МАТЕМАТИКА

Научная статья
DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-1-7-14

УДК 517.95

Дата: поступления статьи: 15.01.2021
после рецензирования: 17.02.2021
принятия статьи: 28.02.2021

А.В. Богатов
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: andrebogato@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5797-1930

ЗАДАЧА С ДИНАМИЧЕСКИМ НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

АННОТАЦИЯ

В статье рассмотрена задача с динамическим нелокальным условием для одномерного гиперболического уравнения, возникающая при исследовании колебаний стержня. Эта задача может служить математической моделью процессов, связанных с продольными колебаниями толстого или короткого стержня, и демонстрирует нелокальный подход к изучаемому явлению. Основной результат статьи состоит в обосновании разрешимости поставленной задачи. Получены условия на входные данные, обеспечивающие однозначную разрешимость поставленной задачи, проведено доказательство существования и единственности решения задачи в пространстве Соболева. Доказательство утверждений базируется на полученных в работе априорных оценках, методе Галеркина и свойствах пространств Соболева.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение; нелокальная задача; интегральные условия; единственность решения; разрешимость задачи.

Цитирование. Богатов А.В. Задача с динамическим нелокальным условием для одномерного гиперболического уравнения // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2021. Т. 27, № 1. С. 7–14. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-1-7-14.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Андрей Владимирович Богатов — аспирант кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

В статье рассмотрена нелокальная задача с интегральным условием, внеинтегральные члены которого содержат как след производной по пространственной переменной, так и след производной по времени, что отражает наличие в рассматриваемой системе демпфера. Такие условия возникают при математическом моделировании многих физических процессов и явлений. Строительные конструкции и сооружения в значительной степени подвержены как природным, так и техногенным динамическим воздействиям, к которым можно отнести ветровые и сейсмические воздействия, нагрузки от оборудования, движущегося транспорта, пешеходов. Энергия колебаний инженерных систем постепенно рассеивается за счет внутреннего трения в материале и внешнего сопротивления, что, безусловно, влияет на их колебательный процесс, а снижение интенсивности внешних динамических воздействий приводит к затуханию колебаний. Для обеспечения безаварийной работы инженерных систем необходимо проводить динамические расчеты конструкций и сооружений, выявлять их динамические характеристики. Также стоит отметить, что необходимо учитывать влияние эффекта внутреннего демпфирования, которое гасит колебания за счет трения в материале и тем самым влияет на общий колебательный процесс. И если уже известно, как учитывать эффекты внешнего трения (внешнее гашение колебаний), то задача учета внутреннего трения до сих пор не имеет однозначного решения. Переходя к математическим терминам, мы получаем задачу с нелокальными условиями, которая описывает модель внутреннего трения (нелокального демпфирования материала). В современной теории дифференциальных уравнений задачи с нелокальными условиями представляют собой интенсивно развивающееся направление [1–6]. Исследования нелокальных задач показали, что классические подходы к их решению неприменимы [7]. Однако к настоящему времени разработаны некоторые методы, позволяющие преодолеть трудности, возникающие вследствие нелокальных условий [8]. Модификацией одного из них мы и воспользовались для доказательства однозначной разрешимости поставленной задачи в пространстве Соболева.

1. Постановка задачи

В области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{tt} - (au_x)_x + bu_t + cu = f(x,t) \tag{1}$$

и поставим задачу: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0, \tag{2}$$

граничному условию

$$u_x(0,t) = 0 \tag{3}$$

и нелокальному условию

$$u_x(l,t) + \gamma u_t(l,t) + \int_0^l K(x)u_t(x,t)dx = 0. \tag{4}$$

Введем понятие обобщенного решения задачи. Обозначим

$$W(Q_T) = \{u : u \in W_2^1(Q_T), \quad u_t(l,t) \in L_2(0,T)\},$$

$$\hat{W}(Q_T) = \{v : v \in W(Q_T), \ v(x,T) = 0\}.$$

Следуя известной процедуре [9] и предположив, что $u(x,t)$ является классическим решением поставленной задачи, $v(x,t)$ — произвольная гладкая функция, такая, что $v(x,T) = 0$, получим равенство

$$\int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + au_x v_x + bu_t v + cuv)dxdt + \int_0^T v(l,t)[\gamma u_t(l,t) + \int_0^l K(x)u_t(x,t)dx]dt$$
$$= \int_0^T \int_0^l f(x,t)v(x,t)dxdt. \tag{5}$$

Заметим, что (5) выполняется, если $u \in W(Q_T), \quad v \in \hat{W}(Q_T)$.

Определение. Обобщенным решением задачи (1)-(4) будем называть функцию $u \in W(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(x,0) = 0$ и тождеству (5) для всех $v \in \hat{W}(Q_T)$.

2. Разрешимость задачи

Теорема 2.1. Если

$$a, a_t, b, b_t, c \in C(\bar{Q}_T), \quad f \in L_2(Q_T), \quad K \in C[0,l], \gamma > 0,$$

то существует единственное обобщенное решение задачи (1)–(4).

Доказательство

Единственность решения. Предположим, что существуют два обобщенных решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ задачи (1)–(4). Тогда их разность $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ удовлетворяет условию $u(x,0) = 0$ и тождеству

$$\int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + au_x v_x + bu_t v + cuv)dxdt + \int_0^T v(l,t)[\gamma u_t(l,t) + \int_0^l Ku_t dx]dt = 0. \tag{6}$$

Выберем в (6)

$$v = \begin{cases} \int_\tau^t u(x,\eta)d\eta, x \leqslant t \leqslant \tau, \\ \qquad 0, \tau \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

Заметим, что $v \in \hat{W}(Q_T)$, причем $v_t(x,t) = u(x,t)$. Интегрируя по частям в левой части (6), в результате несложных преобразований получим

$$\int_0^l [u^2(x,\tau) + av_x^2(x,0)]dx + 2\gamma \int_0^\tau u^2(l,t)dt = 2\int_0^\tau \int_0^l cuvdxdt - \int_0^\tau \int_0^l a_t v_x^2 dxdt -$$

$$- \int_0^\tau \int_0^l bu^2 dxdt - 2\int_0^\tau \int_0^l b_t uvdxdt + 2\int_0^T v(l,t)\int_0^l Ku_t dxdt.$$

Так как по условию $\gamma > 0$, то из этого равенства вытекает неравенство

$$\int_0^l [u^2(x,\tau) + av_x^2(x,0)]dx + 2\gamma \int_0^\tau u(l,t)^2 dt \leqslant 2|\int_0^\tau \int_0^l cuvdxdt| + |\int_0^\tau \int_0^l a_t v_x^2 dxdt| +$$

$$+|\int_0^\tau \int_0^l bu^2 dxdt| + 2|\int_0^\tau \int_0^l b_t uvdxdt| + 2|\int_0^T v(l,t)\int_0^l Ku_t dxdt|. \quad (7)$$

Оценим правую часть (7). Заметим, что в силу условий теоремы существуют числа a_1, c_0, b_0, k_0 такие, что $|a, a_t| \leqslant a_1, |b, b_t| \leqslant b_0, |c| \leqslant c_0, \int_0^l K^2(x)dx \leqslant k_0$. Тогда

$$|\int_0^\tau \int_0^l a_t v_x^2 dxdt| \leqslant a_1 \int_0^\tau \int_0^l v_x^2 dxdt,$$

$$|\int_0^\tau \int_0^l bu^2 dxdt| \leqslant b_0 \int_0^\tau \int_0^l u^2 dxdt.$$

Применяя неравенство Коши, получим

$$2|\int_0^\tau \int_0^l cuvdxdt| \leqslant c_0 \int_0^\tau \int_0^l (u^2 + v^2)dxdt;$$

$$2|\int_0^\tau \int_0^l b_t uvdxdt| \leqslant b_0 \int_0^\tau \int_0^l (u^2 + v^2)dxdt.$$

Прежде чем оценивать последнее слагаемое правой части (7), преобразуем его, интегрируя по частям и учитывая, что $v(x,\tau) = 0, \ \ u(x,0) = 0$. Получим

$$\int_0^\tau v(l,t)\int_0^l K(x)u_t dxdt = -\int_0^\tau v_t(l,t)\int_0^l K(x)u(x,t)dxdt.$$

Теперь воспользуемся неравенством Коши "с ε" и учтем, что $v_t = u$.

$$|\int_0^\tau u(l,t)\int_0^l K(x)udxdt| \leqslant \varepsilon \int_0^\tau u^2(l,t)dt + c(\varepsilon)\int_0^\tau (\int_0^l Kudx)^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \int_0^\tau u^2(l,t)dt + c(\varepsilon)k_0 \int_0^\tau \int_0^l u^2 dxdt.$$

Выберем ε так, чтобы $2\gamma - \varepsilon > 0$, и перенесем $\varepsilon \int_0^\tau u^2(l,t)dt$ в левую часть. Тогда

$$\int_0^l [u^2(x,\tau) + a_0 v_x^2(x,0)]dx + \nu \int_0^\tau u^2(l,t)dt \leqslant M \int_0^\tau \int_0^l (u^2 + v_x^2)dxdt,$$

где $\nu = 2\gamma - \varepsilon, M = max\{c(\varepsilon)k_0 + a_1; b_0\tau + a_1\}$ и в силу гиперболичности уравнения (1) всюду в $\bar{Q}_T$ $a(x,t) \geqslant a_0 > 0$.

В частности,

$$\int_0^l u^2(x,\tau) + a_0 v_x^2(x,0)dx \leqslant M \int_0^\tau \int_0^l (u^2 + v_x^2)dxdt.$$

Для дальнейшей оценки введем функцию $w(x,t) = \int_0^t u_x d\eta$. Нетрудно видеть, что тогда справедливы равенства

$$v_x(x,t) = w(x,t) - w(x,\tau), \quad v_x(x,0) = -w(x,\tau),$$

что приводит к неравенству

$$\int_0^l [u^2(x,\tau) + a_0 w^2(x,\tau)]dx \leqslant$$

$$\leqslant M \int_0^\tau \int_0^l u^2 dxdt + 2M \int_0^\tau \int_0^l w^2(x,t)dxdt + 2M \int_0^\tau \int_0^l w^2(x,\tau)dxdt. \quad (8)$$

Заметим, что
$$\int_0^\tau \int_0^l w^2(x,\tau)dxdt = \tau \int_0^l w^2(x,\tau)dx.$$
Тогда (8) принимает вид
$$\int_0^l [u^2(x,\tau) + a_0 w^2(x,\tau)]dx \leqslant 2M \int_0^\tau \int_0^l (u^2(x,t) + w^2(x,t))dxdt + 2M\tau \int_0^l w^2(x,\tau)dx.$$
Поскольку τ — произвольно, выберем его так, чтобы $a_0 - 2M\tau \geqslant \frac{a_0}{2}$.

Перенесем $2M\tau \int_0^l w^2(x,\tau)dx$ в левую часть и получим:
$$m_0 \int_0^l [u^2(x,\tau) + w^2(x,\tau)]dx \leqslant 2M \int_0^\tau \int_0^l (u^2(x,t) + w^2(x,t))dxdt,$$
где $m_0 = min\{1, a_0 - 2M\tau\}, \tau \in [0, \frac{a_0}{4M}]$.

Применяя лемму Гронуолла, получим, что $u = 0$ для $\tau \in [0, \frac{a_0}{4M}]$. Теперь рассмотрим следующий промежуток: $\tau \in [\frac{\mu}{4M}, \frac{\mu}{2M}]$. Так же получим $u = 0$. Продолжая эту процедуру так, как описано в [9], приходим к выводу, что $u = 0$ всюду в Q_T. Это и означает, что наше предположение неверно, стало быть, не может существовать более одного обобщенного решения поставленной задачи.

Единственность решения доказана.

Существование решения. Рассмотрим произвольную систему функций $w_k(x)$, принадлежащих $C^2[0,l]$, линейно независимую и полную в $W_2^1(0,l)$.

Будем искать решение в виде $u^m(x,t) = \sum_{k=1}^m c_k(t)w_k(x)$ из соотношений:
$$\int_0^l (u_{tt}^m w_i + a u_x^m w_i' + b u_t^m w_i + c u^m w_i)dx+$$
$$+w_i(l)[\gamma u_t^m(l,t) + \int_0^l K u_t^m dx] = \int_0^l f w_i dx. \tag{9}$$

Подставив в (9) представление $u^m(x,t)$, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:
$$\sum_{k=1}^m c_k''(t)A_{ik} + c_k'(t)B_{ik}(t) + c_k(t)D_{ik}(t) = g_i(t), \tag{10}$$
где
$$A_{ik} = \int_0^l w_k w_i dx,$$
$$B_{ik}(t) = \int_0^l b(x,t)w_k w_i(l)dx + \gamma w_k(l)w_i(l) + w_i(l)\int_0^l K(x)w_k(x)dx,$$
$$D_{ik}(t) = \int_0^l (a w_k' w_i' + c w_k w_i)dx,$$
$$g_i(t) = \int_0^l f(x,t)w_i(x)dx.$$
присоединив к которой начальные условия
$$c_k(0) = 0, c_k'(0) = 0, \tag{11}$$
получим задачу Коши.

Так как функции $w_k(x)$ линейно независимы, то матрица при старших коэффициентах (10) — матрица Грама, в силу чего система (10) разрешима относительно $c_k''(t)$. Условия теоремы гарантируют ограниченность ее коэффициентов и принадлежность правой части пространству $L_2(0,T)$. Поэтому задача Коши для этой системы однозначно разрешима, причем $c_k'' \in L_1(0,T)$. Таким образом, построена последовательность приближений $\{u^m(x,t)\}$.

Покажем, что из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к элементу пространства $W(Q_T)$.

Для дальнейших шагов в доказательстве существования решения поставленной задачи нам потребуются оценки, к выводу которых мы и перейдем.

Умножим (9) на $c_i^{'}(t)$, просуммируем по i от 1 до m и проинтегрируем в промежутке $[0,\tau]$, получим:

$$\int_0^\tau \int_0^l [u_{tt}^m u_t^m + a u_x^m u_{xt}^m + b(u_t^m)^2 + c u^m u_t^m] dxdt +$$

$$+ \int_0^\tau u_t^m(l,t)[\gamma u_t^m(l,t) + \int_0^l K u_t^m dx]dt = \int_0^\tau \int_0^l f u_t^m dxdt.$$

Интегрируя по частям, приходим к равенству

$$\frac{1}{2}\int_0^l [u_t^m(x,\tau))^2 + a(u_x^m(x,\tau)^2]dx + \gamma \int_0^\tau (u_t^m(l,t))^2 dt =$$

$$= -\int_0^\tau \int_0^l b(u_t^m)^2 dxdt - \int_0^\tau \int_0^l c u^m u_t^m dxdt - \int_0^\tau u_t^m(l,t)\int_0^l K(x) u_t^m(x,t) dxdt +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\tau \int_0^l a_t (u_x^m)^2 dxdt + \int_0^\tau \int_0^l f u_t^m dxdt,$$

из которого после умножения обеих частей на 2 следует неравенство

$$\int_0^l [u_t^m(x,\tau))^2 + a(u_x^m(x,\tau)^2]dx + 2\gamma \int_0^\tau (u_t^m(l,t))^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_0^\tau \int_0^l |b|(u_t^m)^2 dxdt + 2|\int_0^\tau \int_0^l u^m u_t^m dxdt| + 2|\int_0^\tau u_t^m(l,t)\int_0^l K(x) u_t^m(x,t) dxdt| +$$

$$+\int_0^\tau \int_0^l |a_t|(u_x^m)^2 dxdt + 2|\int_0^\tau \int_0^l f u_t^m dxdt|.$$

Получим априорную оценку, используя технику, продемонстрированную при доказательстве единственности. Особо отметим, что

$$2|\int_0^\tau u_t^m(l,t)\int_0^l K(x) u_t^m(x,t) dxdt| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \int_0^\tau (u_t^m(l,t))^2 dt + c(\varepsilon)\int_0^\tau (\int_0^l K u_t^m dx)^2 dt.$$

Выберем ε так, чтобы $2\gamma - \varepsilon > 0$, и перенесем в левую часть первое слагаемое, получим

$$\int_0^l [(u_t^m(x,\tau))^2 + a(u_x^m(x,\tau)^2]dx + \nu \int_0^\tau (u_t^m(l,t))^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_0^\tau \int_0^l [P(u_t^m)^2 + c_0(u^m)^2 + a_1(u_x^m)^2] dxdt + \int_0^\tau \int_0^l f^2 dxdt,$$

где $P = max\{2b_1 + k_0 + c_0 + 1\}, \nu = 2\gamma - \varepsilon.$

Прибавив к обеим частям очевидное неравенство

$$\int_0^l (u^m(x,\tau))^2 dx \leqslant \tau \int_0^\tau \int_0^l (u_t^m(x,t))^2 dxdt, \tag{12}$$

которое является следствием представления $u^m(x,\tau) = \int_0^\tau u_t^m(x,t)dt$, получим

$$m\int_0^l [(u^m(x,\tau))^2 + (u_t^m(x,\tau))^2 + (u_x^m(x,\tau))^2]dx + \nu \int_0^\tau (u_t^m(l,t))^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant P_1 \int_0^\tau \int_0^l [(u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2] dxdt + \int_0^\tau \int_0^l f^2 dxdt, \tag{13}$$

где $m = min\{1, a_0\}, P_1 = max\{P, c_0, a_1\}.$

В частности,

$$\int_0^l [(u^m(x,\tau))^2 + (u_t^m(x,\tau))^2 + (u_x^m(x,\tau))^2]dx \leqslant$$

$$\leqslant P_2 \int_0^\tau \int_0^l [(u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2] dxdt + \frac{1}{m}\int_0^\tau \int_0^l f^2 dxdt,$$

где $P_2 = P_1/m$. Применим лемму Гронуолла:

$$\int_0^l [(u^m(x,\tau))^2 + (u_t^m(x,\tau))^2 + (u_x^m(x,\tau))^2]dx \leqslant e^{P_2\tau}\frac{1}{m}||f||^2_{L_2(Q_T)}.$$

После интегрирования по τ в промежутке $[0,T]$:

$$\int_0^T\int_0^l [(u^m(x,\tau))^2 + (u_t^m(x,\tau))^2 + (u_x^m(x,\tau))^2]dxdt \leqslant \frac{1}{P_1}(e^{P_2T}-1)||f||^2_{L_2(Q_T)}.$$

Возвращаясь к (10), рассмотрим и оценим второе слагаемое левой части неравенства:

$$\nu\int_0^\tau (u_t^m(l,t))^2dt \leqslant P_2\int_0^\tau\int_0^l (u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2dxdt + \int_0^\tau\int_0^l f^2dxdt.$$

Обозначим

$$\frac{1}{P_1}(e^{P_2T}-1) = P_3.$$

Выше было доказано, что

$$\int_0^\tau\int_0^l (u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2dxdt \leqslant \frac{1}{P_1}(e^{P_2T}-1)||f|| = P_3||f||.$$

Тогда получим

$$\int_0^\tau (u_t^m(l,t))^2dt \leqslant P_4||f||^2, \forall\tau\in[0,T],$$

где $P_4 = P_2P_3 + 1$, откуда получаем, что

$$||u^m(x,t)||^2_{W(Q_T)} \leqslant K, K = max\{P_3, P_4\},$$

причем K не зависит от m. Так как константа в правой части последнего неравенства не зависит от m, то из последовательности $u^m(x,t)$ можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому элементу $u(x,t)\in W(Q_T)$.

Покажем, что этот предел удовлетворяет тождеству (5). Умножим (9) на функцию $h_j(t)\in C^1(Q_T)$, такую, что $h_j(T)=0$, просуммируем по j (от 1 до m) и проинтегрируем по t от 0 до T.

Обозначив

$$\eta(x,t) = \sum_{j=1}^m h_j(t)w_j(x),$$

получаем после интегрирования первого слагаемого левой части

$$\int_0^T\int_0^l (-u_t^m\eta_t + au_x^m\eta_x + bu_t^m\eta + cu^m\eta)dxdt +$$
$$+\int_0^T \eta[\gamma u_t^m(l,t) + \int_0^l Ku_t^m dx]dt = \int_0^T\int_0^l f\eta dxdt. \tag{14}$$

Тождество (12) справедливо для любой функции $\eta(x,t)$. Обозначим совокупность таких функций $\eta(x,t)$ через σ_m. В (12) перейдем к пределу при фиксированной функции $\eta(x,t)\in\sigma_m$. Это приведет к тождеству (5) для предельной функции $u(x,t)$. Так как совокупность всех функций $\eta(x,t)$ плотна в $W_2^1(Q_T)$ [10], то полученное тождество выполнено для любой функции $v(x,t)\in W_2^1(Q_T)$. Следовательно, $u(x,t)$ — обобщенное решение задачи (1).

Теорема полностью доказана.

Заключение

Таким образом, была поставлена задача с динамическим нелокальным условием для одномерного гиперболического уравнения, возникающая при исследовании колебаний стержня, получено обобщенное решение поставленной задачи. Проведены необходимые преобразования, получены оценки для доказательства единственности и существования решения.

Литература

[1] Гордезиани Д.Г., Авалишвили Г.А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Матем. моделирование. 2000. Т. 12, № 1. С. 94–103. URL: http://mi.mathnet.ru/mm832

[2] Кожанов А.И. О разрешимости некоторых краевых задач с условием Бицадзе-Самарского для линейных гиперболических уравнений // Современная математика и ее приложения. Тбилиси, 2010. Т. 67. С. 84–96.

[3] Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости некоторых граничных задач со смещением для линейных гиперболических уравнений // Математический журнал. Алматы. 2009. Т. 9, № 2. С. 78–92.

[4] Пулькина Л.С. О разрешимости в L_2 нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36, № 2. С. 279–280. URL: http://mi.mathnet.ru/de10101.

[5] Пулькина Л.С Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения // Матем. заметки. 2003. Т. 74, № 3. С. 435–445. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm277.

[6] Bouziani A. Strong solution to an hyperbolic evolution problem with nonlocal boundary conditions // Maghreb Math. Rev. 2000. V. 9. P. 71–84.

[7] Бейлин С.А. Смешанные задачи с интегральными условиями для волнового уравнения. Самара, 2005.

[8] Pulkina L.S. Solution to nonlocal problems of pseudohyperbolic equations // EJDE. 2014. V. 116. P. 1–9. URL: http://ejde.math.txstate.edu.

[9] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. Москва: Наука, 1973. 408 с. URL: https://booksee.org/book/442669.

[10] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. Москва: Наука, 1976. 391 с. URL: https://booksee.org/book/442690.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-1-7-14

Submited: 15.01.2021
Revised: 17.02.2021
Accepted: 28.02.2021

A.V. Bogatov
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: andrebogato@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5797-1930

A PROBLEM WITH NONLOCAL CONDITION FOR ONE-DIMENSIONAL HYPERBOLIC EQUATION

ABSTRACT

In this paper, we study the problem with a dynamic nonlocal condition for the one-dimensional hyperbolic equation, which occurs in the study of rod vibrations. This problem may be used as a mathematical model of longitudinal vibration in a thick short bar and illustrates a nonlocal approach to such processes. Conditions have been obtained for input data, providing unambiguous resolution of the task, proof of the existence and singularity of the problem in the space of Sobolev. The proof is based on the a priori estimates obtained in this paper, Galerkin's procedure and the properties of the Sobolev spaces.

Key words: hyperbolic equation; nonlocal problem; integral conditions; singularity of the solution; solveability of the problem.

Citation. Bogatov A.V. A problem with nonlocal condition for one-dimensional hyperbolic equation. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 7–14. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-1-7-14. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

Andrey Vladimirovich Bogatov — postgraduate student of the Department of Equations of Mathematical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

References

[1] Gordeziani D.G., Avalishvili G.A. On the construcing of solutions of the nonlocal initial boundary value problems for one-dimensional medium oscillation equations. *Mathematical models and Computer Simulations*, 2000, vol. 12, no. 1, pp. 94–103. Available at: http://mi.mathnet.ru/mm832. (In Russ.)

[2] Kozhanov A.I. On the solvability of some boundary value problems with the Bitsadze-Samarsky condition for linear hyperbolic equations. In: *Sovremennaya matematika i ee prilozheniya.* Tbilisi, 2010, vol. 67, pp. 84–96. (In Russ.)

[3] Kozhanov A.I., Pul'kina L.S. On the solvability of some boundary value problems with displacement for linear hyperbolic equations. *Matematicheskii zhurnal*, 2006, no. 42, pp. 1233–1246. (In Russ.)

[4] Pul'kina L.S. The L_2 solvability of a nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation. *Differential equations*, 2000, vol. 36, no. 2, pp. 316–318. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02754219. (English; Russian original)

[5] Pul'kina L.S. A Mixed Problem with Integral Condition for the Hyperbolic Equation. *Mathematical Notes*, 2003, vol. 74, no. 3, pp. 411–421. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1026167021195 (English; Russian original)

[6] Bouziani A. Strong solution to a hyperbolic evolution problem with nonlocal boundary conditions. *Maghreb Math. Rev.*, 2000, vol. 9, pp. 71–84.

[7] Beylin S.A. Mixed problems with integral conditions for the wave equation. Samara, 2005. (In Russ.)

[8] Pulkina L.S. Solution to nonlocal problems of pseudohyperbolic equations. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2014, vol. 116, pp. 1–9. Available at: http://ejde.math.txstate.edu.

[9] Ladyzhenskaya O.A. Boundary problems of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1973, 407 p. Available at: https://booksee.org/book/442669. (In Russ.)

[10] Mihailov V.P. Partial differential equations. Moscow: Nauka, 1976, 391 p. Available at: https://booksee.org/book/442690. (In Russ.)