DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-2-16-24

УДК 517.928

Дата: поступления статьи: 18.03.2021
после рецензирования: 20.04.2021
принятия статьи: 28.05.2021

В.А. Соболев
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: v.sobolev@ssau.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7327-7340
Е.А. Тропкина
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: elena_a.85@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5970-6740
Е.А. Щепакина
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: shchepakina@yahoo.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2898-2865
Л. Жанг
Шаньдунский научно-технологический университет,
г. Циндао, Китайская Народная Республика
E-mail: li-jun0608@163.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5697-4611
Ч. Ван
Шаньдунский научно-технологический университет,
г. Циндао, Китайская Народная Республика
E-mail: jd_w@qq.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7551-540X

КРИТИЧЕСКИЕ БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ В ОДНОЙ МОДЕЛИ ТИПА "РЕАКЦИЯ–ДИФФУЗИЯ"[1]

АННОТАЦИЯ

Работа посвящена понижению размерности в задачах о бегущих волнах для систем типа "реакция–диффузия". Применяемый математический аппарат основан на геометрической теории сингулярных возмущений и технике траекторий-уток. Использование метода инвариантных многообразий сингулярно возмущенных систем позволяет заменить исследование бегущей волны исходной системы уравнений в частных производных анализом их профилей в системе обыкновенных дифференциальных уравнений более низкого порядка.

Ключевые слова: сингулярные возмущения; медленные инвариантные многообразия; критические бегущие волны; редукция; интегральное многообразие; асимптотическое разложение; дифференциальные уравнения; быстрые переменные; медленные переменные.

Цитирование. Соболев В.А., Тропкина Е.А., Щепакина Е.А., Zhang L., Wang J. Критические бегущие волны в одной модели типа "реакция–диффузия" // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2021. Т. 27, № 2. С. 16–24. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-2-16-24.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Владимир Андреевич Соболев — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ и ГФЕН в рамках научного проекта № 20-51-53008 и проекта NSFC No. 12011530062.

университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Елена Андреевна Тропкина — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Елена Анатольевна Щепакина — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Личунь Жанг — PhD, профессор, Шаньдунский научно-технологический университет, 266590, Китайская Народная Республика, провинция Шаньдун, г. Циндао, округ Гуаньдао, 579.

Чондон Ван — аспирант, Шаньдунский научно-технологический университет, 266590, Китайская Народная Республика, провинция Шаньдун, г. Циндао, округ Гуаньдао, 579.

Введение

В статье обсуждается, как геометрическая теория сингулярных возмущений и метод инвариантных многообразий [1–10] могут быть использованы для понижения размерности задач о бегущих волнах с сингулярными возмущениями. Такой подход позволяет исследовать критические бегущие волны [11–15]. Специфика таких бегущих волн состоит в том, что они разделяют волны с качественно различным поведением. В качестве иллюстрации рассматривается класс систем типа "реакция–диффузия".

Рассмотрим систему типа "реакция–диффузия" с одной пространственной переменной. В безразмерном виде модель описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= \varepsilon \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + f(x,y), \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{\varepsilon}{k}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + g(x,y), \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{\alpha(\nu_0 + x^\gamma)}{1+x^\gamma} - x(1+y), \\ g(x,y) &= x(\beta+y) - \delta y, \end{aligned}$$

x и y – безразмерные концентрации реагентов, $\beta > 1$ и $\gamma > 1$ [16].

1. Понижение размерности

Если для системы (1) решение типа бегущей волны существует, то оно может быть записано в форме

$$\begin{aligned} x(s,t) &= \varphi(s-ct) = \varphi(\xi), \\ y(s,t) &= \psi(s-ct) = \psi(\xi), \end{aligned} \tag{2}$$

где c – скорость волны.

Из соотношений (1) и (2) получаем

$$\begin{aligned} -c\frac{d\varphi}{d\xi} &= \varepsilon\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + \frac{\alpha(\nu_0+\varphi^\gamma)}{1+\varphi^\gamma} - \varphi(1+\psi), \\ -c\frac{d\psi}{d\xi} &= \frac{\varepsilon}{k}\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \varphi(\beta+\psi) - k\delta\psi. \end{aligned}$$

Последнюю систему уравнений удобно переписать в форме

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\xi} &= p, \\ \frac{d\psi}{d\xi} &= q, \\ \varepsilon\frac{dp}{d\xi} &= -cp - \frac{\alpha(\nu_0+\varphi^\gamma)}{1+\varphi^\gamma} + \varphi(1+\psi), \\ \varepsilon\frac{dq}{d\xi} &= -ckq - k\varphi(\beta+\psi) + k\delta\psi. \end{aligned} \tag{3}$$

Соответствующая вырожденная система ($\varepsilon = 0$) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\xi} &= p, \\ \frac{d\psi}{d\xi} &= q, \\ 0 &= -cp - \frac{\alpha(\nu_0+\varphi^\gamma)}{1+\varphi^\gamma} + \varphi(1+\psi) := h_1, \\ 0 &= -ckq - k\varphi(\beta+\psi) + k\delta\psi := h_2. \end{aligned} \tag{4}$$

Последние два уравнения системы (4) имеют единственное решение

$$\begin{aligned} p &= P_0(\varphi,\psi) = -\frac{\alpha(\nu_0+\varphi^\gamma)}{c(1+\varphi^\gamma)} + \frac{1}{c}\varphi(1+\psi), \\ q &= Q_0(\varphi,\psi) = -\frac{1}{c}\varphi(\beta+\psi) + \frac{\delta}{c}\psi, \end{aligned} \tag{5}$$

которое определяет медленную поверхность системы (3). Медленная поверхность является устойчивой или притягивающей [10], так как

$$trB(\varphi,\psi) < 0, \quad detB(\varphi,\psi) > 0,$$

где

$$B = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial p} & \dfrac{\partial h_1}{\partial q} \\ \dfrac{\partial h_2}{\partial p} & \dfrac{\partial h_2}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & -ck \end{pmatrix}.$$

В соответствии с геометрической теорией сингулярных возмущений в ε-окрестности медленной поверхности существует устойчивое (притягивающее) инвариантное многообразие, которое можно представить в форме

$$\begin{aligned} p = P(\varphi,\psi,\varepsilon) = P_0(\varphi,\psi) + \varepsilon P_1(\varphi,\psi) + O(\varepsilon^2), \\ q = Q(\varphi,\psi,\varepsilon) = Q_0(\varphi,\psi) + \varepsilon Q_1(\varphi,\psi) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{6}$$

Первые приближения функций P и Q, которые описывают медленное инвариантное многообразие, можно найти путем подстановки (6) в уравнения инвариантности

$$\begin{aligned} \varepsilon\left(\frac{\partial P}{\partial\varphi}P + \frac{\partial P}{\partial\psi}Q\right) &= -cP - \frac{\alpha(\nu_0+\varphi^\gamma)}{1+\varphi^\gamma} + \varphi(1+\psi), \\ \varepsilon\left(\frac{\partial Q}{\partial\varphi}P + \frac{\partial Q}{\partial\psi}Q\right) &= -ckQ - k\varphi(\beta+\psi) + k\delta\psi, \end{aligned}$$

которые следуют из (3). Таким образом, с учетом (6) имеем

$$\varepsilon\left(\frac{\partial P_0}{\partial\varphi}P_0 + \frac{\partial P_0}{\partial\psi}Q_0\right) + O(\varepsilon^2) = -c\left(P_0 + \varepsilon P_1 + O(\varepsilon^2)\right) - \frac{\alpha(\nu_0+\varphi^\gamma)}{1+\varphi^\gamma} + \varphi(1+\psi),$$

$$\varepsilon\left(\frac{\partial Q_0}{\partial\varphi}P_0 + \frac{\partial Q_0}{\partial\psi}Q_0\right) + O(\varepsilon^2) = -ck\left(Q_0 + \varepsilon Q_1 + O(\varepsilon^2)\right) - k\varphi(\beta+\psi) + k\delta\psi.$$

Приравнивая коэффициенты при первой степени ε в этих уравнениях, с учетом (5) получаем

$$P_1(\varphi,\psi) = -\frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{\alpha\gamma\varphi^{\gamma-1}(1-\nu_0)}{(1+\varphi^\gamma)^2} - 1 - \psi\right)\left(\frac{\alpha(\nu_0+\varphi^\gamma)}{1+\varphi^\gamma} - \varphi(1+\psi)\right) - \varphi^2(\beta+\psi) + \delta\varphi\psi\right],$$

$$Q_1(\varphi,\psi) = -\frac{1}{c^2k}\left[(\beta+\psi)\left(\frac{\alpha(\nu_0+\varphi^\gamma)}{1+\varphi^\gamma} - \varphi(1+\psi)\right) + (\varphi-\delta)(\varphi(\beta+\psi) - \delta\varphi)\right].$$

Таким образом, медленные движения системы (3) описываются уравнениями

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{d\xi} &= -\frac{\alpha(\nu_0+\varphi^\gamma)}{c(1+\varphi^\gamma)}+\frac{1}{c}\varphi(1+\psi)-\\
&-\frac{\varepsilon}{c^2}\left[\left(\frac{\alpha\gamma\varphi^{\gamma-1}(1-\nu_0)}{(1+\varphi^\gamma)^2}-1-\psi\right)\left(\frac{\alpha(\nu_0+\varphi^\gamma)}{1+\varphi^\gamma}-\varphi(1+\psi)\right)-\varphi^2(\beta+\psi)+\delta\varphi\psi\right]+O(\varepsilon^2),\\
\frac{d\psi}{d\xi} &= -\frac{1}{c}\varphi(\beta+\psi)+\frac{\delta}{c}\psi-\\
&-\frac{\varepsilon}{c^2k}\left[(\beta+\psi)\left(\frac{\alpha(\nu_0+\varphi^\gamma)}{1+\varphi^\gamma}-\varphi(1+\psi)\right)+(\varphi-\delta)(\varphi(\beta+\psi)-\delta\varphi)\right]+O(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{7}$$

Основные преимущества системы (7) по отношению к (3) заключаются в том, что она не имеет сингулярных возмущений и ее порядок ниже.

2. Критические бегущие волны

Заметим, что особые точки рассматриваемой системы определяются уравнениями $f(x,y) = 0$, $g(x,y)=0$.

Рассмотрим (3) при следующих значениях параметров: $\alpha = 12$, $\beta = 1.5$, $\gamma = 3$, $\delta = 1.7$ и $\nu_0 = 0.01$. Система (4) имеет три положения равновесия: неустойчивый узел P_1, седло P_2, и неустойчивый фокус P_3 (рис. 1). Эти положения равновесия являются проекциями положений равновесия $\tilde{P}_1$, $\tilde{P}_2$, и $\tilde{P}_3$ системы (3) на плоскость (φ,ψ).

Добавляя к (4) соответствующие асимптотические граничные условия, мы можем получить траекторию, соединяющую положение равновесия P_1 и ω-периодическую орбиту, которая возникает в результате бифуркации Андронова около P_3 (рис. 2 и 3). Более того, система (3) имеет решение, стремящееся к неустойчивому положению равновесия $\tilde{P}_1$ при $\xi\to-\infty$ и к устойчивому $\omega(\varepsilon)$-периодическому решению при $\xi\to+\infty$, где $\omega(\varepsilon)\to\omega$ при $\varepsilon\to0$. Это решение определяет профиль точечно-периодических бегущих волн типа "точка-цикл" системы (1). Доказательства существования ω-периодической орбиты вблизи точки P_3, а также периодической бегущей волны типа "точка-цикл" проводятся аналогично тому, как это делается в работах [17–26].

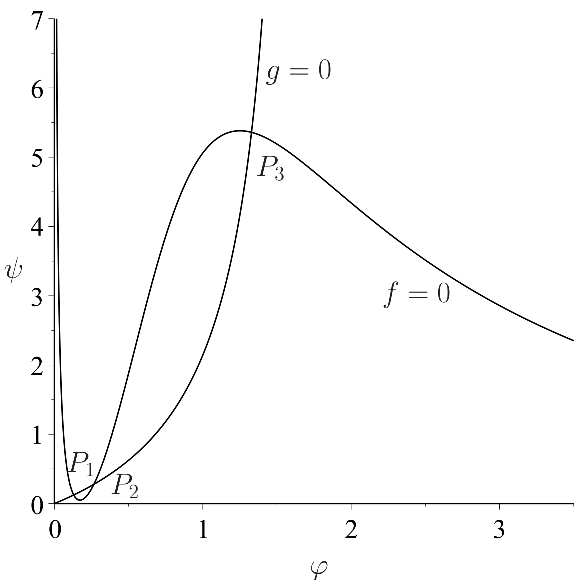

Рис. 1. Нуль-кривые и положения равновесия системы (4)
Fig. 1. Zero curves and positions of the equilibrium of systems (4)

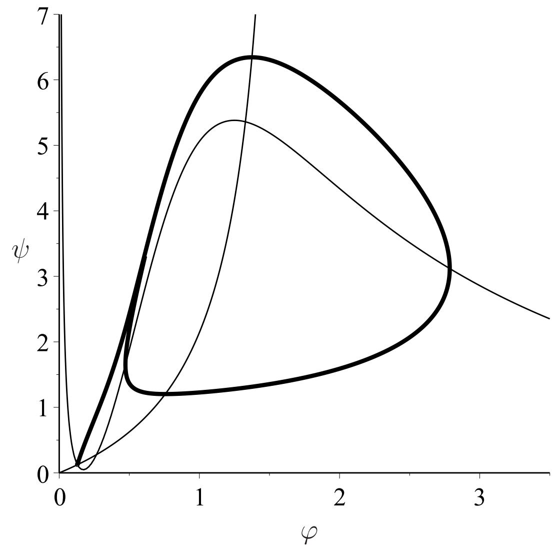

Рис. 2. Траектория, соединяющая положение равновесия и цикл системы (4)
Fig. 2. Trajectory connecting the equilibrium position and the cycle of the system (4)

Следует отметить, что траектория, показанная на рис. 2, является траекторией-уткой [27–30]. Такие траектории используются для моделирования критических явлений [10; 12; 31; 32]. Они играют роль промежуточных форм между траекториями, соответствующими колебаниям с пренебрежимо малыми

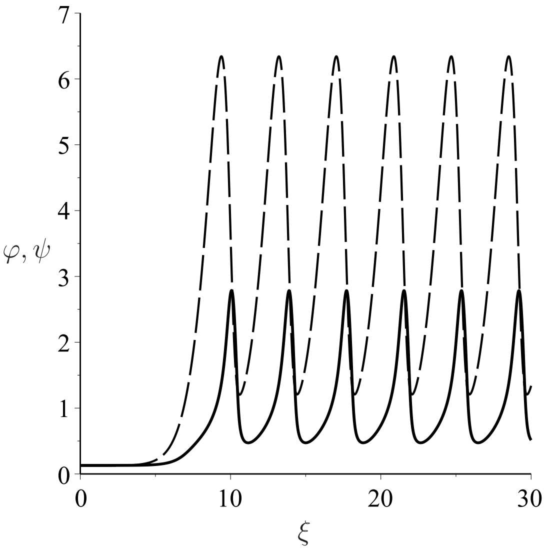

Рис. 3. Графики функций $\varphi = \varphi(\xi)$ (сплошная линия) и $\psi = \psi(\xi)$ (пунктирная линия) для траектории, соединяющая положение равновесия и цикл системы (4)
Fig. 3. Graphs of functions $\varphi = \varphi(\xi)$ (solid line) and $\psi = \psi(\xi)$ (dashed line) for the trajectory connecting the equilibrium position and cycle of the system (4)

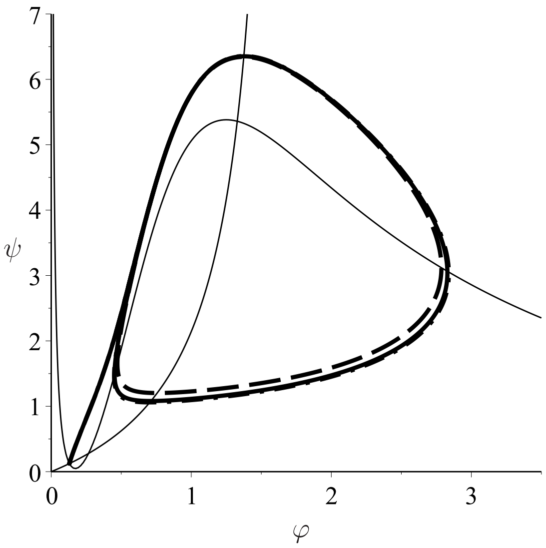

Рис. 4. Траектория, соединяющая положение равновесия и цикл системы (4) (пунктирная линия), (7) (штрих-пунктирная линия), (φ, ψ)–проекция соответствующей траектории (3) (сплошная линия)
Fig. 4. Trajectory connecting the positions of the equilibrium and the cycle of system (4) (point dashed line), (7) (dash-dot line (φ, ψ) is the projection of the corresponding trajectory (3) (solid line)

амплитудами, и траекториями с релаксационными колебаниями. Бегущие волны с профилем траекторий-уток являются критическими, так как разделяют бегущие волны с качественно различным поведением.

На рис. 4 показаны траектории, идущие от точки к циклу системы (4) (пунктирная линия) и (7) (штрих-пунктирная линия), а также (φ, ψ)-проекция соответствующей траектории системы (3) (сплошная линия). Все эти траектории очень близки друг к другу, а это значит, что приведенные системы сохраняют существенные свойства качественного поведения исходной системы.

Отметим, что в этом случае при понижении размерности модели можно ограничиться нулевым приближением инвариантного многообразия, заменив исследование системы (3) анализом системы (4). Однако во многих случаях, чтобы адекватно отразить поведение исходных моделей, необходимо использовать приближение первого или более высоких порядков для инвариантного многообразия [33].

Выводы

В статье обсуждается применение геометрической теории сингулярных возмущений и техники траекторий-уток для исследования задач о критических с бегущих волнах. На примере системы типа "реакция–диффузия" мы показываем, как задача о бегущих волнах для исходной системы нелинейных параболических уравнений сводится к изучению проекции этой системы на ее медленное инвариантное многообразие. Анализ редуцированной системы позволил найти критические бегущие волны исходной системы. Такие волны играют роль промежуточных форм между волнами с принципиально различным качественным поведением.

Литература

[1] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. 4-е изд. Москва: Наука, 1974. 503 с. URL: http://physics.gov.az/book_A/Mitropolski.pdf.

[2] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Метод интегральных многообразий в нелинейной механике. Киев: Наукова думка, 1961. URL: https://booksee.org/book/789024.

[3] Hale J. Integral manifolds of perturbed differential systems // Annals of Mathematics. Second Series. 1961. Vol. 73. № 3. P. 496–531. DOI: https://doi.org/10.2307/1970314.

[4] Fenichel N. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations // Journal of Differential Equations. 1979. vol. 31. P. 53–98. DOI: http://doi.org/10.1016/0022-0396(79)90152-9.

[5] Henry D. Geometrical Theory of Semilinear Parabolic Equations // Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer, 1981. Vol. 804. DOI: http://doi.org/10.1007/BFb0089647

[6] Sobolev V.A. Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed systems // System and Control Letters. 1984. Vol. 5. Issue 3. P. 169–179. DOI: http://doi.org/10.1016/S0167-6911(84)80099-7.

[7] Jones C.K.R.T. 1994 Geometric Singular Perturbation Theory // In: Dynamical Systems, Montecatini Terme, Lecture Notes in Mathematics, Johnson, R. (ed.), Springer-Verlag, Berlin, 1994. Vol. 1609. P. 44—118. DOI: http://doi.org/10.1007/BFB0095239

[8] Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. Москва: Наука, 1975. 248 с. URL: https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Mishchenko Rozov1975ru.pdf.

[9] Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. Москва: Наука, 1995. 336 с. URL: https://booksee.org/book/483850.

[10] Shchepakina E., Sobolev V., Mortell M.P. Singular Perturbations. Introduction to system order reduction methods with applications // Lecture Notes in Mathematics. Berlin–Heidelberg–London: Springer, 2014. Vol. 2114. DOI: http://doi.org/10.1007/978-3-319-09570-7.

[11] Schneider K., Shchepakina E., Sobolev V. A new type of travelling wave solutions // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2003. Vol. 26. Issue 16. P. 1349–1361. DOI: http://doi.org/10.1002/mma.404

[12] Shchepakina E., Sobolev V. Black Swans and Canards in Laser and Combustion Models // In: *Mortelli M.P. et al. (Eds.) Singular Perturbation and Hysteresis.* Philadelphia: SIAM, 2005, pp. 207—255. DOI: http://doi.org/10.1137/1.9780898717860.CH8.

[13] Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. Москва: Физматлит, 2010. 395 с. Available at: https://booksee.org/book/1471914.

[14] Shchepakina E. Canard Traveling Waves in a Reaction-Diffusion Model // Proceedings of ITNT 2020 - 6th IEEE International Conference on Information Technology and Nanotechnology. 2020. P. 9253177. DOI: http://doi.org/2020.10.1109/ITNT49337.2020.9253177.

[15] Shchepakina E., Tropkina E. Order reduction for problems with traveling wave solutions to reaction-diffusion systems // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1745. Issue 1. 012109. DOI: http://doi.org/10.1088/1742-6596/1745/1/012109.

[16] Sevčikova H., Kubiček M., Marek M. Concentration waves — effects of an electric field // Mathematical Modelling in Science and Technology, ed X J R Avula, R E Kalman, A I Liapis and E Y Rodin. New York: Pergamon Press, 1984. P. 477–482. DOI: http://doi.org/10.1016/B978-0-08-030156-3.50091-6

[17] Dunbar S.R. Traveling wave in diffusive predator-prey equations: Periodic orbits and point–to–periodic heteroclinic orbits // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1986. Vol. 46. P. 1057–1078. DOI: http://doi.org/10.1137/0146063.

[18] Huang W. Traveling waves connecting equilibrium and periodic orbit for reaction-diffusion equations with time delay and nonlocal response // Journal of Differential Equations. 2008. Vol. 244. P. 1230–1254. DOI: http://doi.org/10.1016/j.jde.2007.10.001.

[19] Huang Y., Weng P. Periodic traveling wave train and point–to–periodic traveling wave for a diffusive predator-preysystem with Ivlev–type functional response // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2014. Vol. 417. P. 376–393. DOI: http://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.03.042.

[20] Liang D., Weng P.X., Wu J.H. Travelling wave solutions in a delayed predator-prey diffusion PDE system: point–to–periodic and point–to–point waves // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2012. Vol. 77. P. 516–545. DOI: http://doi.org/10.1093/IMAMAT

[21] Duehring D., Huang W. Periodic traveling waves for diffusion equations with time delayed and non–local responding reaction // Journal of Dynamics and Differential Equations. 2007. Vol. 19. P. 457–477. DOI: http://doi.org/10.1007/S10884-006-9048-8.

[22] Hasik K., Trofimchuk S. Slowly oscillating wavefronts of the KPP–Fisher delayed equation // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2014. Vol. 34. P. 3511–3533. DOI: http://doi.org/10.3934/dcds.2014.34.3511.

[23] Hasik K., Kopfova J., Nabelkova P., Trofimchuk S. Traveling waves in the nonlocal KPP–Fisher equation: Different roles of the right and the left interactions // Journal of Differential Equations. 2016. Vol. 260. P. 6130–6175. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2015.12.035.

[24] Zhang, L., Wang, J., Shchepakina, E., Sobolev V. New type of solitary wave solution with coexisting crest and trough for a perturbed wave equation // Nonlinear Dyn. 2021. Vol. 106. P. 3479-–3493. https://doi.org/10.1007/s11071-021-06975-2.

[25] Merkin J.H., Poole A.J., Scott S.K. Chemical wave responses to periodic stimuli in vulnerable excitable media // Journal of the Chemical Society, Faraday Transactions. 1997. Vol. 93. no. 9. P. 1741–1745. DOI: http://dx.doi.org/10.1039/A608416H.

[26] Bordiougov G., Engel H. From trigger to phase waves and back again // Physica D. 2006. Vol. 215. P. 25–37. DOI: http://doi.org/10.1016/j.physd.2006.01.005.

[27] Diener M. Nessie et Les Canards. Strasbourg: Publication IRMA, 1979.

[28] Benoit E., Callot J.L., Diener F., Diener M. Chasse au canard // Collect. Math. 1981–1982. Vol. 31–32. P. 37–119. URL: https://www.researchgate.net/publication/265548510_Chasse_au_canard

[29] Arnold V.I., Afraimovich V.S., Il'yashenko Yu.S., Shil'nikov L.P. Theory of Bifurcations Dynamical Systems // Encyclopedia of Mathematical Sciences. New York: Springer-Verlag, 1994. Vol. 5.

[30] Eckhaus M.W. Asymptotic Analysis of Singular Perturbations // Studies in Mathematics and Its Applications. Amsterdam–New York: North-Holland Publ Co, 1979. DOI: https://doi.org/10.1016/s0168-2024

[31] Gorelov G.N., Sobolev V.A. Mathematical modelling of critical phenomena in thermal explosion theory // Combustion and Flame. 1991. Vol. 87. P. 203–210. DOI: https://doi.org/10.1016/0010-2180(91)90170-G.

[32] Gorelov G.N., Sobolev V.A. Duck–trajectories in a thermal explosion problem // Applied mathematics letters. 1992. Vol. 5. P. 3–6. DOI: https://doi.org/10.1016/0893-9659(92)90002-Q.

[33] Korobeinikov A., Shchepakina E., Sobolev V. Paradox of enrichment and system order reduction: bacteriophages dynamics as case study // Mathematical Medicine and Biology. 2016. Vol. 33. no. 3. P. 359–369. DOI: https://doi.org/10.1093/imammb/dqv025.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-2-16-24

Submited: 18.03.2020
Revised: 20.04.2020
Accepted: 28.05.2021

V.A. Sobolev
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: v.sobolev@ssau.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7327-7340

E.A. Tropkina
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: elena_a.85@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5970-6740

E.A. Shchepakina
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: shchepakina@yahoo.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5697-4611

L. Zhang
Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong, China
E-mail: li-jun0608@163.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5697-4611

J. Wang
Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong, China
E-mail: jd_w@qq.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7551-540X

CRITICAL TRAVELLING WAVES IN ONE MODEL OF THE "REACTION-DIFFUSION" TYPE[2]

ABSTRACT

The paper is devoted to the order reduction for critical traveling wave problems for a reaction-diffusion type systems. The mathematical apparatus is based on the geometric theory of singular perturbations and the canards technique. The use of the method of invariant manifolds of singularly perturbed systems allows us to replace the study of traveling waves of the original PDE system by analyzing their profiles in a ODE system of a lower order.

[2]The work is supported by a grant from the Russian Foundation for Basic Research and the National Natural Science Foundation of China within the framework of the scientific project No. 20-51-53008 and the NSFC project No. 12011530062.

Key words: singular perturbations; slow invariant manifolds; critical travelling waves; singular perturbations; integral manifold; order reduction; asymptotic expansion; differential equations; fast variables; slow variables.

Citation. Sobolev V.A., Tropkina E.A., Shchepakina E.A., Zhang L., Wang J. Critical travelling waves in one model of "reaction-diffusion" type *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 16–24. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-2-16-24. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Sobolev V.A., 2021
Vladimir A. Sobolev — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, professor of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse,443086, Russian Federation.
© Tropkina E.A., 2021
Elena A. Tropkina — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.
© Shchepakina E.A., 2021
Elena A. Shchepakina — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, head of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

© Zhang L., 2021
Lijun Zhang — professor, Shandong University of Science and Technology, 579, Quinwangang Road, Huangdao District, Qingdao, Shandong Province, 266590, P.R. China.

© Wang J., 2021
Jundong Wang — postgraduate student, Shandong University of Science and Technology, 579, Quinwangang Road, Huangdao District, Qingdao, Shandong Province, 266590, P.R. China.

References

[1] Bogolyubov N.N., Mitropolsky Yu.A. Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations. Moscow: Nauka, 1974, 503 p. Available at: http://physics.gov.az/book_A/Mitropolski.pdf. (In Russ.)

[2] Bogolyubov N.N., Mitropolsky Yu.A. Method of integral manifolds in nonlinear mechanics. Kyiv: Naukova Dumka, 1961. Available at: https://booksee.org/book/789024. (In Russ.)

[3] Hale J. Integral manifolds of perturbed differential systems. *Annals of Mathematics. Second Series*, 1961, vol. 73, no. 3, pp. 496–531. DOI: http://doi.org/10.2307/1970314.

[4] Fenichel N. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations. *Journal of Differential Equations*, 1979, vol. 31, pp. 53–98. DOI: http://doi.org/10.1016/0022-0396(79)90152-9.

[5] Henry D. Geometrical Theory of Semilinear Parabolic Equations. *Lecture Notes in Mathematics*. Berlin: Springer, 1981, vol. 804. DOI: http://doi.org/10.1007/BFb0089647.

[6] Sobolev V.A. Integral manifolds and decomposition of singularly perturbed systems. *Systems and Control Letters*, 1984, vol. 5, issue 3, pp. 169–179. DOI: http://doi.org/10.1016/S0167-6911(84)80099-7.

[7] Jones C.K.R.T. Geometric Singular Perturbation Theory. *In: Johnson R. (Ed.) Dynamical Systems, Montecatini Terme, Lecture Notes in Mathematics*. Berlin: Springer-Verlag, 1994, vol. 1609, pp. 44-–118. DOI: http://doi.org/10.1007/BFB0095239.

[8] Mishchenko E.F., Rozov N.Kh. Differential equations with small parameters and relaxation oscillations. Moscow: Nauka, 1975, 248 p. Available at: https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/MishchenkoRozov1975ru.pdf. (In Russ.)

[9] Mishchenko E.F., Kolesov Yu.S., Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh. Periodic motions and bifurcation processes in singularly perturbed systems. Moscow: Nauka, 1995, 336 p. Available at: https://booksee.org/book/483850. (In Russ.)

[10] Shchepakina E., Sobolev V., Mortell M.P. Singular Perturbations. Introduction to system order reduction methods with applications. *Lecture Notes in Mathematics*. Berlin–Heidelberg–London: Springer, 2014, vol. 2114. DOI: http://doi.org/10.1007/978-3-319-09570-7.

[11] Schneider K., Shchepakina E., Sobolev V. A new type of travelling wave solutions. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2003, vol. 26, issue 16, pp. 1349–1361. DOI: http://doi.org/10.1002/mma.404.

[12] Shchepakina E., Sobolev V. Black Swans and Canards in Laser and Combustion Models. In: *Mortelli M.P. et al. (Eds.) Singular Perturbation and Hysteresis*. Philadelphia: SIAM, 2005, pp. 207—255. DOI: http://doi.org/10.1137/1.9780898717860.CH8.

[13] Mishchenko E.F., Sadovnichii V.A., Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh. Autowave processes in nonlinear diffusive media. Moscow: Fizmatlit, 2010, 395 p. Available at: https://booksee.org/book/1471914. (In Russ.)

[14] Shchepakina E. Canard Traveling Waves in a Reaction-Diffusion Model. *Proceedings of ITNT 2020 - 6th IEEE International Conference on Information Technology and Nanotechnology*, 2020, p. 9253177. DOI: http://doi.org/2020.10.1109/ITNT49337.2020.9253177.

[15] Shchepakina E., Tropkina E. Order reduction for problems with traveling wave solutions to reaction-diffusion systems. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 1745, Issue 1, p. 012109. DOI: http://doi.org/10.1088/1742-6596/1745/1/012109.

[16] Sevčikova H., Kubiček M., Marek M. Concentration waves — effects of an electric field. In: Avula X.J.R., Kalman R.E., Liapis A.I., Rodin E.Y. (Eds.) Mathematical Modelling in Science and Technology. New York: Pergamon Press, 1984, pp. 477–482. DOI: https://doi.org/10.1016/B978-0-08-030156-3.50091-6.

[17] Dunbar S.R. Traveling wave in diffusive predator-prey equations: Periodic orbits and point–to–periodic heteroclinic orbits. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1986, vol. 46, pp. 1057–1078. DOI: http://doi.org/10.1137/0146063.

[18] Huang W. Traveling waves connecting equilibrium and periodic orbit for reaction-diffusion equations with time delay and nonlocal response. *Journal of Differential Equations*, 2008, vol. 244, pp. 1230–1254. DOI: http://doi.org/10.1016/j.jde.2007.10.001.

[19] Huang Y., Weng P. Periodic traveling wave train and point–to–periodic traveling wave for a diffusive predator-preysystem with Ivlev–type functional response. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2014, vol. 417, pp. 376–393. DOI: http://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.03.042.

[20] Liang D., Weng P.X., Wu J.H. Travelling wave solutions in a delayed predator-prey diffusion PDE system: point–to–periodic and point–to–point waves. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2012, vol. 77, pp. 516–545. DOI: http://doi.org/10.1093/IMAMAT%2FHXR031.

[21] Duehring D., Huang W. Periodic traveling waves for diffusion equations with time delayed and non–local responding reaction. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2007, vol. 19, pp. 457–477. DOI: http://doi.org/10.1007/S10884-006-9048-8.

[22] Hasik K., Trofimchuk S. Slowly oscillating wavefronts of the KPP–Fisher delayed equation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2014, vol. 34, pp. 3511–3533. DOI: http://doi.org/10.3934/dcds.2014.34.3511.

[23] Hasik K., Kopfova J., Nabelkova P., Trofimchuk S. Traveling waves in the nonlocal KPP–Fisher equation: Different roles of the right and the left interactions. *Journal of Differential Equations*, 2016, vol. 260, pp. 6130–6175. DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2015.12.035.

[24] Zhang, L., Wang, J., Shchepakina, E., Sobolev V. New type of solitary wave solution with coexisting crest and trough for a perturbed wave equation. *Nonlinear Dynamics*, 2021, vol. 106, pp. 3479-–3493. DOI: http://doi.org/10.1007/s11071-021-06975-2.

[25] Merkin J.H., Poole A.J., Scott S.K. Chemical wave responses to periodic stimuli in vulnerable excitable media. *Journal of the Chemical Society, Faraday Transactions*, 1997, vol. 93, no. 9, pp. 1741–1745. DOI: http://dx.doi.org/10.1039/A608416H.

[26] Bordiougov G., Engel H. From trigger to phase waves and back again. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2006, vol. 215, pp. 25–37. DOI: http://doi.org/10.1016/j.physd.2006.01.005.

[27] Diener M. Nessie et Les Canards. Strasbourg: Publication IRMA, 1979.

[28] Benoit E., Callot J.L., Diener F., Diener M. Chasse au canard. *Collectanea Mathematica*, 1981–1982, vol. 31–32, pp. 37–119. Available at: https://www.researchgate.net/publication/265548510_Chasse_au_canard.

[29] Arnold V.I., Afraimovich V.S., Il'yashenko Yu.S., Shil'nikov L.P. Theory of Bifurcations Dynamical Systems. In: *Encyclopedia of Mathematical Sciences*. New York: Springer-Verlag, 1994, vol. 5.

[30] Eckhaus M.W. Asymptotic Analysis of Singular Perturbations. *Studies in Mathematics and Its Applications*. Amsterdam–New York: North-Holland Publ Co, 1979. DOI: http://doi.org/10.1016/s0168-2024%2808%29x7001-8.

[31] Gorelov G.N., Sobolev V.A. Mathematical modelling of critical phenomena in thermal explosion theory. *Combustion and Flame*, 1991, vol. 87, pp. 203–210. DOI: http://doi.org/10.1016/0010-2180(91)90170-G.

[32] Gorelov G.N., Sobolev V.A. Duck–trajectories in a thermal explosion problem. *Applied Mathematics Letters*, 1992, vol. 5, no. 6, pp. 3–6. DOI: http://doi.org/10.1016/0893-9659(92)90002-Q.

[33] Korobeinikov A., Shchepakina E., Sobolev V. Paradox of enrichment and system order reduction: bacteriophages dynamics as case study. *Mathematical Medicine and Biology*, 2016, vol. 33, no. 3, pp. 359–369. DOI: http://doi.org/10.1093/imammb/dqv025.