

**НАУЧНАЯ СТАТЬЯ**

УДК 330.4

Дата поступления: 25.08.2021  
рецензирования: 30.09.2021  
принятия: 26.11.2021

**Определение регрессионных функций кривых обучения  
в серийном производстве автомобилей**

**О.В. Павлов**

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,  
г. Самара, Российская Федерация  
E-mail: pavlov@ssau.ru

**Аннотация:** В статье рассматривается задача определения регрессионных функций кривых обучения в серийном производстве автомобилей. По статистическим данным автомобилестроительного предприятия построены четыре функции заданного вида: степенная Райта, степенная Стэнфорда–В, экспоненциальная и логистическая. Параметры функций кривых обучения определяются численно с помощью нелинейного метода наименьших квадратов. Выполнена оценка значимости и надежности регрессионных зависимостей. Выявлено, что регрессионные функции кривых обучения в серийном производстве автомобилей наилучшим образом аппроксимируются степенной функцией Стэнфорда–В.

**Ключевые слова:** кривые обучения; регрессионные зависимости; серийное производство автомобилей.

**Цитирование.** Павлов О.В. Определение регрессионных функций кривых обучения в серийном производстве автомобилей // Вестник Самарского университета. Экономика и управление. 2021. Т. 12, № 4. С. 212-222. DOI: <http://doi.org/10.18287/2542-0461-2021-12-4-212-222>.

**Информация о конфликте интересов:** автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

© Павлов О.В., 2021

*Олег Валерьевич Павлов* – доцент кафедры «Менеджмент и организация производства», Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

**SCIENTIFIC ARTICLE**

Submitted: 25.08.2021  
Revised: 30.09.2021  
Accepted: 26.11.2021

**Determination of the regression functions  
of learning curves in series cars production**

**O.V. Pavlov**

Samara National Research University, Samara, Russian Federation  
E-mail: pavlov@ssau.ru

**Abstract:** The article deals with the problem of determining the regression functions of learning curves in the serial production of cars. According to the statistical data of the automobile manufacturing enterprise, four functions of a given type are constructed: Wright's power-law, Stanford-B power-law, exponential and logistic. The parameters of the learning curve functions are determined numerically using a nonlinear least squares method. The estimation of the significance and reliability of the regression models is carried out. It was found that the regression functions of learning curves in series cars production are best approximated by the Stanford – B power function.

**Keywords:** learning curves; regression relationships; series production of cars.

**Citation.** Pavlov O.V. Determination of the regression functions of learning curves in series cars production. *Vestnik Samarskogo universiteta. Ekonomika i upravlenie* = Vestnik of Samara University. Economics and management, vol. 12, no. 4. pp. 212-222. DOI: <http://doi.org/10.18287/2542-0461-2021-12-4-212-222>. (In Russ.)

**Information on the conflict of interest:** author declares no conflict of interest.

© Pavlov O.V., 2021

Oleg V. Pavlov – Associate Professor, Samara National Research University, 34, Moskovskoe shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

## Введение

В процессе производства на промышленных предприятиях проявляется эффект кривой обучения. Эффект кривой обучения заключается в том, что удельные затраты времени работников при увеличении кумулятивного объема производства снижаются. Эффект кривой обучения был выявлен инженером Т. Райтом для авиастроительного предприятия [1]. Близкой к кривой обучения является кривая опыта, описанная сотрудниками корпорации Boston Consulting Group [2]. В научной литературе, в основном иностранной, приводятся исследования по построению различных зависимостей, количественно описывающих снижение удельных затрат (трудоемкости) с увеличением кумулятивного объема производства. Наиболее полно обзор, обсуждение и сравнение различных функций кривых обучения представлены в научных публикациях [3-5]. В работе [6] выполнен анализ моделей итерационного научения для обучаемых систем: живых и технических. Однако следует отметить недостаточное количество исследований по определению регрессионных зависимостей в автомобилестроительной отрасли.

Целью данной работы является определение регрессионных зависимостей кривых обучения по данным серийного производства автомобилей ВАЗ 2121 «Нива» и ВАЗ 2109 «Самара» предприятия АО «АВТОВАЗ». Регрессионные функции кривых обучения имеют большое практическое значение для принятия управленческих решений на промышленном предприятии. Полученные регрессионные зависимости могут быть применены для решения прикладных оптимизационных и игровых задач в целях совершенствования производственной деятельности.

## Постановка задачи и методика решения

По статистическим данным о динамике изменения оплачиваемой трудоемкости автомобиля ВАЗ 2121 «Нива» и ВАЗ 2109 «Самара» в серийном производстве на предприятии АО «АВТОВАЗ» необходимо выбрать вид регрессионного уравнения, определить параметры регрессионных функций, оценить допускаемую при этом ошибку, статистическую значимость и надежность.

Задача определения регрессионных функций решается следующим образом. По анализу корреляционного поля зависимой переменной от независимой выбирается вид регрессионной функции. Для регрессионной функции заданного вида определяются параметры:

$$\hat{y}_x = f(x),$$

где  $\hat{y}_x$  – оплачиваемая трудоемкость производства автомобиля, расчетное значение зависимой переменной,  $x$  – кумулятивный объем производства автомобилей, независимая переменная.

Для решения задачи используются методы регрессионного и корреляционного анализа [7]. Для нахождения параметров регрессионной функции  $f(x)$  применяется нелинейный метод наименьших квадратов [5, 7]:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{xi})^2 \rightarrow \min, \quad (1)$$

где  $y_i$  – фактические значения трудоемкости автомобиля в  $i$ -ом наблюдении,  $\hat{y}_{xi}$  – расчетные значения трудоемкости автомобиля, рассчитанные по уравнению регрессии,  $n$  – число наблюдений.

Метод наименьших квадратов заключается в поиске оценок параметров регрессионной функции, которые минимизируют сумму квадратов отклонений фактических значений  $y_i$  от расчетных значений  $\hat{y}_{xi}$ . Рассматриваемые в работе регрессионные функции внутренне не линейны по оцениваемым

параметрам, поэтому для решения оптимизационной задачи (1) используется численный градиентный метод.

Для выбора наилучшей регрессионной зависимости кривой обучения рассматриваются четыре различные функции, описанные в научной литературе [1-5].

1. Степенная функция Райта:

$$y = C_1 x^{-b}, \quad (2)$$

где  $y$  – трудоемкость производства автомобиля,  $C_1$  – трудоемкость производства первого автомобиля,  $x$  – кумулятивный объем производства автомобилей,  $b$  – индекс обучения, характеризует скорость снижения трудоемкости автомобиля при увеличении кумулятивного объема производства.

2. Функция Стэнфорда – В, которая является модификацией степенной функции Райта:

$$y = C_1 (x + B)^{-b}, \quad (3)$$

где  $B$  – параметр функции.

3. Экспоненциальная функция:

$$y = C_0 + \beta e^{-\alpha x}, \quad (5)$$

где  $C_0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  – параметры экспоненциальной функции.

4. Логистическая функция:

$$y = y_{min} + (y_{max} - y_{min}) \left[ \frac{1}{1 + \beta e^{\alpha x}} \right], \quad (6)$$

где  $y_{min}$ ,  $y_{max}$  – минимальные и максимальные значения трудоемкости автомобиля,  $\alpha$ ,  $\beta$  – параметры логистической функции.

Выбор наилучшей из регрессионных функций осуществляется на основе расчета остаточной дисперсии  $\sigma_{ост}^2$ :

$$\sigma_{ост}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{xi})^2. \quad (7)$$

Для оценки тесноты связи между зависимой и независимой переменными в построенных регрессионных зависимостях, рассчитывается индекс парной корреляции:

$$R_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{xi})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (8)$$

где  $\bar{y}$  – средняя величина трудоемкости производства автомобиля, определяемая по формуле:

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^n y_i.$$

Чем ближе индекс парной корреляции к 1, тем более тесная связь между оплачиваемой трудоемкостью автомобиля и кумулятивным объемом производства автомобилей.

Для оценки качества построенных регрессионных функций вычисляется индекс детерминации:

$$R^2 = R_{xy}^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{xi})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}. \quad (9)$$

Индекс детерминации показывает долю изменения трудоемкости автомобиля, обусловленную изменением кумулятивного объема производства. Чем ближе индекс детерминации к 1, тем лучше качество построенной регрессионной зависимости.

Для построенных регрессионных зависимостей проводится оценка значимости с помощью  $F$ -критерия Фишера. Выдвигается гипотеза о статистической незначимости регрессионной функции и показателя тесноты связи. Выполняется сравнение фактического  $F_{факт}$  и табличного  $F_{табл}$  значений  $F$ -критерия Фишера.

Значение фактического  $F$ -критерия вычисляется по формуле:

$$F_{\text{факт}} = \frac{R^2}{1 - R^2} \frac{n - m - 1}{m}, \quad (10)$$

где  $m$  – число параметров при кумулятивном объеме производства автомобилей  $x$ .

Табличное значение  $F_{\text{табл}}$  определяется по таблице критических значений, при уровне значимости  $\alpha$  и двух степенях свободы  $k_1 = m$ ,  $k_2 = n - m - 1$ . Уровень значимости  $\alpha$  в расчетах принимается равным 0,01.

Если фактическое значение  $F$ -критерия Фишера больше табличного, то гипотеза о случайной природе оцениваемых переменных отклоняется и признается статистическая значимость и надежность регрессионной зависимости. В противном случае гипотеза не отклоняется и признается статистическая незначимость, ненадежность построенной регрессионной функции.

Качество анализируемых нелинейных регрессионных функций также оценивается по средней ошибке аппроксимации:

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{(y_i - \hat{y}_{xi})}{y_i} \right| 100\%. \quad (11)$$

Значение средней ошибки аппроксимации до 10% свидетельствует о достаточной точности регрессионной функции.

### Определение регрессионной функции кривой обучения для модели ВАЗ 2121 «Нива»

Динамика оплачиваемой трудоемкости одного автомобиля модели ВАЗ 2121 «Нива» в зависимости от кумулятивного объема производства с 1976 года по 2007 год представлена на рис. 1.

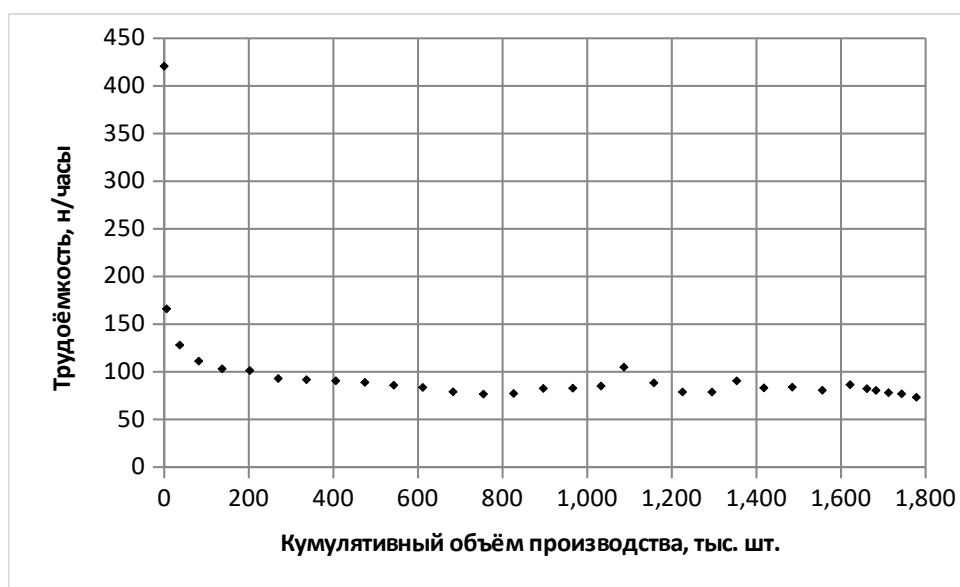


Рисунок 1 – Зависимость трудоемкости автомобиля модели ВАЗ 2121 «Нива» от кумулятивного объема производства

Из анализа рис. 1 видно, что корреляционное поле соответствует нелинейному регрессионному уравнению  $f(x)$ . Параметры регрессионных зависимостей кривых обучения (2)-(6) для ВАЗ 2121 «Нива» были определены в результате решения оптимизационной задачи (1). Для численного решения использовался инструмент Поиск решения электронной таблицы Excel 2013, нелинейный метод ОПГ (обобщенного понижающего градиента).

Регрессионные зависимости кривой обучения представлены ниже.

1. Степенная функция Райта:

$$y = 251,47 x^{-0,1646}$$

2. Степенная функция Стэнфорда – В:

$$y = 200,15(x - 0,05)^{-0,1268}$$

3. Экспоненциальная функция:

$$y = 87,52 + 337,22 e^{-0,2442x}$$

4. Логистическая функция:

$$y = 73,22 + 347,46 \left[ \frac{1}{1 + 0,0005 e^{1,4383x}} \right]$$

Регрессионные зависимости кривой обучения для серийного производства автомобилей модели ВАЗ 2121 «Нива» представлены на рис. 2-5.

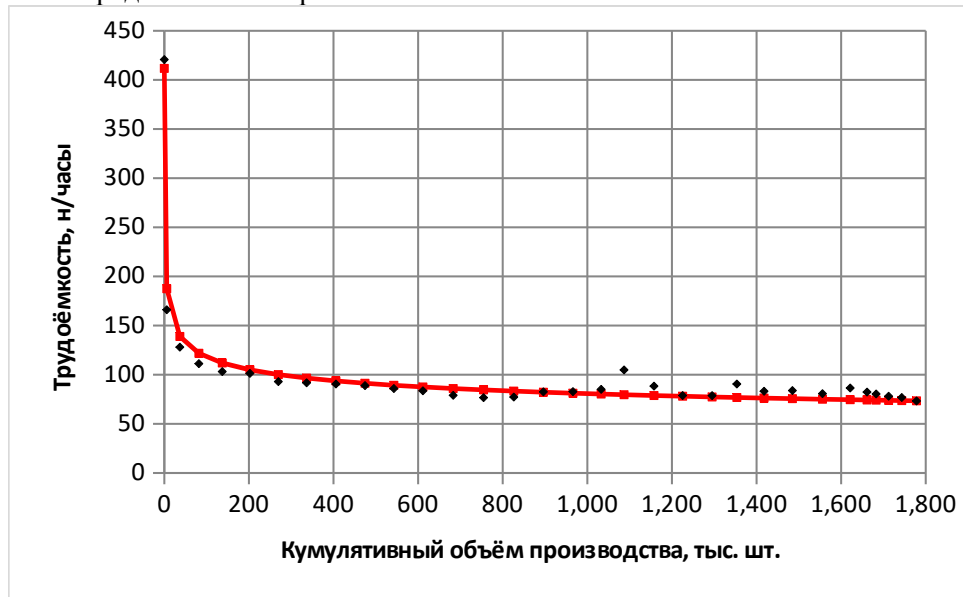


Рисунок 2 – Степенная функция Райта кривой обучения для модели ВАЗ 2121 «Нива»

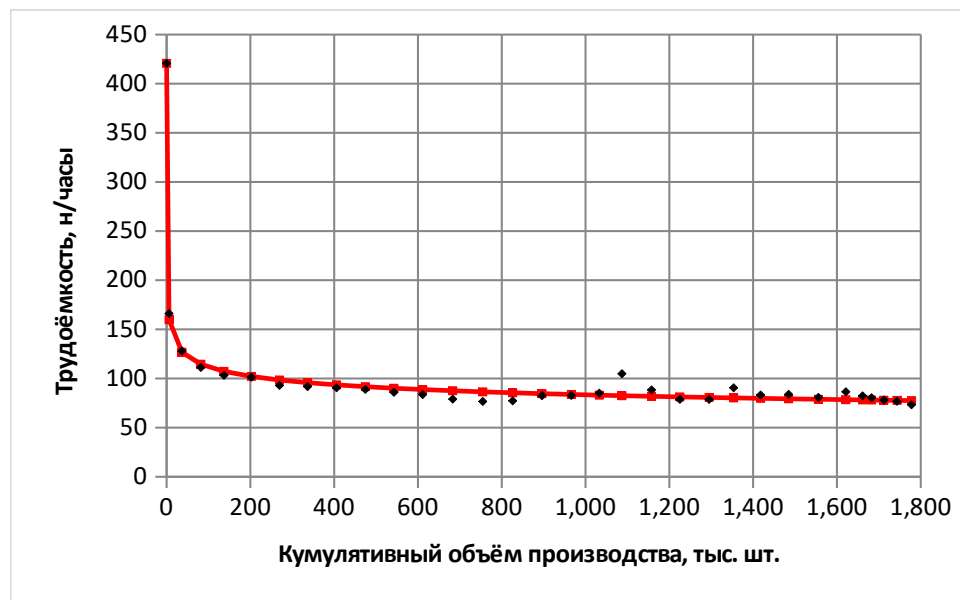


Рисунок 3 – Степенная функция Стэнфорда-В кривой обучения для модели ВАЗ 2121 «Нива»

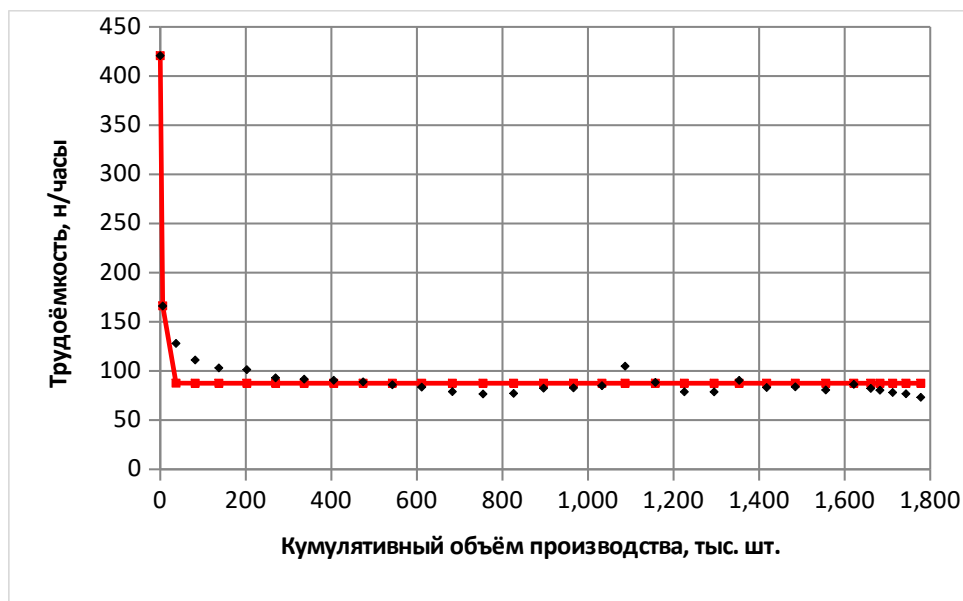


Рисунок 4 – Экспоненциальная функция кривой обучения для модели VAZ 2121 «Нива»



Рисунок 5 – Логистическая функция кривой обучения для модели VAZ 2121 «Нива»

В таблице 1 для регрессионных зависимостей кривой обучения для модели VAZ 2121 «Нива» приводятся рассчитанные по формулам (7)-(11) значения остаточной дисперсии  $\sigma_{\text{ост}}^2$ , индекса парной корреляции  $R_{xy}$ , индекса детерминации  $R^2$ , фактического значения  $F$ -критерия Фишера  $F_{\text{факт}}$ , средней ошибки аппроксимации  $\bar{A}$ .

Из анализа таблицы 1 можно сделать вывод, что у степенной функции Стэнфорда-В наименьшие остаточная дисперсия  $\sigma_{\text{ост}}^2$  и средняя ошибка  $\bar{A}$  среди рассматриваемых функций. Индекс парной корреляции  $R_{xy}$  и индекс детерминации  $R^2$  ближе к 1 также у степенной функции Стэнфорда-В. Следовательно, наилучшим образом статистические данные серийного производства автомобилей модели VAZ 2121 «Нива» аппроксимирует степенная функция Стэнфорда-В.

Для оценки значимости построенной степенной функции было определено табличное значение  $F$ -критерия Фишера  $F_{\text{табл}} = 7,56$ . Так как фактическое значение  $F$ -критерия Фишера больше таблично-

го значения  $F_{\text{факт}} > F_{\text{табл}}$ , то гипотеза о случайной природе оцениваемых переменных отклоняется и признается статистическая значимость и надежность степенной функции Стэнфорда-В.

**Таблица 1 – Расчет статистических характеристик функций кривых обучения для модели ВАЗ 2121 «Нива»**

№	функция	Остаточная дисперсия	Индекс парной корреляции	Индекс детерминации	Фактическое значение $F$ -критерия Фишера	Средняя ошибка аппроксимации
1	Степенная Райта	77,77	0,9892	0,9785	1367,84	7,08%
2	Степенная Стэнфорда-В	38,11	0,9947	0,9895	2822,65	5,07%
3	Экспоненциальная	127,86	0,9822	0,9647	820,19	8,76%
4	Логистическая	319,92	0,9563	0,9145	320,85	14,14%

Средняя ошибка аппроксимации  $\bar{A}$  имеет значение меньше 10%, что свидетельствует о достаточной точности построенной степенной функции Стэнфорда-В.

**Определение регрессионной функции кривой обучения для модели ВАЗ 2109 «Самара»**

Динамика оплачиваемой трудоемкости одного автомобиля модели ВАЗ 2109 «Самара» в зависимости от кумулятивного объема производства с 1986 года по 2004 год представлена на рис. 6.

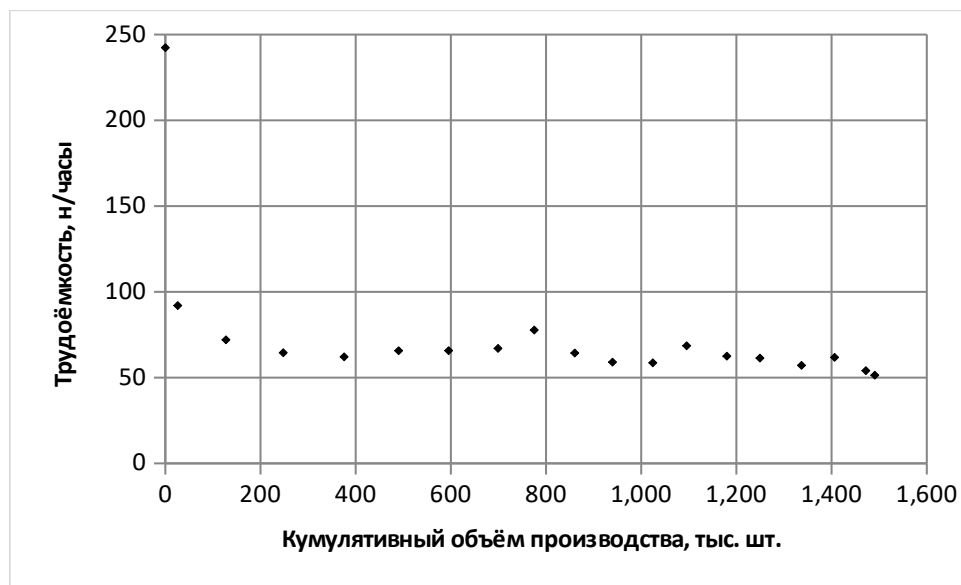


Рисунок 6 – Зависимость трудоемкости автомобиля модели ВАЗ 2109 «Самара» от кумулятивного объема производства

Из анализа рис. 6 можно сделать вывод, что корреляционное поле соответствует нелинейной регрессионной функции  $f(x)$ . Параметры функций кривых обучения (2)-(6) для автомобилей модели ВАЗ 2109 «Самара» были определены в результате решения оптимизационной задачи (1). Для численного решения использовался инструмент Поиск решения электронной таблицы Excel 2013, нелинейный метод ОПГ (обобщенного понижающего градиента).

Регрессионные функции кривой обучения представлены ниже.

1. Степенная функция Райта:

$$y = 177,88 x^{-0,1591}$$

2. Степенная функция Стэнфорда – В:

$$y = 123,34(x - 0,1578)^{-0,1008}$$

3. Экспоненциальная функция:

$$y = 63,11 + 181,18e^{-0,0698x}$$

4. Логистическая функция:

$$y = 51,35 + 190,95 \left[ \frac{1}{1 + 0,0004e^{0,3483x}} \right]$$

Построенные регрессионные функции кривых обучения для автомобилей модели ВАЗ 2109 «Самара» представлены на рис. 7–10.

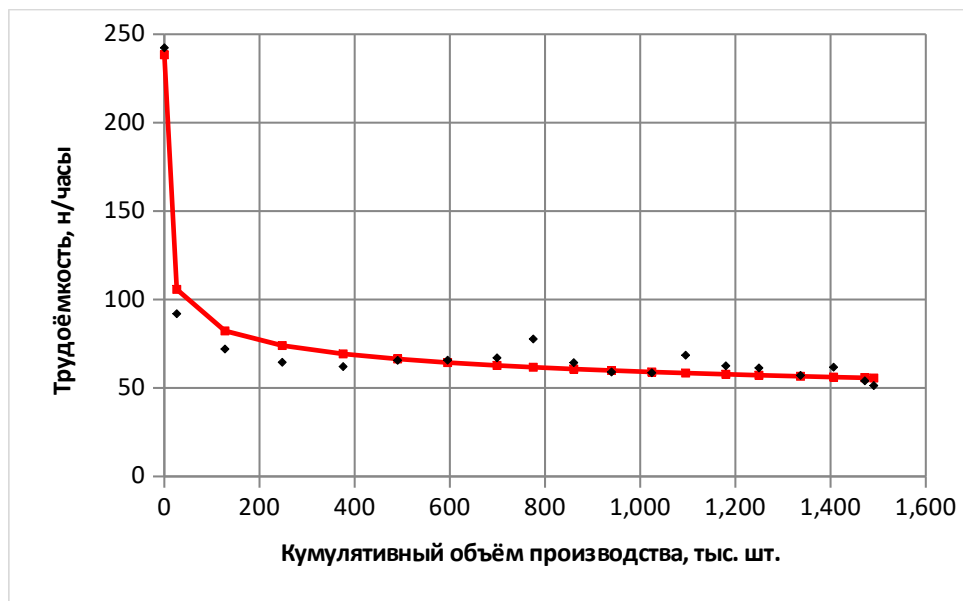


Рисунок 7 – Степенная функция Райта кривой обучения для модели ВАЗ 2109 «Самара»

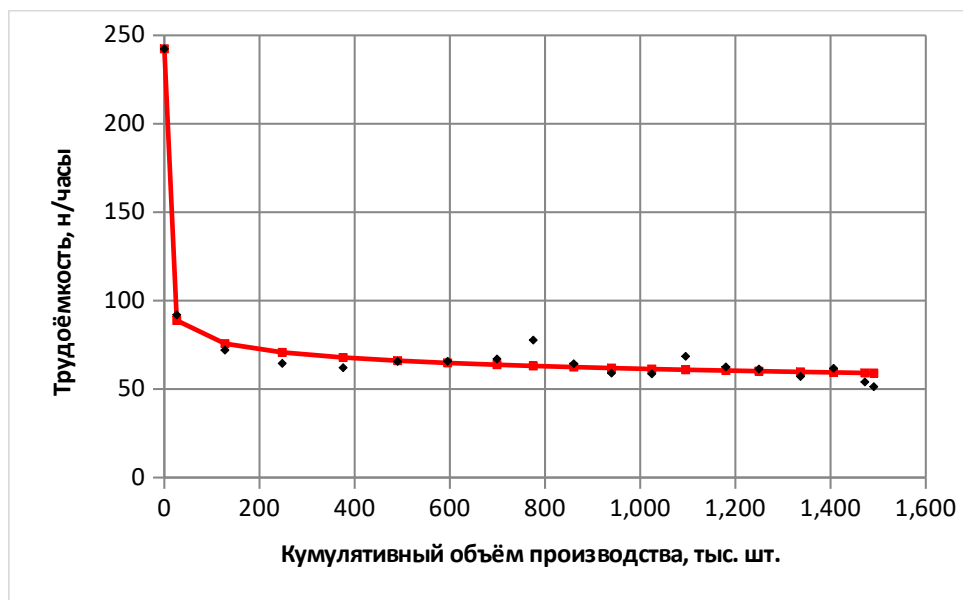


Рисунок 8 – Степенная функция Стэнфорда-В кривой обучения для модели ВАЗ 2109 «Самара»



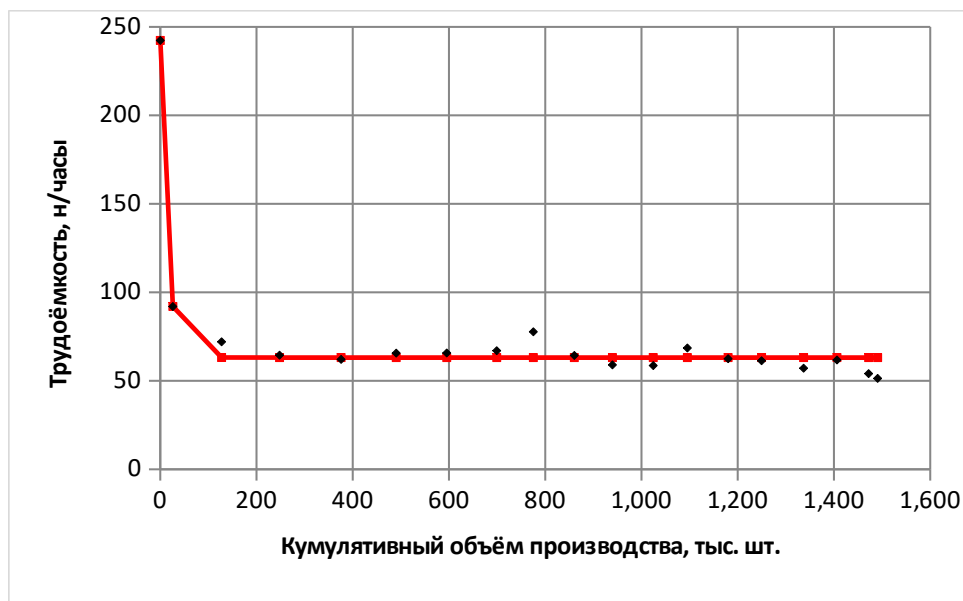


Рисунок 9 – Экспоненциальная функция кривой обучения для модели ВАЗ 2109 «Самара»



Рисунок 10 – Логистическая функция кривой обучения для модели ВАЗ 2109 «Самара»

В таблице 2 для регрессионных функций кривых обучения для автомобилей модели ВАЗ 2109 «Самара» приводятся рассчитанные по формулам (7)-(11) значения остаточной дисперсии  $\sigma_{\text{ост}}^2$ , индекса парной корреляции  $R_{xy}$ , индекса детерминации  $R^2$ , фактического значения  $F$ -критерия Фишера  $F_{\text{факт}}$ , средней ошибки аппроксимации  $\bar{A}$ .

Из анализа таблицы 2 делается вывод, что у степенной функции Стэнфорда-В наименьшие остаточная дисперсия  $\sigma_{\text{ост}}^2$  и средняя ошибка  $\bar{A}$  среди рассматриваемых функций. Индекс парной корреляции  $R_{xy}$  и индекс детерминации  $R^2$  ближе к 1 у степенной функции Стэнфорда-В. Следовательно, наилучшим образом статистические данные серийного производства автомобилей модели ВАЗ 2109 «Самара» аппроксимирует степенная функция Стэнфорда-В.

Для оценки значимости построенной функции определяется табличное значение  $F$ -критерия Фишера  $F_{\text{табл}} = 8,40$ . Так как фактическое значение критерия  $F$ -Фишера больше табличного значения  $F_{\text{факт}} > F_{\text{табл}}$ , то гипотеза о случайной природе оцениваемых переменных отклоняется и признается статистическая значимость и надежность степенной функции Стэнфорда-В.

**Таблица 2. Расчет статистических характеристик регрессионной зависимости кривых обучения для автомобилей ВАЗ 2109 «Самара»**

№	Функция	Остаточная дисперсия	Индекс парной корреляции	Индекс детерминации	Фактическое значение <i>F</i> -критерия Фишера	Средняя ошибка аппроксимации
1	Степенная Райта	49,27	0,9849	0,9701	551,68	7,66%
2	Степенная Стэнфорда-В	26,41	0,9920	0,9840	1043,99	6,05%
3	Экспоненциальная	34,35	0,9895	0,9792	798,76	6,81%
4	Логистическая	150,33	0,9512	0,9048	171,03	15,18%

Средняя ошибка аппроксимации  $\bar{A}$  имеет значение меньше 10%, что свидетельствует о достаточной точности построенной степенной функции Стэнфорда-В.

#### Полученные результаты и выводы

На основе статистических данных автомобилестроительного предприятия АО «АВТОВАЗ» о серийном производстве моделей автомобилей ВАЗ 2121 «Нива» с 1976 года по 2007 год и ВАЗ 2109 «Самара» с 1986 года по 2004 год определены регрессионные функции кривых обучения. Построены четыре регрессионные зависимости трудоемкости автомобиля от кумулятивного объема производства (кривые обучения): степенная Райта, степенная Стэнфорда-В, экспоненциальная и логистическая. Рассчитаны статистические характеристики для каждой регрессионной функции. Из анализа графиков регрессионных уравнений и рассчитанных статистических характеристик были сделаны следующие выводы:

1. Кривую обучения в серийном производстве автомобилей модели ВАЗ 2121 «Нива» наилучшим образом аппроксимирует степенная функция Стэнфорда-В:

$$y = 200,15(x - 0,05)^{-0,1268}$$

2. Кривую обучения в серийном производстве автомобилей модели ВАЗ 2109 «Самара» наилучшим образом аппроксимирует степенная функция Стэнфорда-В:

$$y = 123,34(x - 0,1578)^{-0,1008}$$

3. Проведенное исследование показало статистическую значимость и надежность рассмотренных регрессионных функций кривых обучения.

4. Результаты расчетов свидетельствуют о достаточной точности построенных регрессионных уравнений.

Полученные регрессионные зависимости кривых обучения могут быть применены для обоснования управленческих решений в процессе организации производственной деятельности на промышленных предприятиях.

#### Библиографический список

1. Wright T.P. Factors affecting the cost of airplanes // Journal of the aeronautical sciences. 1936. V. 3. no. 4. P. 122-128.
2. Henderson B. The Application and Misapplication of the Learning Curve // Journal of Business Strategy. 1984. V.4 no. 3. P. 3-9.
3. Badiru A. Computational survey of univariate and multivariate learning curve models // IEEE Transactions on Engineering Management. 1992. V. 39, no. 2. P. 176-188.
4. Yelle L.E. The learning curve: Historical review and comprehensive survey // Decision Sciences. 1979. V. 10, no. 2. P. 302-328.

5. Learning Curves: Theory, Models, and Applications / edited by Mohamad Y. Jaber. Boca Raton: CRC Press, 2011. 476 P.
6. Новиков Д.А. Закономерности итеративного научения. – М.: Институт проблем управления РАН, 1998. – 96 с.
7. Эконометрика: учебник / Под ред. И.И. Елисеевой. М.: Финансы и статистика, 2003. 344 с.

## References

1. Wright T.P. Factors affecting the cost of airplanes // Journal of the aeronautical sciences. 1936. V. 3. no. 4. P. 122-128.
2. Henderson B. The Application and Misapplication of the Learning Curve // Journal of Business Strategy. 1984. V.4 no. 3. P. 3-9.
3. Badiru A. Computational survey of univariate and multivariate learning curve models // IEEE Transactions on Engineering Management. 1992. V. 39, no. 2. P. 176-188.
4. Yelle L.E. The learning curve: Historical review and comprehensive survey // Decision Sciences. 1979. V. 10, no. 2. P. 302-328.
5. Learning Curves: Theory, Models, and Applications / edited by Mohamad Y. Jaber. Boca Raton: CRC Press, 2011. 476 P.
6. Novikov D.A. Patterns of iterative learning. – М.: Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, 1998. – 96 p. (In Rus)
7. Ekonometrika: uchebnik / Edited by I.I. Yeliseyeva. Moscow: Finansy i statistika Publ, 2003. 344 p. (In Rus)