 Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-1-15–28

УДК 517.956.6

Дата: поступления статьи: 12.01.2021
после рецензирования: 17.02.2021
принятия статьи: 28.02.2021

В.Б. Дмитриев
E-mail: dmitriev_v.b@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9788-7036

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ВИДА ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ IV ПОРЯДКА

АННОТАЦИЯ

Исследуется разрешимость в классе регулярных (имеющих все обобщенные по С.Л. Соболеву суммируемые с квадратом производные, входящие в соответствующее уравнение) решений нелокальной задачи с интегральным по пространственным переменным условием для линейного уравнения высокого порядка. Обозначается, что вначале подобные задачи изучались для уравнений высокого порядка либо в одномерном случае, либо при выполнении некоторых условий малости на величину T. Также приведен перечень новых работ для многомерного случая. В данной работе приводятся новые результаты о разрешимости нелокальной задачи с интегральными по пространственным переменным условиями для уравнения высокого порядка: а) в многомерном по пространственным переменным случае; б) при отсутствии условий малости на величину T; однако это условие есть на ядро $K(x, y, t)$. Метод исследования основан на получении априорных оценок решения поставленной задачи, из которых следует его существование и единственность в данном пространстве.

Ключевые слова: краевая задача; нелокальное условие; уравнение высокого порядка; априорные оценки; граничные условия интегрального вида; уравнение Буссинеска; регулярные решения; единственность; существование.

Цитирование. Дмитриев В.Б. Краевая задача с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерного уравнения IV порядка // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2021. Т. 27, № 1. С. 15–28. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-1-15-28.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Виктор Борисович Дмитриев — кандидат физико-математических наук.

Введение

Нелокальные задачи с интегральными условиями для дифференциальных уравнений с частными производными в настоящее время весьма активно изучаются, прежде всего для параболических и гиперболических уравнений и для ультрапараболических уравнений; в связи с этим отметим работы [1–5]. Многие постановки задач для них давно стали классическими и вошли в учебники по математической физике.

Отметим, что работы, связанные с исследованием разрешимости нелокальных задач для дифференциальных уравнений в частных производных с граничными условиями интегрального вида, многочисленны. Однако среди них преобладают работы, в которых изучается одномерный по пространственным переменным случай. Важный шаг был сделан в работах А.И. Кожанова и Л.С. Пулькиной [1–3], где была доказана однозначная разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений второго порядка.

Многочисленные работы по исследованию уравнений высокого (выше второго) порядка в своем большинстве связаны с изучением классических начальных и начально-краевых задач. Например, математическая модель стержня Рэлея [6], описывающая продольные колебания толстого короткого стержня с учетом поперечного движения стержня; уравнение Кортевега – де Фриза [7], моделирующее процесс распространения длинных волн на поверхности воды; уравнения, описывающие нестационарные волны в стратифицированных и вращающихся жидкостях [8]. В книге «Неклассические уравнения математической физики высокого порядка» [9] приведен обширный перечень работ, посвященных этим вопросам. Примеры явлений, математические модели которых основаны на уравнениях высокого порядка, приведены также в монографии [10].

В работе автора [11] доказана однозначная разрешимость краевой задачи для уравнения высокого порядка в прямоугольнике $Q = \{(x,\tau) : 0 < x < l, 0 < \tau < T\}$, при этом фигурирует производная четвёртого порядка по времени. Однако в этой работе рассмотрен случай одной пространственной переменной и есть ограничения на коэффициенты уравнения. А также есть условия малости как на ядро $K(y)$, фигурирующее в нелокальном условии, так и на величину T.

Отметим здесь также работы Н.С. Попова [12–14], работу А.И. Кожанова и А.В. Дюжевой [15], работы Т.К. Юлдашева [16–18]. В работе [19] для доказательства разрешимости задачи для уравнения четвертого порядка вводится понятие обобщенного решения и доказывается его существование и единственность в выбранном пространстве.

В настоящей работе представлен новый результат о разрешимости нелокальной задачи с граничным условием интегрального вида условиями для уравнения высокого порядка: а) в многомерном по пространственным переменным случае; б) при отсутствии условий малости на величину T; однако это условие есть на ядро $K(x, y, t)$. Притом целью настоящей работы является доказательство существования и единственности регулярного решения — именно решения, имеющего все обобщенные по С.Л. Соболеву производные, входящие в уравнение.

Структурно настоящая работа состоит из четырех частей. В первой из них дается постановка изучаемой задачи. Во второй части приведены основные обозначения и неравенства, используемые в работе, а также сформулирована теорема существования и единственности решения. В третьей и четвертой частях доказываются априорные оценки, с их помощью обосновывается верность теоремы.

1. Постановка задачи

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты — бесконечно дифференцируемой) границей Γ, $Q_T = \{(x,\tau) : x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, 0 < \tau < T\}$ - цилиндр конечной высоты T, $S = \Gamma \times (0,T)$ — его боковая граница. Обозначим A_0, A и B — операторы, действие которых на функцию $u(x,t)$ определяется равенствами

$$A_0 u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x,t)\, u_{x_j}\Big), \quad Au = A_0 u + a(x,t)u,$$

$$Bu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(b_{ij}(x,t)\, u_{x_j}\Big) + b(x,t)u$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование в пределах от 1 до n).

Исследована разрешимость начально-краевой задачи для уравнения высокого порядка

$$L\, u \equiv A_0 u_{tt} + a(x,t)u_{tt} + Bu = f(x,t) \tag{1.1}$$

с эллиптическим оператором A_0 и оператором B произвольного типа с интегральным краевым условием.

Или, более сжато:

$$L\, u \equiv Au_{tt} + Bu = f.$$

Краевая задача: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q_T решением уравнения

$$L\, u = f(x,t), \tag{1.2}$$

и такую, что для нее выполняются условия:

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, x \in \Omega, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu(x)}\Big|_{(x,t)\in S} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,\tau)\, u_{x_j}\, \nu_i\big|_{(x,t)\in S} = \int\limits_{\Omega} K(x,y,t)\, u(y,t)\, dy\big|_{(x,t)\in S}. \tag{1.4}$$

Здесь $a_{ij}(x,t), b_{ij}(x,t)(i,j=1,\ldots,n), a(x,t), b(x,t), f(x,t)$, и $K(x,y,t)$ — заданные при $x\in\overline{\Omega}, y\in\overline{\Omega}, t\in[0,T]$ функции. Далее, потребуем выполнения условий:

$$a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant k_0|\xi|^2, \quad a(x,t)\leqslant -a_0<0,\ \xi\in\mathbb{R}^n,\ x\in\overline{\Omega}, \tag{1.5}$$

$$|K(x,y,t)|\leqslant R_1(y,t), \quad |K_t(x,y,t)|\leqslant R_2(y,t),$$

$$|K_{tt}(x,y,t)|\leqslant R_3(y,t), \quad \forall x,y\in\Omega,\ t\in[0,T]. \tag{1.6}$$

Здесь $k_0>0$, $a_0>0$, — некоторые числа, $R_1(y,t)$, $R_2(y,t)$, $R_3(y,t)$ — заданные при $y\in\overline{\Omega}, t\in[0,T]$ функции.

Заметим, что уравнение (1.2) близко по типу к уравнениям составного типа и, в частности, содержит известное уравнение Буссинеска.

Перейдем к содержательной части работы.

2. Основные обозначения

Пусть $V(Q_T)$ есть следующее пространство функций:

$$V(Q_T)=\Big\{v(x,t): v(x,t)\in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega)),$$

$$v_t(x,t)\in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega)),\ v_{tt}(x,t)\in L_2(0,T;W_2^2(\Omega))\Big\},$$

норму в этом пространстве определим естественным образом:

$$\|v\|_V=\|v\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))}+\|v_t\|_{L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))}+\|v_{tt}\|_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))}.$$

Получены условия на функции $a_{ij}(x,t), b_{ij}(x,t), a(x,t), b(x,t), f(x,t)$ и $K(x,y,t)$, при выполнении которых рассматриваемая краевая задача имеет единственное классическое решение из $V(Q_T)$.

При получении априорных оценок решений мы будем использовать элементарное неравенство

$$|ab|\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}, \tag{2.1}$$

верное для вещественных a и b, а также "неравенство Коши с δ":

$$2\,|ab|\leqslant\delta a^2+\frac{1}{\delta}b^2. \tag{2.2}$$

Мы также будем использовать неравенство

$$\int\limits_{\partial\Omega}|u|\,ds\leqslant c\int\limits_{\Omega}\Big(|\nabla u|+|u|\Big)\,dx, \tag{2.3}$$

справедливое для любой функции $u\in W_1^1(\Omega)$ и области Ω с гладкой границей [20, с. 77].

Также нам понадобится второе основное неравенство для эллиптических операторов [21]:

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}u_{x_i}^2(x,t)\,dx+\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}u_{x_ix_j}^2(x,t)\,dx\leqslant c_0\|A\,u\|^2_{L_2(\Omega)}+c_1\|u\|^2_{L_2(\Omega)}, \tag{2.4}$$

в котором числа c_0 и c_1 определяются лишь оператором A и областью Ω .

Теорема. Пусть выполняются условия

$$a_{ij}(x,t)\in C^1(Q_T), a_{ij}(x,t)=a_{ji}(x,t), a_{ij}(x,t)\in C^1(\overline{\Omega}),$$

$$b_{ij}(x,t)\in C(\overline{\Omega}), b_i(x,t)\in C(\overline{\Omega}),\ \forall\, t\in[0,T], i,j=1,\ldots,n, x\in\overline{\Omega}, \tag{2.5}$$

$$K(x,y,t),\ K_t(x,y,t),\ K_{tt}(x,y,t)\in C(\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}\times[0,T]), \tag{2.6}$$

$$R_1(y,t),\ R_2(y,t),\ R_3(y,t)\in L_\infty(0,T;L_2(\Omega)). \tag{2.7}$$

Пусть также выполняются условия (1.5), (1.6) и условия

$$k_0>\frac{1}{2}\,c\,|\Omega|^{\frac{1}{2}}\sup_{t\in[0,T]}\left(\int\limits_{\Omega}R_1^2(y,t)\,dy\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$a_0 > \frac{3}{2}\, c\, |\Omega|^{\frac{1}{2}} \sup_{t\in[0,T]} \left(\int\limits_{\Omega} R_1^2(y,t)\, dy \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$a(x,t) \in C^1(Q_T),\, b(x,t) \in C(\overline{\Omega}),\, \forall\, t \in [0,T],\ \sup_{t\in[0,T]} \int\limits_{\Omega} |\nabla a(x,t)|^2\, dx < \infty. \tag{2.8}$$

Тогда краевая задача (1.2)–(1.4) имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству $V(Q_T)$, и это решение единственно.

3. Доказательство

Доказательство основывается на априорной оценке. Установим ее наличие.

4. Априорная оценка

Умножим уравнение (1.1), записанное в переменных (x,τ), на функцию $-u_\tau(x,\tau)$, результат проинтегрируем по области Q_T и по переменной τ в пределах от 0 до t:

$$-\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} A\, u_{\tau\tau} u_\tau\, dx\, d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} B\, u\, u_\tau\, dx\, d\tau - \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} f\, u_\tau\, dx\, d\tau.$$

$$-\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,\tau)\, (u_{x_i\tau} u_{x_j\tau})_\tau\, dx\, d\tau =$$

$$= -\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,\tau)\, (u_{x_i\tau} u_{x_j\tau})|_{\tau=0}^{\tau=t}\, dx + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij\tau}(x,\tau)\, u_{x_i\tau} u_{x_j\tau}\, dx\, d\tau.$$

$$\frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} a(x,\tau)\, (u_\tau^2)_\tau\, dx\, d\tau = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} a(x,\tau)\, u_\tau^2|_{\tau=0}^{\tau=t}\, dx - \frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} a_\tau(x,\tau)\, u_\tau^2\, dx\, d\tau.$$

Интегрируя по частям и используя условие (1.4), нетрудно получить следующее неравенство:

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,\tau)\, (u_{x_i\tau} u_{x_j\tau})|_{\tau=0}^{\tau=t}\, dx - \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij\tau}(x,\tau)\, u_{x_i\tau} u_{x_j\tau}\, dx\, d\tau -$$

$$-\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} a(x,\tau)\, u_\tau^2|_{\tau=0}^{\tau=t}\, dx + \frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} a_\tau(x,\tau)\, u_\tau^2\, dx\, d\tau -$$

$$-\int\limits_0^t \int\limits_{\partial\Omega} u_\tau \left(\int\limits_{\Omega} K(x,y,\tau)\, u(y,\tau)\, dy \right)_{\tau\tau} ds\, d\tau -$$

$$-\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(b_{ij}(x,t)\, u_{x_j} \Big) u_\tau\, dx\, d\tau -$$

$$-\frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} b(x,\tau)\, (u^2)_\tau\, dx\, d\tau =$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} f(x,\tau)\, u_\tau\, dx\, d\tau.$$

Обозначим

$$I_1 = \int\limits_0^t \int\limits_{\partial\Omega} u_\tau \left(\int\limits_{\Omega} K(x,y,\tau)\, u(y,\tau)\, dy \right)_{\tau\tau} ds\, d\tau,$$

$$I_2=\int\limits_0^t\int\limits_{\partial\Omega}u_{\tau\tau}\left(\int\limits_\Omega K(x,y,\tau)\,u(y,\tau)\,dy\right)_{\tau\tau}ds\,d\tau.$$

Получаем

$$I_1=\int\limits_0^t\int\limits_{\partial\Omega}u_\tau\int\limits_\Omega\Big(K_{\tau\tau}(x,y,\tau)\,u(y,\tau)+2\,K_\tau(x,y,\tau)\,u_\tau(y,\tau)+$$
$$+K(x,y,\tau)\,u_{\tau\tau}(y,\tau)\Big)\,dy\,ds\,d\tau.$$

Далее, это слагаемое оценим следующим образом, используя неравенство (2.3):

$$|I_1|\leqslant\int\limits_0^t\int\limits_{\partial\Omega}|u_\tau|\int\limits_\Omega\Big(R_3(y,\tau)\,|u(y,\tau)|+2\,R_2(y,\tau)\,|u_\tau(y,\tau)|+$$
$$+R_1(y,\tau)\,|u_{\tau\tau}(y,\tau)|\Big)\,dy\,ds\,d\tau\leqslant$$
$$\leqslant c\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\Big(|u_\tau|+|\nabla u_\tau|\Big)\int\limits_\Omega\Big(R_3(y,\tau)\,|u(y,\tau)|+2\,R_2(y,\tau)\,|u_\tau(y,\tau)|+$$
$$+R_1(y,\tau)\,|u_{\tau\tau}(y,\tau)|\Big)\,dy\,dx\,d\tau.$$

Аналогично оценим слагаемое I_2, которое у нас появится ниже:

$$|I_2|\leqslant c\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\Big(|u_{\tau\tau}|+|\nabla u_{\tau\tau}|\Big)\int\limits_\Omega\Big(R_3(y,\tau)\,|u(y,\tau)|+2\,R_2(y,\tau)\,|u_\tau(y,\tau)|+$$
$$+R_1(y,\tau)\,|u_{\tau\tau}(y,\tau)|\Big)\,dy\,dx\,d\tau.$$

Обозначим

$$z_1(t)=\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,\tau)\,(u_{x_i\tau}u_{x_j\tau})|_{\tau=t}\,dx-\frac{1}{2}\int\limits_\Omega a(x,\tau)\,u_\tau^2|_{\tau=t}\,dx\geqslant$$
$$\geqslant k_0\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega u_{x_it}^2(x,t)\,dx+\frac{a_0}{2}\int\limits_\Omega u_t^2(x,t)\,dx.$$

После оценок получаем

$$z_1(t)\leqslant z_1(0)+\left|\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n a_{ij\tau}(x,\tau)\,u_{x_i\tau}u_{x_j\tau}\,dx\,d\tau\right|+$$
$$+c\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\Big(|u_\tau|+|\nabla u_\tau|\Big)\int\limits_\Omega\Bigg(R_3(y,\tau)\,|u(y,\tau)|+2\,R_2(y,\tau)\,|u_\tau(y,\tau)|+$$
$$+R_1(y,\tau)\,|u_{\tau\tau}(y,\tau)|\Bigg)\,dy\,dx\,d\tau+$$
$$+\frac{1}{2}\left|\int\limits_0^t\int\limits_\Omega a_\tau(x,\tau)\,u_\tau^2\,dx\,d\tau\right|+\left|\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(b_{ij}(x,\tau)\,u_{x_j}\Big)u_\tau\,dx\,d\tau\right|+$$
$$+\left|\int\limits_0^t\int\limits_\Omega b(x,\tau)\,u\,u_\tau\,dx\,d\tau\right|+\left|\int\limits_0^t\int\limits_\Omega f(x,\tau)\,u_\tau\,dx\,d\tau\right|.\tag{4.1}$$

Используя неравенства (2.1), (2.2), а также условия (1.5), (1.6), (2.5)–(2.8), получаем

$$z_1(t)\leqslant z_1(0)+\delta_1^2\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{\tau\tau}^2(x,\tau)\,dx\,d\tau+P_1\Big(\sum_{i,j=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{x_ix_j}^2(x,\tau)\,dx\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_\Omega |\nabla u_\tau(x,\tau)|^2\,dx\,d\tau+\int_0^t\int_\Omega u_\tau^2(x,\tau)\,dx\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_\Omega u^2(x,\tau)\,dx\,d\tau+\int_0^t\int_\Omega f^2(x,\tau)\,dx\,d\tau\Big), \tag{4.2}$$

где число δ_1 — произвольное положительное число, P_1 есть число, определяющееся коэффициентами оператора B, а также областью Q_T и числом δ_1.

Умножим уравнение (1.1), записанное в переменных (x,τ), на функцию $-u_{\tau\tau}(x,\tau)$, результат проинтегрируем по области Q_T и по переменной τ в пределах от 0 до t:

$$-\int_0^t\int_\Omega A\,u_{\tau\tau}u_{\tau\tau}\,dx\,d\tau=\int_0^t\int_\Omega B\,u\,u_{\tau\tau}\,dx\,d\tau-\int_0^t\int_\Omega f\,u_{\tau\tau}\,dx\,d\tau.$$

Интегрируя по частям, получаем следующее равенство:

$$-\int_0^t\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,\tau)\,u_{x_i\tau\tau}u_{x_j\tau\tau}\,dx\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_{\partial\Omega} u_{\tau\tau}\left(\int_\Omega K(x,y,\tau)\,u(y,\tau)\,dy\right)_{\tau\tau} ds\,d\tau-$$

$$-\int_0^t\int_\Omega a(x,\tau)\,u_{\tau\tau}^2\,dx\,d\tau-\int_0^t\int_\Omega B\,u\,u_{\tau\tau}\,dx\,d\tau=-\int_0^t\int_\Omega f\,u_{\tau\tau}\,dx\,d\tau.$$

Здесь появляется слагаемое I_2, которое мы оценили выше. При этом основную трудность представляет слагаемое, содержащее множитель $R_1(y,\tau)$, которое оценим в итоге следующим образом, используя неравенство Коши — Буняковского, а также элементарное неравенство (2.1):

$$c\int_0^t\int_\Omega\Big(|u_{\tau\tau}|+|\nabla u_{\tau\tau}|\Big)\int_\Omega\Big(R_1(y,\tau)\,|u_{\tau\tau}(y,\tau)|\Big)\,dy\,dx\,d\tau$$

$$\leqslant c\int_0^t\int_\Omega\Big(|u_{\tau\tau}|+|\nabla u_{\tau\tau}|\Big)\left(\int_\Omega R_1^2(y,\tau)\,dy\cdot\int_\Omega |u_{\tau\tau}^2(y,\tau)|\,dy\right)^{\frac12}dx\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant c\sup_{\tau\in[0,T]}\left(\int_\Omega R_1^2(y,\tau)\,dy\right)^{\frac12}\int_0^t\left(\int_\Omega |u_{\tau\tau}^2(y,\tau)|\,dy\right)^{\frac12}\int_\Omega\Big(|u_{\tau\tau}|+|\nabla u_{\tau\tau}|\Big)\,dx\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant c\,|\Omega|^{\frac12}\sup_{\tau\in[0,T]}\left(\int_\Omega R_1^2(y,\tau)\,dy\right)^{\frac12}\int_0^t\left(\int_\Omega |u_{\tau\tau}^2(y,\tau)|\,dy\right)^{\frac12}\times$$

$$\times\left\{\left(\int_\Omega |u_{\tau\tau}|^2\,dx\,d\tau\right)^{\frac12}+\left(\int_\Omega |\nabla u_{\tau\tau}|^2\,dx\,d\tau\right)^{\frac12}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant c\,|\Omega|^{\frac12}\sup_{\tau\in[0,T]}\left(\int_\Omega R_1^2(y,\tau)\,dy\right)^{\frac12}\times$$

$$\times\left\{\frac12\sum_{i=1}^n\int_0^t\int_\Omega u_{x_i\tau\tau}^2(x,\tau)\,dx\,d\tau+\frac32\int_0^t\int_\Omega u_{\tau\tau}^2(x,\tau)\,dx\,d\tau\right\}.$$

Обозначим

$$z_2(t) = \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,\tau)\, u_{x_i\tau\tau} u_{x_j\tau\tau}\, dx\, d\tau - \int\limits_0^t \int\limits_\Omega a(x,\tau)\, u_{\tau\tau}^2\, dx\, d\tau \geqslant$$

$$\geqslant k_0 \sum_{i=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_{x_i\tau\tau}^2(x,\tau)\, dx\, d\tau + a_0 \int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_{\tau\tau}^2(x,\tau)\, dx\, d\tau.$$

После оценок получаем, используя неравенства (2.1), (2.2), а также условия (1.5), (1.6), (2.5)–(2.8), с учетом того, что $z_2(0) = 0$:

$$z_2(t) \leqslant \left| \int\limits_0^t \int\limits_\Omega B\, u\, u_{\tau\tau}\, dx\, d\tau \right| + \left| \int\limits_0^t \int\limits_\Omega f\, u_{\tau\tau}\, dx\, d\tau \right| +$$

$$+c \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \Big(|u_{\tau\tau}| + |\nabla u_{\tau\tau}| \Big) \int\limits_\Omega \Big(R_3(y,\tau)\, |u(y,\tau)| +$$

$$+2\, R_2(y,\tau)\, |u_\tau(y,\tau)| \Big)\, dy\, dx\, d\tau + c\, |\Omega|^{\frac12} \sup_{\tau\in[0,T]} \left(\int\limits_\Omega R_1^2(y,\tau)\, dy \right)^{\frac12} \times$$

$$\times \left\{ \frac12 \sum_{i=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_{x_i\tau\tau}^2(x,\tau)\, dx\, d\tau + \frac32 \int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_{\tau\tau}^2(x,\tau)\, dx\, d\tau \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \delta_2^2 \int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_{\tau\tau}^2(x,\tau)\, dx\, d\tau +$$

$$+P_2 \Big(\sum_{i,j=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_{x_i x_j}^2(x,\tau)\, dx\, d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega |\nabla u_\tau(x,\tau)|^2\, dx\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_\tau^2(x,\tau)\, dx\, d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega u^2(x,\tau)\, dx\, d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega f^2(x,\tau)\, dx\, d\tau \Big) +$$

$$+c\, |\Omega|^{\frac12} \sup_{\tau\in[0,T]} \left(\int\limits_\Omega R_1^2(y,\tau)\, dy \right)^{\frac12} \times$$

$$\times \left\{ \frac12 \sum_{i=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_{x_i\tau\tau}^2(x,\tau)\, dx\, d\tau + \frac32 \int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_{\tau\tau}^2(x,\tau)\, dx\, d\tau \right\}. \tag{4.3}$$

Теперь для получения оценок умножим уравнение (1.1), записанное в переменных (x,τ), на $A_0\, u_\tau(x,\tau)$, интегрируя, имеем

$$\frac12 \int\limits_0^t \int\limits_\Omega (A_0\, u_\tau)_\tau^2\, dx\, d\tau - \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \Big(a_{ij\tau}(x,t)\, u_{x_j\tau} \Big)\, A_0\, u_\tau\, dx\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_\Omega a(x,\tau)\, u_{\tau\tau} A_0\, u_\tau\, dx\, d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega B\, u\, A_0\, u_\tau\, dx\, d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_\Omega f\, A_0\, u_\tau\, dx\, d\tau$$

и далее, вводя обозначение $z_3(t) = \int\limits_\Omega (A_0 u_t(x,t))^2 dx$, используя неравенства (2.1), (2.2), а также условия (1.5), (1.6), (2.5)–(2.8), получаем

$$z_3(t) \leqslant z_3(0) + \delta_3^2 \int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_{\tau\tau}^2(x,\tau)\, dx\, d\tau + P_3 \left(\int\limits_0^t \int\limits_\Omega (A_0 u_\tau(x,\tau))^2 dx\, d\tau + \right.$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{x_ix_j}^2(x,\tau)\,dx\,d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega|\nabla u_\tau(x,\tau)|^2\,dx\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_\tau^2(x,\tau)\,dx\,d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u^2(x,\tau)\,dx\,d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega f^2(x,\tau)\,dx\,d\tau\Bigg). \qquad (4.4)$$

Складывая (4.2)–(4.4), получаем для величины $p(t)=z_1(t)+z_2(t)+z_3(t)$ следующую оценку:

$$p(t)\leqslant p(0)+\left(\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2\right)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{\tau\tau}^2(x,\tau)\,dx\,d\tau+$$

$$+P_4\Big(\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{x_ix_j}^2(x,\tau)\,dx\,d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega|\nabla u_\tau(x,\tau)|^2\,dx\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_\tau^2(x,\tau)\,dx\,d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u^2(x,\tau)\,dx\,d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega f^2(x,\tau)\,dx\,d\tau\Big)+$$

$$+c\,|\Omega|^{\frac12}\sup_{\tau\in[0,T]}\left(\int\limits_\Omega R_1^2(y,\tau)\,dy\right)^{\frac12}\times$$

$$\times\left\{\frac12\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{x_i\tau\tau}^2(x,\tau)\,dx\,d\tau+\frac32\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{\tau\tau}^2(x,\tau)\,dx\,d\tau\right\}. \qquad (4.5)$$

Число P_4 определяется числами P_1, P_2 и P_3. Далее, выписывая выражение в определении $p(t)$, получаем

$$\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,\tau)\,(u_{x_i\tau}u_{x_j\tau})|_{\tau=t}\,dx-\frac12\int\limits_\Omega a(x,\tau)\,u_\tau^2|_{\tau=t}\,dx+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,\tau)\,u_{x_i\tau\tau}u_{x_j\tau\tau}\,dx\,d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_\Omega a(x,\tau)\,u_{\tau\tau}^2\,dx\,d\tau+\int\limits_\Omega(A_0u_t(x,t))^2dx\leqslant$$

$$\leqslant p(0)+\left(\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2\right)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{\tau\tau}^2(x,\tau)\,dx\,d\tau+$$

$$+P_4\Big(\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{x_ix_j}^2(x,\tau)\,dx\,d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega|\nabla u_\tau(x,\tau)|^2\,dx\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_\tau^2(x,\tau)\,dx\,d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u^2(x,\tau)\,dx\,d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega f^2(x,\tau)\,dx\,d\tau\Big)+$$

$$+c\,|\Omega|^{\frac12}\sup_{\tau\in[0,T]}\left(\int\limits_\Omega R_1^2(y,\tau)\,dy\right)^{\frac12}\times$$

$$\times\left\{\frac12\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{x_i\tau\tau}^2(x,\tau)\,dx\,d\tau+\frac32\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{\tau\tau}^2(x,\tau)\,dx\,d\tau\right\}. \qquad (4.6)$$

Теперь, учитывая оценки для $z_1(t),z_2(t),z_3(t)$ и приводя подобные слагаемые, получаем

$$k_0\sum_{i=1}^{n}\int\limits_\Omega u_{x_it}^2(x,t)\,dx+\frac{a_0}{2}\int\limits_\Omega u_t^2(x,t)\,dx+\int\limits_\Omega(A_0u_t(x,t))^2dx+$$

$$+\left(k_0-\frac{1}{2}\,c\,|\Omega|^{\frac{1}{2}}\sup_{\tau\in[0,T]}\left(\int\limits_{\Omega}R_1^2(y,\tau)\,dy\right)^{\frac{1}{2}}\right)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}u^2_{x_i\tau\tau}(x,\tau)\,dx\,d\tau+$$

$$+\left(a_0-\frac{3}{2}\,c\,|\Omega|^{\frac{1}{2}}\sup_{\tau\in[0,T]}\left(\int\limits_{\Omega}R_1^2(y,\tau)\,dy\right)^{\frac{1}{2}}-\delta_1^2-\delta_2^2-\delta_3^2\right)\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}u^2_{\tau\tau}(x,\tau)\,dx\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant p(0)+P_4\Big(\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}u^2_{x_ix_j}(x,\tau)\,dx\,d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}|\nabla u_\tau(x,\tau)|^2\,dx\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}u^2_\tau(x,\tau)\,dx\,d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}u^2(x,\tau)\,dx\,d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}f^2(x,\tau)\,dx\,d\tau\Big). \tag{4.7}$$

В силу условий теоремы и произвольности чисел δ_1, δ_2, δ_3 мы можем выбрать их так, чтобы все коэффициенты в левой части были положительны, то есть чтобы выполнялось неравенство

$$a_0-\frac{3}{2}\,c\,|\Omega|^{\frac{1}{2}}\sup_{\tau\in[0,T]}\left(\int\limits_{\Omega}R_1^2(y,\tau)\,dy\right)^{\frac{1}{2}}-\delta_1^2-\delta_2^2-\delta_3^2>0.$$

Имеют место представления

$$u(x,\tau)=\int\limits_0^\tau u_\xi(x,\xi)d\xi=\int\limits_0^\tau\int\limits_0^\xi u_{\nu\nu}(x,\nu)d\nu\,d\xi.$$

$$u_{x_i}(x,\tau)=\int\limits_0^\tau u_{x_i\xi}(x,\xi)d\xi=\int\limits_0^\tau\int\limits_0^\xi u_{x_i\nu\nu}(x,\nu)d\nu\,d\xi.$$

$$u_{x_ix_j}(x,\tau)=\int\limits_0^\tau u_{x_ix_j\xi}(x,\xi)d\xi=\int\limits_0^\tau\int\limits_0^\xi u_{x_ix_j\nu\nu}(x,\nu)d\nu\,d\xi.$$

Из этих равенств, вновь из второго основного неравенства для эллиптических операторов и леммы Гронуолла [22, с. 23], следует оценка

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}u^2_{x_it}(x,t)\,dx+\int\limits_{\Omega}u^2_t(x,t)\,dx+\int\limits_{\Omega}(A_0u_t(x,t))^2dx+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}u^2_{x_i\tau\tau}(x,\tau)\,dx\,d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}u^2_{\tau\tau}(x,\tau)\,dx\,d\tau\leqslant K_0\,\|f\|_{L_2(Q_T)}. \tag{4.8}$$

Теперь умножим уравнение (1.1), записанное в переменных (x,τ), на $A_0\,u_{\tau\tau}(x,\tau)$, имеем

$$\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\left(A_0\,u_{\tau\tau}\right)^2\,dx\,d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}a(x,\tau)\,u_{\tau\tau}A_0\,u_{\tau\tau}\,dx\,d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}B\,u\,A_0\,u_{\tau\tau}\,dx\,d\tau=$$

$$=\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}f\,A_0\,u_{\tau\tau}\,dx\,d\tau.$$

Обозначим второе слагаемое в левой части через J_1 и преобразуем его:

$$J_1=\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}a(x,\tau)\,u_{\tau\tau}\,A_0\,u_{\tau\tau}dx\,d\tau=\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}a(x,\tau)\,u_{\tau\tau}\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}(x,\tau)\,u_{x_j\tau\tau}\right)_{x_i}\,dx\,d\tau=$$

$$=\int\limits_0^t\int\limits_{\partial\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,\tau)\,u_{x_j\tau\tau}\nu_i\cdot a(x,\tau)\,u_{\tau\tau}\,ds\,d\tau-$$

$$-\int_0^t \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,\tau)\, u_{x_j\tau\tau} \Big\{ a(x,\tau)\, u_{\tau\tau} \Big\}_{x_i} dx\, d\tau =$$

$$= \int_0^t \int_{\partial\Omega} a(x,\tau)\, u_{\tau\tau} \left(\int_\Omega K(x,y,\tau)\, u(y,\tau)\, dy \right)_{\tau\tau} ds\, d\tau -$$

$$-\int_0^t \int_\Omega a(x,\tau) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,\tau)\, u_{x_j\tau\tau}\, u_{x_i\tau\tau}\, dx\, d\tau.$$

$$-\int_0^t \int_\Omega u_{\tau\tau} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,\tau)\, a_{x_i}(x,\tau)\, u_{x_j\tau\tau}\, dx\, d\tau.$$

Далее, оцениваем:

$$\left| \int_0^t \int_{\partial\Omega} a(x,\tau)\, u_{\tau\tau} \left(\int_\Omega K(x,y,\tau)\, u(y,\tau)\, dy \right)_{\tau\tau} ds\, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant c \int_0^t \int_\Omega \Big(|a(x,\tau)\, u_{\tau\tau}| + |a(x,\tau)\, \nabla u_{\tau\tau}| + |u_{\tau\tau}\, \nabla a(x,\tau)| \Big) \times$$

$$\times \int_\Omega \Big(R_3(y,\tau)\, |u(y,\tau)| + 2\, R_2(y,\tau)\, |u_\tau(y,\tau)| +$$

$$+ R_1(y,\tau)\, |u_{\tau\tau}(y,\tau)| \Big)\, dy\, ds\, d\tau.$$

Заметим, что из условий (2.8) следует, что

$$\int_\Omega |a(x,t)|^2\, dx < G, \qquad \int_\Omega |\nabla a(x,t)|^2\, dx < G \quad \forall t \in [0,T]$$

для некоторого числа G. Как уже было сказано выше, основную трудность представляет слагаемое, содержащее множитель $R_1(y,\tau)$, которое оценим в итоге следующим образом, используя неравенство Коши — Буняковского, а также элементарное неравенство (2.1):

$$c \int_0^t \int_\Omega \Big(|a(x,\tau)\, u_{\tau\tau}| + |a(x,\tau)\, \nabla u_{\tau\tau}| + |u_{\tau\tau}\, \nabla a(x,\tau)| \Big) \int_\Omega \Big(R_1(y,\tau)\, |u_{\tau\tau}(y,\tau)| \Big)\, dy\, dx\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c \int_0^t \int_\Omega \Big(|a(x,\tau)\, u_{\tau\tau}| + |a(x,\tau)\, \nabla u_{\tau\tau}| + |u_{\tau\tau}\, \nabla a(x,\tau)| \Big) \Big(\int_\Omega R_1^2(y,\tau)\, dy \times$$

$$\times \int_\Omega |u_{\tau\tau}^2(y,\tau)|\, dy \Big)^{\frac{1}{2}} dx\, d\tau \leqslant c \sup_{\tau\in[0,T]} \left(\int_\Omega R_1^2(y,\tau)\, dy \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^t \left(\int_\Omega |u_{\tau\tau}^2(y,\tau)|\, dy \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \int_\Omega \Big(|a(x,\tau)\, u_{\tau\tau}| + |a(x,\tau)\, \nabla u_{\tau\tau}| + |u_{\tau\tau}\, \nabla a(x,\tau)| \Big)\, dx\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c \sup_{\tau\in[0,T]} \left(\int_\Omega R_1^2(y,\tau)\, dy \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^t \left(\int_\Omega |u_{\tau\tau}^2(y,\tau)|\, dy \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \Bigg\{ \left(\int_\Omega |a(x,\tau)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u_{\tau\tau}|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\Omega |\nabla a(x,\tau)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |u_{\tau\tau}|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left(\int_\Omega |a(x,\tau)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla u_{\tau\tau}|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \Bigg\} d\tau \leqslant c\, G^{\frac{1}{2}} \sup_{\tau\in[0,T]} \left(\int_\Omega R_1^2(y,\tau)\, dy \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \int_\Omega u^2_{x_i\tau\tau}(x,\tau)\, dx\, d\tau + \frac{5}{2} \int_0^t \int_\Omega u^2_{\tau\tau}(x,\tau)\, dx\, d\tau \right\}.$$

Тогда имеем:

$$\int_0^t \int_\Omega (A_0\, u_{\tau\tau})^2\, dx\, d\tau - \int_0^t \int_\Omega a(x,\tau) \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,\tau)\, u_{x_i\tau\tau} u_{x_j\tau\tau}\, dx\, d\tau -$$

$$- \int_0^t \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,\tau)\, a_{x_i}(x,\tau)\, u_{\tau\tau} u_{x_j\tau\tau}\, dx\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant c \int_0^t \int_\Omega \Big(|a(x,\tau)\, u_{\tau\tau}| + |a(x,\tau)\, \nabla u_{\tau\tau}| + |u_{\tau\tau}\, \nabla a(x,\tau)| \Big) \times$$

$$\times \int_\Omega \Big(R_3(y,\tau)\, |u(y,\tau)| + 2\, R_2(y,\tau)\, |u_\tau(y,\tau)| +$$

$$+ R_1(y,\tau)\, |u_{\tau\tau}(y,\tau)| \Big)\, dy\, ds\, d\tau + \int_0^t \int_\Omega B\, u\, A_0\, u_{\tau\tau}\, dx\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_\Omega f\, A_0\, u_{\tau\tau}\, dx\, d\tau.$$

Интегрируя по частям и оценивая выражение справа сверху, вводя обозначение $q(t) = \int_0^t \int_\Omega (A_0\, u_{\tau\tau})^2\, dx\, d\tau$ и замечая, что $q(0) = 0$, используя неравенства (2.1), (2.2), а также условия (1.5), (1.6), (2.5)–(2.8), получаем следующую оценку:

$$q(t) \leqslant \delta_4^2 \int_0^t \int_\Omega (A_0\, u_{\tau\tau})^2\, dx\, d\tau +$$

$$+ P_5 \Big(\sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t \int_\Omega u^2_{x_i x_j}(x,\tau)\, dx\, d\tau + \int_0^t \int_\Omega |\nabla u_\tau(x,\tau)|^2\, dx\, d\tau +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t \int_\Omega u^2_{x_i\tau\tau}(x,\tau)\, dx\, d\tau + \int_0^t \int_\Omega u^2_{\tau\tau}\, dx\, d\tau + \int_0^t \int_\Omega u^2_\tau(x,\tau)\, dx\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_\Omega u^2(x,\tau)\, dx\, d\tau + \int_0^t \int_\Omega f^2(x,\tau)\, dx\, d\tau \Big) + \int_0^t \int_\Omega f\, A_0\, u_{\tau\tau}\, dx\, d\tau, \tag{4.9}$$

где число δ_4 — произвольное положительное число, P_5 есть число, определяющееся коэффициентами оператора B, а также областью Q_T и числом δ_4.

Тогда из (4.1)–(4.9) вытекает неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega u^2_{x_i t}(x,t)\, dx + \int_\Omega u^2_t(x,t)\, dx + \int_\Omega (A_0 u_t(x,t))^2 dx + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \int_\Omega u^2_{x_i\tau\tau}(x,\tau)\, dx\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_\Omega u^2_{\tau\tau}(x,\tau)\, dx\, d\tau + \int_0^t \int_\Omega (A_0 u_{\tau\tau}(x,\tau))^2\, dx\, d\tau \leqslant K_1\, \|f\|_{L_2(Q_T)}.$$

Эта оценка после перехода в ней к супремуму по $t \in [0,T]$ и дает требуемую оценку

$$\|u\|_V \leqslant K\, \|f\|_{L_2(Q_T)}. \tag{4.10}$$

Единственность решений краевой задачи (1.2)–(1.4) в пространстве V очевидна из априорной оценки (4.10). Теорема полностью доказана.

Заключение

В статье представлен новый результат по нелокальным задачам. Уравнения высокого порядка, нелокальные задачи для таких уравнений стали исследовать недавно. Получены условия на интегральное ядро в нелокальном условии. Вид условий отличается от таких в случае уравнений второго порядка, это вызвано большей сложностью получения априорных оценок. Результат обладает новизной и является важным шагом в исследовании уравнений высокого порядка.

Литература

[1] Кожанов А.И., Пулькина Л.С. Краевые задачи с интегральным граничным условием для многомерных гиперболических уравнений // Доклады РАН. 2005. Т. 404, № 5. С. 589–592. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=9157033.

[2] Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 9. С. 1166–1179. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=9296592.

[3] Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Доклады Академии наук. 2005. Т. 404, № 5.

[4] Абдрахманов А.М., Кожанов А.И. Задача с нелокальным граничным условием для одного класса уравнений нечетного порядка // Изв. вузов. Математика. 2007. № 5. С. 3–12. URL: http://mi.mathnet.ru/ivm1386.

[5] Абдрахманов А.М. О разрешимости краевой задачи с интегро-дифференциальным граничным условием для некоторых классов уравнений составного типа // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, Вып. 2. С. 3–10. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=18379047.

[6] Стретт Дж.В. (лорд Рэлей) Теория звука // ГИТТЛ. 1955. Т. 1. С. 273–274.

[7] Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике. Москва: Изд-во МГУ, 1993. 313 с.

[8] Габов С.А., Свешников А.Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. Москва: Наука. 1990. 344 с.

[9] Егоров И.Е., Федоров В.Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995. 133 с.

[10] Корпусов М.О. Разрушение в неклассических волновых уравнениях. Москва: URSS, 2010. 237 с.

[11] Дмитриев В.Б. Краевая задача с нелокальным граничным условием для уравнения четвертого порядка // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2016. Вып. 3–4. С. 32–50. URL: https://journals.ssau.ru/est/article/view/4256.

[12] Попов Н.С. О разрешимости краевых задач для многомерных параболических уравнений четвертого порядка с нелокальным граничным условием интегрального вида // Математические заметки СВФУ. 2016. Т. 23, № 1. С. 79–86. URL: http://mi.mathnet.ru/svfu17.

[13] Попов Н.С. О разрешимости краевой задачи для многомерных псевдогиперболических уравнений с нелокальным граничным условием интегрального вида // Математические заметки СВФУ. 2014. Т. 21, № 2. С. 69–80. URL: https://www.s-vfu.ru/universitet/rukovodstvo-i-struktura/instituty/niim/mzsvfu/issues/2014-2/69-80.pdf.

[14] Попов Н.С. Разрешимость краевой задачи для псевдопараболического уравнения с нелокальными интегральными условиями // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, № 3. С. 359–372. DOI: https://doi.org/10.1134/S0374064115030073.

[15] Кожанов А.И., Дюжева А.В. Нелокальные задачи с интегральным смещением для параболических уравнений высокого порядка // Известия Иркутского государственного университета. Естественнонаучная серия. Серия Математика. 2021. Т. 36. С. 14–28. DOI: https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.36.14.

[16] Юлдашев Т.К. Нелокальная краевая задача для неоднородного псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения с вырожденным ядром // Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер. 1. Мат. Физ. 2017. Вып. 1 (38). С. 42–54. DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2017.1.5.

[17] Юлдашев Т.К. Об одной краевой задаче для трехмерного аналога дифференциального уравнения Буссинеска // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2016. Т. 158, Кн. 3. С. 424–433. URL: http://mi.mathnet.ru/uzku1377.

[18] Юлдашев Т.К. Об одном интегро-дифференциальном уравнении Фредгольма в частных производных третьего порядка // Изв. вузов. Матем. 2015. № 9. С. 74–79. URL: http://mi.mathnet.ru/ivm9038.

[19] Бейлин А.Б. Пулькина Л.С. Задачи о колебаниях стержня с нелинейным затуханием второго порядка // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2015. № 3 (125). С. 9–20.

[20] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. Москва: Наука, 1973. 408 с.

[21] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. Москва: Наука, 1973.

[22] Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. Москва: Изд. ИЛ, 1961. 122 с.

[23] Треногин В.А. Функциональный анализ. Москва: Наука, 1980.

[24] Якубов С.Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-1-15-28

Submited: 12.01.2021
Revised: 17.02.2021
Accepted: 28.02.2021

V.B. Dmitriev
E-mail: dmitriev_v.b@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9788-7036

BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH A NONLOCAL BOUNDARY CONDITION OF INTEGRAL FORM FOR A MULTIDIMENSIONAL EQUATION OF IV ORDER

ABSTRACT

The aim of this paper is to study the solvability of solution of non-local problem with integral condition in spatial variables for high-order linear equation in the classe of regular solutions (which have all the squared derivatives generalized by S.L. Sobolev that are included in the corresponding equation). It is indicated that at first similar problems were studied for high-order equations either in the one-dimensional case, or under certain conditions of smallness by the value of T. A list of new works for the multidimensional case is also given. In this paper, we present new results on the solvability of non-local problem with integral spatial variables for high-order equation a) in the multidimensional case with respect to spatial variables; b) in the absence of smallness conditions by the value T; however, this condition exists for the kernel $K(x, y, t)$. The research method is based on obtaining a priori estimates of the solution of the problem, which implies its existence and uniqueness in a given space.

Key words: boundary value problem; non-local condition; high-order equation; priori estimates; integral boundary conditions; Boussinesq equation; regular solutions; uniqueness; existence.

Citation. Dmitriev V.B. Boundary value problem with a nonlocal boundary condition of integral form for a multidimensional equation of IV order. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 15–28. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-1-15-28. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

Victor Borisovich Dmitriev — Candidate of Physical and Mathematical Sciences.

References

[1] Kozhanov A.I., Pul'kina L.S. Boundary value problems with integral conditions for multidimensional hyperbolic equations. *Doklady Mathematics*, 2005, vol. 72, no. 2, pp. 743–746. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13480468 [English; Russian original]

[2] Kozhanov A.I., Pul'kina L.S. On the solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condition of integral form for multidimensional hyperbolic equations. *Differential Equations*, 2006, vol. 42, no. 9, pp. 1233–1246. DOI: http://doi.org/10.1134/S0012266106090023. [Englsh; Russian original]

[3] *Kozhanov A.I., Pul'kina L.S.* On the solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condition of integral form for multidimensional hyperbolic equations. *Doklady Mathematics*, 2005, vol. 404, no. 5. (In Russ.)

[4] Abdrakhmanov A.M., Kozhanov A.I. A problem with a non-local boundary condition for one class of odd-order equations. *Russian Mathematics*, 2007, vol. 51, no. 5, pp. 1–10. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X07050015. (In Russ.)

[5] Abdrakhmanov A.M. On the solvability of boundary value problem with integrodifferential boundary condition for some classes of composite type equations. *Mathematical Notes of YSU*, 2011, vol. 18, Issue 2, pp. 3–10. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=18379047. (In Russ.)

[6] Rayleigh J.W.S. Theory of sound. Moscow: GITTL, 1955, vol. 1, pp. 273—274. (In Russ.)

[7] Sveshnikov A.G., Bogolyubov A.N., Kravtsov V.V. Lectures on mathematical physics: textbook. Moscow: Izd-vo MGU, 1993, 313 p. (In Russ.)

[8] Gabov S.A., Sveshnikov A.G. Linear problems in the theory of nonstationary internal waves. Moscow: Nauka, 1990, 344 p. (In Russ.)

[9] Egorov I.E., Fedorov V.E. High-order non-classical equations of mathematical physics. Novosibirsk: Izd-vo VTs SO RAN, 1995, 133 p. (In Russ.)

[10] Korpusov P.O. Destruction in nonclassical wave equations. Moscow: URSS, 2010, 237 p. (In Russ.)

[11] Dmitriev V.B. A nonlocal problem with integral condition for a fourth order equation. *Vestnik Samarskogo Gosuniversiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara State University. Natural Science Series*, 2016, no. 3-4, pp. 32–50. Available at: https://journals.ssau.ru/est/article/view/4256. (In Russ.)

[12] Popov N.S. On the solvability of boundary value problems for multidimensional parabolic equations of fourth order with nonlocal boundary condition of integral form. *Mathematical Notes of NEFU*, 2016, vol. 23, no. 1, pp. 79–86. Available at: http://mi.mathnet.ru/svfu17. (In Russ.)

[13] Popov N.S. On the solvability of boundary value problems for higher-dimensional pseudohyperbolic equations with a nonlocal boundary condition in integral form. *Mathematical Notes of NEFU*, 2014, vol. 21, no. 2, pp. 69–80. Available at: https://www.s-vfu.ru/universitet/rukovodstvo-i-struktura/instituty/niim/mzsvfu/issues/2014-2/69-80.pdf. (In Russ.)

[14] Popov N.S. Solvability of a boundary value problem for a pseudoparabolic equation with nonlocal integral conditions. *Diferential Equations*, 2015, vol. 51, no. 3, pp. 362–375. DOI: http://doi.org/10.1134/S0012266115030076 [English; Russian original]

[15] Kozhanov A.I., Dyuzheva A.V. Non-local problems with integral displacement for high-order parabolic equations. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2021, vol. 36, pp. 14–28. DOI: https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.36.14. (In Russ.)

[16] Yuldashev T.K. Nonlocal boundary value problem for a nonhomogeneous pseudoparabolic-type integro-differential equation with degenerate kernel. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1. Mathematica. Physica = Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics*, 2017, issue 1 (38), pp. 42–54. DOI: https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2017.1.5. (In Russ.)

[17] Yuldashev T.K. On the boundary value problem for a three dimensional analog of the Boussinesq differential equation. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, book 3, pp. 424-–433. Available at: http://mi.mathnet.ru/uzku1377. (In Russ.)

[18] Yuldashev T.K. A certain Fredholm partial integro-differential equation of the third order. *Russian Mathematics*, 2015, vol. 59, no. 9, pp. 62—66. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X15090091. [English; Russian original]

[19] Beylin A.B., Pulkina L.S. Problem on vibration of a bar with nonlinear second-order boundary damping. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2015, no. 3 (125), pp. 9-–20. Available at: https://journals.ssau.ru/est/article/view/4487. (In Russ.)

[20] *Ladyzhenskaya O.A.* Boundary value problems of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1973, 408 p. (In Russ.)

[21] Ladyzhenskaya O.A., Uraltseva N.N. Linear and quasi-linear equations of elliptic type. Moscow: Nauka, 1973, 538 p. (In Russ.)

[22] *Gording L.* The Cauchy problem for hyperbolic equations. Leningrad: Moscow, 1961, 122 p. (In Russ.)

[23] Trenogin V.A. Functional analysis. Moscow: Nauka, 1980, 488 p. (In Russ.)

[24] Yakubov S.Ya. Linear differential-operator equations and their applications. Baku: Elm, 1985. (In Russ.)