Topics in Banach Space Theory. Graduate Texts in Mathematics, vol. 233. New York: Springer, 2006. DOI: http://doi.org/10.1007/978-3-319-31557-7.

[9] Astashkin S.V., Strakhov S.I. On Symmetric Spaces With Convergence in Measure on Reflexive Subspaces. *Russian Mathematics*, 2018, vol. 62, pp. 1–8. DOI: http://doi.org/10.3103/S1066369X18080017 (English; Russian original)

[10] Hao C., Kaminska A., Tomczak-Jaegermann N. Orlicz spaces with convexity or concavity constant one. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2006, vol. 320, issue 1, pp. 303-–321. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.06.078.

[11] Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces, II. Function spaces. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1979. Available at: https://books.google.ru/books?id=yPPrCAAAQBAJ&hl=ru&source=gbs_similarbooks.

[12] Astashkin S.V., Kalton N.J., Sukochev F.A. Cesaro mean convergence of martingale differences in rearrangement invariant spaces. *Positivity*, 2008, vol. 12, pp. 387-–406. DOI: http://doi.org/10.1007/S11117-007-2146-Y.

[13] Leśnik K., Maligranda L., Tomaszewski J. Weakly compact sets and weakly compact pointwise multipliers in Banach function lattices. Available at: https://arxiv.org/pdf/1912.08164.pdf.

[14] Astashkin S.V., Strakhov S.I. On Disjointly Homogeneous Orlicz–Lorentz Spaces. *Mathematical Notes*, 2020, vol. 108, issue 5, pp. 631—642. DOI: http://doi.org/10.1134/S0001434620110012. (English; Russian original)