DOI: 10.18287/2542-0461-2021-12-4-195-211

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

УДК 330.47

Дата поступления: 24.08.2021
рецензирования: 26.09.2021
принятия: 26.11.2021

Моделирование и оценка риска минимального портфеля, копирующего фондовый индекс

В.Н. Никишов
Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: tsh-sea05@yandex.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3629-4015

В.О. Левченко
Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: vadlev83@yandex.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-8648-3300

Аннотация: В статье предложена методика формирования минимального портфеля, копирующего фондовый индекс. Методика основана на использовании индекса оценки монополизма на рынке (индекса Герфиндаля) в качестве целевой функции и формировании ряда ограничений, обеспечивающих доходность и риск формируемого портфеля на уровне фондового индекса. В силу стохастической динамики ценных бумаг оценка степени подобия в части доходности и риска производилась методами имитационного моделирования в предположении, что изменение стоимости каждого актива удовлетворяет логарифмическому броуновскому движению с учетом ковариации между активами. Методика формирования минимального портфеля копирующего фондовый индекс оказывается особенно полезной в силу периодического пересмотра состава рыночного индекса, так как позволяет снизить количество затратных операций по переформатированию инвестиционного портфеля. Минимальный портфель, сформированной на основе предлагаемой методики – с одной стороны обеспечивает практически не меньшую доходность и не больший риск, чем индексный портфель, с другой стороны дает значительное уменьшение расходов на осуществление весьма затратных операций, связанных с переформатированием портфеля.

Ключевые слова: математическая модель; оценка риска; портфель ценных бумаг; фондовый индекс; минимальный порфель; cardinality condition; мосбиржа; ri.imoex.
Цитирование. Никишов В.Н., Левченко В.О. Моделирование и оценка риска минимального портфеля, копирующего фондовый индекс // Вестник Самарского университета. Экономика и управление. 2021. Т. 12, № 4. С. 195-211. DOI: http://doi.org/10.18287/2542-0461-2021-12-4-195-211.
Информация о конфликте интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Никишов Виктор Николаевич – доцент кафедры «Математики и бизнес-информатики», Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г.Самара, Московское шоссе, 34.

Левченко Вадим Олегович – старший преподаватель кафедры «Математики и бизнес-информатики», Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г.Самара, Московское шоссе, 34.

SCIENTIFIC ARTICLE

Submitted: 24.08.2021
Revised: 26.09.2021
Accepted: 26.11.2021

Modeling and risk assessment of the minimum portfolio copying the stock index

V.N. Nikishov
Samara National Research University,
Samara, Russian Federation
E-mail: tsh-sea05@yandex.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3629-4015

V.O. Levchenko
Samara National Research University,
Samara, Russian Federation
E-mail: vadlev83@yandex.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-8648-3300

Abstract: The article proposes a methodology for forming a minimum portfolio that copies a stock index. The methodology is based on the use of the index for assessing monopoly in the market (Herfindahl index) as an objective function and the formation of a number of restrictions that ensure the profitability and risk of the formed portfolio at the level of the stock index. Due to the stochastic dynamics of securities, the assessment of the degree of similarity in terms of profitability and risk was made using simulation methods under the assumption that the change in the value of each asset satisfies the logarithmic Brownian motion, taking into account the covariance between assets. The method of forming the minimum portfolio copying the stock index turns out to be especially useful due to the periodic revision of the composition of the market index, as it allows to reduce the number of costly operations to reformat the investment portfolio. The minimum portfolio formed on the basis of the proposed methodology – on the one hand, provides practically no less profitability and no greater risk than the index portfolio, on the other hand, it provides a significant reduction in the cost of performing very costly operations associated with reformatting the portfolio.
Key words: mathematical model; risk assessment; portfolio of securities; stock index; minimum portfolio; cardinality condition; Moscow exchange; ri.imoex.
Citation. Nikishov V.N., Levchenko V.O. Modeling and risk assessment of the minimum portfolio copying the stock index. *Vestnik Samarskogo universiteta. Economika i upravlenie* = Vestnik of Samara University. Economics and management, vol. 12, no. 4. pp. 195-211. DOI: http://doi.org/10.18287/2542-0461-2021-12-4-195-211. (In Russ.)
Information on the conflict of interest: authors declares no conflict of interest.

Victor N. Nikishov – associate Professor of the Department of Mathematics and Business Informatics, Samara University, 34, Moskovskoe shosse, Samara, 443086, Russian Federation.
Vadim O. Levchenko – senior lecturer of the Department of Mathematics and Business Informatics, Samara University, 34, Moskovskoe shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Введение

Нестабильная экономическая ситуация в стране, неуклонное снижение депозитных ставок, уменьшение доверия к надежности банков заставляет инвесторов рассматривать все возможные способы сохранения средств, в том числе путем участия в биржевой торговле ценными бумагами.

Одной из самых надежных стратегий инвестирования, как начинающих, так и опытных инвесторов является формирование портфеля ценных бумаг более или менее подобного составу фондовых индексов, таких как ST500, Nasdag и др. за рубежом и, типа RTS, IMOEX и их отраслевых разновидностей у нас.

Периодическое изменение состава ценных бумаг, входящих в индекс вынуждает инвестора совершать большое количество затратных операций для поддержания подобия ранее сформированного портфеля новому составу индекса.

Индексные фонды имеют целью создание портфелей, чье поведение почти дублирует тот или иной рыночный индекс. Если бы они просто копировали состав индекса, то потери на переформирование такого портфеля могли бы быть очень существенны, так как это потребовало бы большого числа операций с бумагами, входящими в индекс с небольшими лотами. Было бы идеально, если бы можно было бы сформировать портфель из небольшого числа ценных бумаг, динамика которого полностью дублировала бы динамику цены индексного портфеля. Это позволило бы вместо большого количества операций с небольшими лотами делать небольшое число операций (возможно с большими лотами). Конечно, на практике это невозможно и за возможность сократить число бумаг в портфеле приходится платить возможным отклонением динамики цены подобного портфеля от динамики цены индексного портфеля. Тем не менее, в некоторых случаях это оказывается оправданным.

Характеристики индекса Мосбиржи RI.IMOEX

Таблица 1 – База индекса Мосбиржи: RI.IMOEX [1]

№	Ти-кер	Цена	Кол-во	Капитал-я	Free-float	Коэф огр	Капитал в ин-дексе	Вес,%
1	AFKS	34,165	9 650 000 000	329 692 250 000	0,33	1	108 798 442 500	0,61%
2	AFLT	66,880	2 444 535 448	163 490 530 762	0,41	1	67 031 117 613	0,37%
3	ALRS	108,820	7 364 965 630	801 455 559 857	0,34	1	272 494 890 351	1,52%
4	CBOM	7,204	29 829 709 866	214 893 229 875	0,2	1	42 978 645 975	0,24%
5	CHMF	1 483,400	837 718 660	1 242 671 860 244	0,22	1	273 387 809 254	1,53%
6	DSKY	140,980	739 000 000	104 184 220 000	0,74	1	77 096 322 800	0,43%
7	FEES	0,217	1 274 665 323 063	276 831 814 863	0,18	1	49 829 726 675	0,28%
8	FIVE	2 401,500	271 572 872	652 182 252 108	0,41	1	267 394 723 364	1,49%
9	GAZP	226,740	23 673 512 900	5 367 732 314 946	0,5	0,890986	2 683 866 157 473	13,36 %
10	GLTR	506,850	178 740 916	90 594 833 275	0,57	1	51 639 054 967	0,29%
11	GMKN	23 250,000	158 245 476	3 679 207 317 000	0,38	0,890986	1 398 098 780 460	6,96%
12	HHRU	2 601,200	50 317 860	130 886 817 432	0,48	1	62 825 672 367	0,35%
13	HYDR	0,814	439 288 905 849	357 712 956 033	0,19	1	67 965 461 646	0,38%
14	IRAO	5,077	104 400 000 000	530 038 800 000	0,33	1	174 912 804 000	0,98%
15	LKOH	6 172,500	692 865 762	4 276 713 915 945	0,55	0,890986	2 352 192 653 770	11,71 %
16	LSRG	826,600	103 030 215	85 164 775 719	0,42	1	35 769 205 802	0,20%
17	MAGN	58,650	11 174 330 000	655 374 454 500	0,16	1	104 859 912 720	0,59%
18	MAIL	1 751,800	208 582 082	365 394 091 248	0,53	1	193 658 868 361	1,08%
19	MGNT	5 300,000	101 911 355	540 130 181 500	0,68	1	367 288 523 420	2,05%
20	MOEX	171,090	2 276 401 458	389 469 525 449	0,63	1	245 365 801 033	1,37%
21	MTSS	314,700	1 998 381 575	628 890 681 653	0,45	1	283 000 806 744	1,58%
22	NLMK	236,200	5 993 227 240	1 415 600 274 088	0,21	1	297 276 057 558	1,66%
23	NVTK	1 495,800	3 036 306 000	4 541 706 514 800	0,21	1	953 758 368 108	5,33%
24	OZON	3 990,000	179 230 154	715 128 314 460	0,21	1	150 176 946 037	0,84%
25	PHOR	4 102,000	129 500 000	531 209 000 000	0,25	1	132 802 250 000	0,74%
26	PIKK	871,000	660 497 344	575 293 186 624	0,18	1	103 552 773 592	0,58%

Продолжение таблицы 1

№	Тикер	Цена	Кол-во	Капитал-я	Free-float	Коэф огр	Капитал в индексе	Вес,%
27	PLZL	13 446,500	136 069 400	1 829 657 187 100	0,21	1	384 228 009 291	2,15%
28	POGR	25,705	3 957 270 254	101 721 631 879	0,65	1	66 119 060 721	0,37%
29	POLY	1 452,200	471 818 000	685 174 099 600	0,71	1	486 473 610 716	2,72%
30	QIWI	795,500	51 487 257	40 958 112 944	0,57	1	23 346 124 378	0,13%
31	ROSN	570,950	10 598 177 817	6 051 029 624 616	0,11	1	665 613 258 708	3,72%
32	RSTI	1,532	198 827 865 141	304 564 523 823	0,11	1	33 502 097 621	0,19%
33	RTKM	107,590	3 282 997 929	353 217 747 181	0,29	1	102 433 146 683	0,57%
34	RUAL	48,700	15 193 014 862	739 899 823 779	0,17	1	125 782 970 042	0,70%
35	SBER	293,840	21 586 948 000	6 343 108 800 320	0,48	0,836093	3 044 692 224 154	14,22 %
36	SBERP	293,070	1 000 000 000	293 070 000 000	1	0,836093	293 070 000 000	1,27%
37	SNGS	34,715	35 725 994 705	1 240 227 906 184	0,25	1	310 056 976 546	1,73%
38	SNGSP	41,500	7 701 998 235	319 632 926 753	0,73	1	233 332 036 529	1,30%
39	TATN	598,900	2 178 690 700	1 304 817 860 230	0,32	1	417 541 715 274	2,33%
40	TATNP	562,700	147 508 500	83 003 032 950	1	1	83 003 032 950	0,46%
41	TCSG	4 503,200	199 305 492	897 512 491 574	0,58	1	520 557 245 113	2,91%
42	TRNFP	151 400,000	1 554 875	235 408 075 000	0,37	1	87 100 987 750	0,49%
43	VTBR	0,040	12 960 541 337 338	516 477 572 293	0,27	1	139 448 944 519	0,78%
44	YNDX	4 804,400	320 430 479	1 539 476 193 308	0,97	0,890986	1 493 291 907 508	7,43%

На рисунке 1 представлена дневная динамика курса индекса за первые 4 месяца 2021 года.

Как можно видеть доходность индекса характеризуется большой волатильностью.

Ковариационная матрица доходности V – матрица размерностью 44*44.

На основе дневных данных за 4 месяца 2021 года вычислены значения альфа и бета ценных бумаг, входящих в индекс, вычисленные на основе дневных данных за первые 4 месяца 2021 года.

Линия рынка ценных бумаг SLM, построена на основе курса акций, входящих в индекс Мосбиржи по дневным данным за 4 месяца 2021 года изображена на рисунке 3.

- **Математическая формулировка задачи**

Структура индекса характеризуется вектором столбцом c, данный вектор приведен в таблице 1 – последний столбец. Размерность вектора c равна n=44.

Дневная средняя доходность ценных бумаг $\overline{r_j}, j = 1,2..n$ вычислена по данным за 4 месяца 2021 года и приведена в таблице наряду с вектором c.

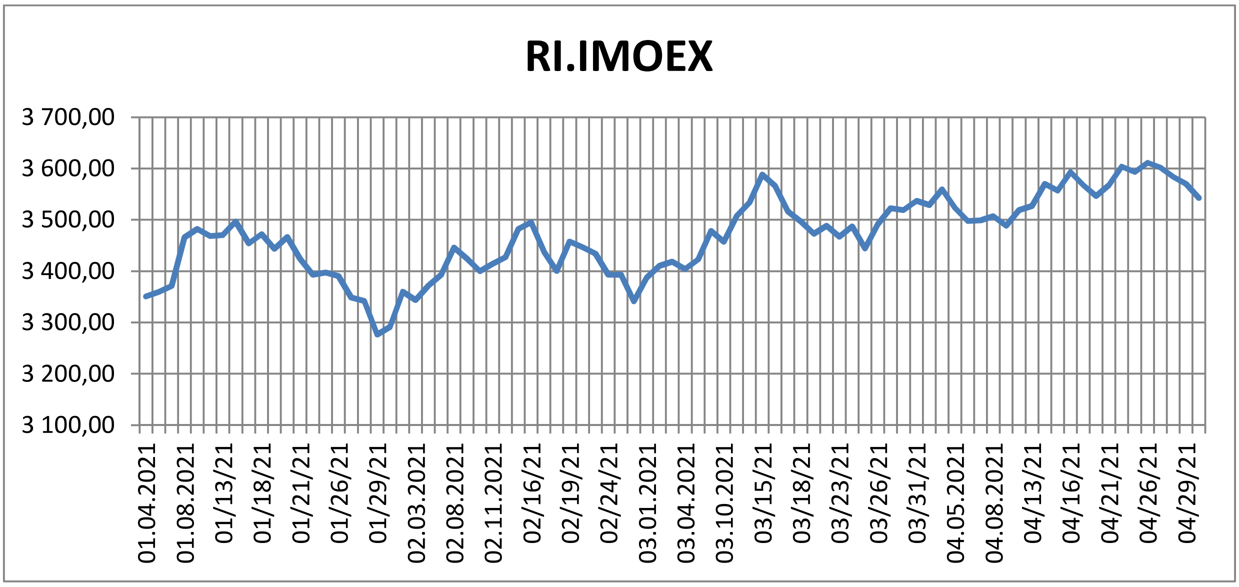

Рисунок 1 – Дневная динамика курса индекса за первые 4 месяца 2021 года

На рисунке 2 представлена доходность индекса за этот же период времени.

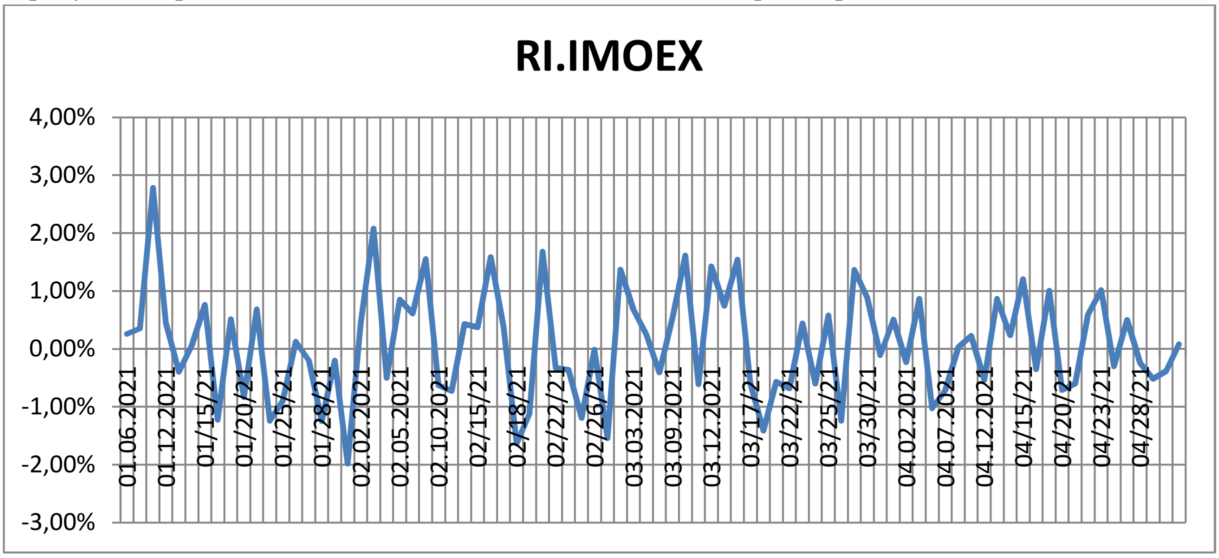

Рисунок 2 – Доходность индекса за первые 4 месяца 2021 года

Таблица 2 – Alfa, beta ценных бумаг входящих в индекс

Тикер	rsred	beta	alfa	Тикер	rsred	beta	alfa
AFKS	0,21%	0,821	0,46%	NVTK	0,14%	1,622	0,04%
AFLT	-0,13%	0,409	0,10%	OZON	0,46%	1,208	0,34%
ALRS	0,12%	0,555	0,33%	PHOR	0,38%	0,175	0,25%
CBOM	0,12%	0,568	0,32%	PIKK	0,56%	0,332	0,41%
CHMF	0,37%	0,941	0,55%	PLZL	-0,15%	0,376	-0,32%
DSKY	0,12%	0,068	0,29%	POGR	-0,21%	0,151	-0,39%
FEES	-0,06%	0,443	0,09%	POLY	-0,17%	0,362	-0,37%
FIVE	-0,19%	0,418	-0,06%	QIWI	0,06%	0,666	-0,15%
GAZP	0,10%	1,064	0,22%	ROSN	0,24%	0,921	0,01%
GLTR	0,02%	0,399	0,12%	RSTI	-0,25%	0,593	-0,25%

Продолжение таблицы 2

Тикер	rsred	beta	alfa	Тикер	rsred	beta	alfa
GMKN	0,10%	1,311	0,19%	RTKM	0,09%	0,323	0,09%
HHRU	0,41%	-0,127	0,48%	RUAL	0,45%	1,153	0,45%
HYDR	0,09%	0,398	0,15%	SBER	0,11%	1,060	0,11%
IRAO	-0,09%	0,475	-0,05%	SBERP	0,18%	0,810	0,18%
LKOH	0,16%	1,207	0,18%	SNGS	-0,06%	0,947	-0,06%
LSRG	-0,09%	0,358	-0,08%	SNGSP	0,02%	0,369	0,02%
MAGN	0,20%	0,600	0,19%	TATN	-0,03%	1,281	-0,03%
MAIL	-0,19%	0,364	-0,21%	TATNP	-0,04%	1,112	-0,04%
MGNT	-0,14%	0,513	-0,18%	TCSG	0,69%	1,328	0,69%
MOEX	0,13%	0,283	0,08%	TRNFP	0,01%	0,395	0,01%
MTSS	-0,05%	0,392	-0,12%	VTBR	0,34%	0,755	0,34%
NLMK	0,29%	0,784	0,20%	YNDX	-0,04%	0,878	-0,04%

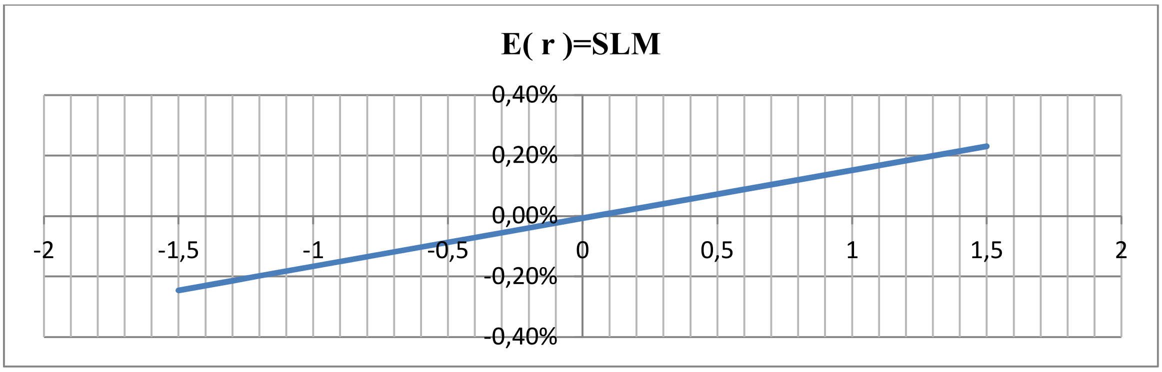

Рисунок 3 – Линия рынка ценных бумаг SLM

Таблица 3 – Структура рыночного индекса RI.IMOEX и средняя дневная доходность акций индекса

N	Тикер	$\overline{r}_j$	c_j	N	Тикер	$\overline{r}_j$	c_j
1	AFKS	0,21%	0,61%	23	NVTK	0,14%	5,33%
2	AFLT	-0,13%	0,37%	24	OZON	0,46%	0,84%
3	ALRS	0,12%	1,52%	25	PHOR	0,38%	0,74%
4	CBOM	0,12%	0,24%	26	PIKK	0,56%	0,58%
5	CHMF	0,37%	1,53%	27	PLZL	-0,15%	2,15%
6	DSKY	0,12%	0,43%	28	POGR	-0,21%	0,37%
7	FEES	-0,06%	0,28%	29	POLY	-0,17%	2,72%
8	FIVE	-0,19%	1,49%	30	QIWI	0,06%	0,13%
9	GAZP	0,10%	13,36%	31	ROSN	0,24%	3,72%
10	GLTR	0,02%	0,29%	32	RSTI	-0,25%	0,19%
11	GMKN	0,10%	6,96%	33	RTKM	0,09%	0,57%
12	HHRU	0,41%	0,35%	34	RUAL	0,45%	0,70%
13	HYDR	0,09%	0,38%	35	SBER	0,11%	14,22%
14	IRAO	-0,09%	0,98%	36	SBERP	0,18%	1,27%
15	LKOH	0,16%	11,71%	37	SNGS	-0,06%	1,73%
16	LSRG	-0,09%	0,20%	38	SNGSP	0,02%	1,30%
17	MAGN	0,20%	0,59%	39	TATN	-0,03%	2,33%

Продолжение таблицы 3

N	Тикер	$\overline{r_j}$	c_j	N	Тикер	$\overline{r_j}$	c_j
18	MAIL	-0,19%	1,08%	40	TATNP	-0,04%	0,46%
19	MGNT	-0,14%	2,05%	41	TCSG	0,69%	2,91%
20	MOEX	0,13%	1,37%	42	TRNFP	0,01%	0,49%
21	MTSS	-0,05%	1,58%	43	VTBR	0,34%	0,78%
22	NLMK	0,29%	1,66%	44	YNDX	-0,04%	7,43%

Разреженный портфель будет характеризоваться вектором $x_j, j = 1,2 \ldots m < n$ меньшей размерности.

Доходность индекса определяется как портфель ценных бумаг c, доходность которого равна $RI = c^T r = 0{,}105\%$. Волатильность индекса $dI = (c^T V c)^{0,5} = 1{,}055\%$ [2].

Нужно найти портфель x, аппроксимирующий рыночный индекс с наименьшим количеством ценных бумаг.

При построении минимального портфеля желательно чтобы ошибка аппроксимации была минимальной, например, чтобы не превышала малой величины ε:

$$\sqrt{E((c-x)^T r)^2 / E(c^T r)^2} \le \varepsilon.$$

В развернутом виде:

$$\sqrt{(c-x)^T V (c-x) + (c-x)\bar{r}\bar{r}^T (c-x)} / \sqrt{c^T V c + c^T \bar{r}\bar{r}^T c} \le \varepsilon \tag{1}$$

Пусть m – количество ценных бумаг в разреженном портфеле, для которых $x_j > 0, j = 1,2..m$.

Тогда стандартная (общепринятая формулировка) имеет вид:

Целевая функция $F = m \to \min$.

Ограничение 1: $(c-x)^T V (c-x) + (c-x)\bar{r}\bar{r}^T (c-x) \le \varepsilon^2 (c^T V c + c^T \bar{r}\bar{r}^T c)$;

$\sqrt{(c-x)^T V (c-x) + (c-x)\bar{r}\bar{r}^T (c-x)} / \sqrt{c^T V c + c^T \bar{r}\bar{r}^T c} \le \varepsilon$.

Ограничения 2: $x_j > 0; j = 1,2,..m; x_j = 0; j = m+1; m = 2, \ldots n$.

Ограничение 3: $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$.

Это выпуклая негладкая задача условной оптимизации, для которой нет эффективных алгоритмов [3].

Для решения задачи введем целевую функцию неявно связанную с минимизацией m – количества активов.

Введем так называемый индекс портфеля IF равный $IF = \sum_{j=1}^{n} (100 x_j)^2$.

Данная величина подобна индексу Герфиндаля, который применяется для характеристики монополизма того или иного рынка, характеризует наличие или отсутствие на нем конкуренции.

Значение индекса Герфиндаля изменяется от практического нуля (когда на рынке много компаний и доля каждой невелика), до величины равной 10000, когда на рынке полный монополизм – осталась только одна компания с удельным весом равным 100%.

Аналогично значение индекса портфеля IF принимает значения от величины порядка 500 (когда все акции имеют один вес равный 1/44), до 10 000 – когда портфель состоит из акции одного вида.

Требование максимума IF автоматически ведет к минимизации m.

Целевая функция имеет вид:

$$F = \sum_{j=1}^{n} (100 x_j)^2 \to \max.$$

Ограничения:

$$\sqrt{(c-x)^T V(c-x) + (c-x)\bar{r}\bar{r}^T(c-x)} / \sqrt{c^T V c + c^T \bar{r}\bar{r}^T c} \le \varepsilon$$
$$x_j \ge 0; j = 1,2..n;$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1.$$

Выбор целевой функции в таком виде является ноу-хау для решения задач подобного рода. Дело в том, что все остальные подходы на основе снижения количества активов, входящих в портфель себя не оправдали (метод штрафов [4] и тому подобные эвристические методы).

Следует обратить внимание на то, что за счет введения целевой функции $F = \sum_{j=1}^{n} (100x_j)^2 \to \max$ минимизация количества акций, входящих в разреженный портфель осуществляется автоматически в ходе решения и зависит, прежде всего, от задаваемой ошибки аппроксимации ε: $n(\varepsilon)$.

В таблице 4 приведены значения целевой функции и, соответствующее им количество акций, входящих в разреженный портфель, в зависимости от значения eps.

Таблица 4 – Значения целевой функции и соответствующее им количество акций

eps	5,00%	10,00%	15,00%	20,00%	25,00%	30,00%
n(eps)	42	22	15	15	14	12
F	888,1	1 420,0	1 858,7	2 317,3	2 842,7	3 444,2

В частности, при ошибке в 10% количество акций, входящих в разреженный портфель уже 22, а при eps=20% можно ограничиться 15 видами акций.

Структура разреженного портфеля для разных значений eps приведена в таблице 5.

Таблица 5 – Структура разреженного портфеля для разных значений eps

№	eps|X	5,00%	10,00%	15,00%	20,00%	25,00%	30,00%	CT индекс
1	*AFKS*	0,73%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,61%
2	*AFLT*	0,44%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,37%
3	*ALRS*	0,71%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	1,52%
4	*CBOM*	0,14%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,24%
5	*CHMF*	2,57%	2,60%	1,95%	2,43%	2,87%	3,29%	1,53%
6	*DSKY*	1,43%	1,59%	1,33%	0,60%	0,00%	0,00%	0,43%
7	*FEES*	1,07%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,28%
8	*FIVE*	3,70%	4,22%	4,72%	4,58%	3,98%	2,91%	1,49%
9	*GAZP*	16,77%	25,83%	33,68%	41,97%	49,30%	56,10%	13,36%
10	*GLTR*	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,29%
11	*GMKN*	7,74%	7,21%	7,46%	6,90%	6,82%	6,96%	6,96%
12	*HHRU*	0,05%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,35%
13	*HYDR*	0,65%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,38%
14	*IRAO*	0,62%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,98%
15	*LKOH*	11,70%	12,54%	12,34%	9,56%	7,44%	5,96%	11,71%
16	*LSRG*	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,20%
17	*MAGN*	0,34%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,59%

Продолжение таблицы 5

№	*eps*|*X*	5,00%	10,00%	15,00%	20,00%	25,00%	30,00%	CT индекс
18	*MAIL*	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	1,08%
19	*MGNT*	0,32%	0,34%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	2,05%
20	*MOEX*	0,27%	0,26%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	1,37%
21	*MTSS*	0,56%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	1,58%
22	*NLMK*	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	1,66%
23	*NVTK*	2,78%	2,87%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	5,33%
24	*OZON*	0,63%	0,67%	0,53%	0,71%	0,79%	0,77%	0,84%
25	*PHOR*	0,48%	0,43%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,74%
26	*PIKK*	0,79%	0,76%	0,66%	0,36%	0,09%	0,04%	0,58%
27	*PLZL*	3,40%	2,67%	3,14%	0,52%	0,00%	0,00%	2,15%
28	*POGR*	2,48%	4,74%	3,88%	5,42%	5,99%	6,16%	0,37%
29	*POLY*	0,23%	0,21%	0,17%	0,17%	0,08%	0,00%	2,72%
30	*QIWI*	0,51%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,13%
31	*ROSN*	3,35%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	3,72%
32	*RSTI*	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,19%
33	*RTKM*	0,67%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,57%
34	*RUAL*	0,37%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,70%
35	*SBER*	16,34%	20,14%	19,85%	16,90%	13,10%	8,55%	14,22%
36	*SBERP*	0,59%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	1,27%
37	*SNGS*	2,37%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	1,73%
38	*SNGSP*	0,01%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	1,30%
39	*TATN*	1,49%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	2,33%
40	*TATNP*	1,13%	0,96%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,46%
41	*TCSG*	2,87%	2,69%	2,33%	1,41%	0,75%	0,20%	2,91%
42	*TRNFP*	1,56%	1,43%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,49%
43	*VTBR*	0,53%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,78%
44	*YNDX*	7,61%	7,85%	7,96%	8,47%	8,79%	9,06%	7,43%

В целях сравнения инвестиционных возможностей портфелей на основе всех акций входящих в индекс (полный портфель) и разреженного портфеля содержащего меньшее количество построим эффективную границу для каждого из них.

Граница эффективного множества для всех акций, входящих в индекс и для акций разреженного портфеля, состоящего из 14 акций разреженного портфеля, полученного при eps=25% приведена на рисунке 4.

Как можно видеть границы эффективных множеств достаточно близки, что служит дополнительным подтверждением эквивалентности замены индекса разреженным портфелем.

- **Имитационное моделирование методом Монте Карло для оценки риска замены индекса разреженным портфелем**

Имитационное моделирование методом Монте Карло является одним из способов оценки риска замены индекса разреженным портфелем.

Кроме того это способ оценки динамики доходности портфелей в краткосрочной перспективе.

Наиболее распространенным способом имитационного моделирования является разложение ковариационной матрицы на произведение нижней и верхней треугольной матрицы – разложение Холецкого:

$$V = G \cdot G^T.$$

Риск портфеля дается выражением:

$$\sigma_P^2 = X^T V X = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} V_{ij} x_i x_j,$$

где $V = (V_{ij}) = \mathrm{cov}(r_i, r_j)$ – ковариационная матрица доходностей активов, входящих в портфель.

Элементы ковариационной матрицы V_{ij} оцениваются на основе исторических данных: $V_{ij} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(r_i(t) - \overline{r_i})(r_j(t) - \overline{r_j})$.

Стандартная схема моделирования для положительно-определенной ковариационной матрицы V_{ij} включает следующие этапы.

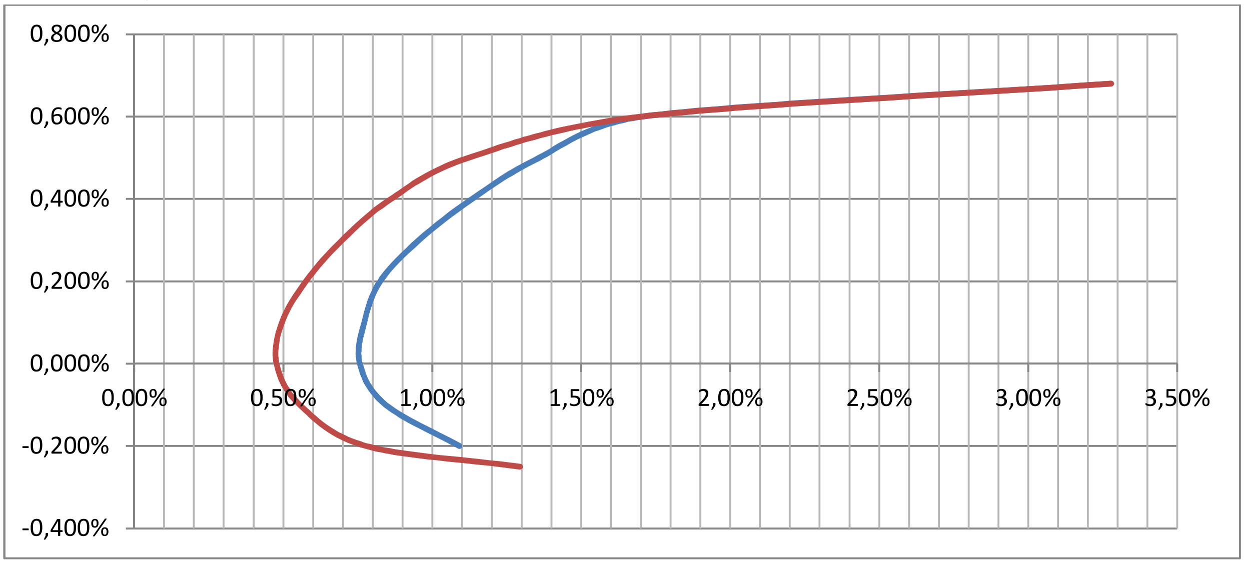

Рисунок 4 – Граница эффективного множества для всех акций, входящих в индекс и для акций разреженного портфеля

Производится разложение ковариационной матрицы на произведение $V = BC$, где B – нижняя треугольная матрица, а C – верхняя треугольная матрица:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{44} \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы даются выражениями:

$$b_{i1} = a_{i1}; b_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} c_{kj}; (i \geq j > 1); c_{1j} = a_{1j}/b_{11}; c_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} c_{kj}\right); (1 < i < j).$$

Для симметрической матрицы $c_{ij} = b_{ji}/b_{ii}; i < j$.

Если ввести диагональную матрицу $D = \begin{pmatrix} 1/b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/b_{nn} \end{pmatrix}$, то факторизация может быть записана в виде: $V = BDB^T$.

Более удобно ввести матрицу G соотношением $G = B \cdot \sqrt{D}$, где матрица $\sqrt{D}$ имеет вид:

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{b_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{b_{22}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\sqrt{b_{44}} \end{pmatrix}.$$

Тогда $V = G \cdot G^T$.

На основе данной факторизации можно моделировать многомерное нормальное распределение [5].

В случае матриц большой размерности более удобна программная реализация в среде VBA EXCEL [6]. Программа производит считывание данных ковариационной матрицы V и формирует на выходе матрицу Холецкого G.

```
Sub xxolezkii()
Dim a(1 To 50, 1 To 50), b(1 To 50, 1 To 50), c(1 To 50, 1 To 50), d(1 To 50, 1 To 50) As Single
Dim s, gm(1 To 50, 1 To 50) As Single: Dim i, j, k, nm As Integer: nm = 44
Range("d177").Activate: For i = 1 To nm: For j = 1 To nm: a(i, j) = ActiveCell.Value
ActiveCell.Offset(0, 1).Activate: Next j: ActiveCell.Offset(1, -nm).Activate: Next i
For i = 1 To nm: For j = 1 To nm: b(i, j) = 0: c(i, j) = 0: d(i, j) = 0: If i = j Then c(i, j) = 1
Next j: Next i
For i = 1 To nm: b(i, 1) = a(i, 1): Next I : For j = 1 To nm: c(1, j) = a(1, j) / b(1, 1):Next j
For i = 2 To nm: For j = 2 To nm: s = 0: For k = 1 To j – 1: s = s + b(i, k) * c(k, j): Next k
If i >= j Then b(i, j) = a(i, j) – s: s = 0: For k = 1 To i – 1: s = s + b(i, k) * c(k, j): Next k
If i < j Then c(i, j) = (a(i, j) – s) / b(i, i): Next j: Next i
For i = 1 To nm: d(i, i) = 1 / b(i, i) ^ 0.5: Next i
For i = 1 To nm:For j = 1 To nm:s = 0:For k = 1 To nm:s = s + b(i, k) * d(k, j):Next k
gm(i, j) = s: Next j: Next i
Range("d223").Activate : For i = 1 To nm: For j = 1 To nm: ActiveCell.Value = gm(i, j)
ActiveCell.Offset(0, 1).Activate: Next j: ActiveCell.Offset(1, -nm).Activate:Next i
Range("aw223").Activate: For i = 1 To nm: For j = 1 To nm: ActiveCell.Value = gm(j, i)
ActiveCell.Offset(0, 1).Activate: Next j: ActiveCell.Offset(1, -nm).Activate:Next i: End Sub
```

1) Генерируем n – нормально распределенных случайных величин с нулевыми средними и единичными дисперсиями – получим вектор строку z(i,k) , i=1,2..44, где количество имитаций k=1,2..1000. (Можно увеличить до 5тысяч для солидности).

2) Умножая матрицу GT на каждую строку z(i,k) и на t^0,5 – количество дней моделирования получим вектор строку x(i,k) =GT*z(i,k)*t^0,5.

3) Добавляя среднее значение по каждой акции получим вектор r(i,k) =x(i,k)+rsred(i) *t - доходности i-ой акции для k-ой имитации.

- **Оценка риска замены индекса разреженным портфелем**

. Для оценки риска разбиваем область изменения доходности портфелей на интервалы и вычисляем частоты

В таблице 6 приведены частоты для индексного портфеля и для разреженных портфелей со значениями eps=5%;10%;15%;20%;25%;30%.

Таблица 6 – частоты для индексного портфеля и для разреженных портфелей со значениями eps=5%;10%;15%;20%;25%;30%

Карман	R_Ind	r_P(5%)	r_P(10%)	r_P(15%)	r_P(20%)	r_P(25%)	r_P(30%)
-18,67%	0	0	0	0	0	0	0
-17,23%	0	0	0	0	0	0	0
-15,80%	0	0	0	0	1	2	2
-14,36%	2	3	3	2	1	0	0
-12,93%	2	1	1	2	2	2	2
-11,49%	1	1	1	1	2	3	4
-10,05%	4	5	7	9	12	12	14
-8,62%	10	11	14	16	14	15	14
-7,18%	19	18	18	12	15	20	25
-5,74%	24	28	26	36	42	38	32
-4,31%	40	46	59	57	54	58	59
-2,87%	55	51	50	54	53	50	55
-1,44%	68	73	68	59	66	72	63
0,00%	81	79	76	79	81	80	81
1,44%	69	71	70	75	77	75	87
2,87%	88	88	92	89	85	90	84
4,31%	93	96	91	92	92	90	85
5,74%	103	110	108	100	93	92	87
7,18%	81	73	76	79	74	68	72
8,62%	76	73	70	66	70	74	70
10,05%	67	66	61	64	61	57	54
11,49%	42	38	40	41	41	39	43
12,93%	31	32	28	28	24	25	29
14,36%	11	5	10	10	13	13	9
15,80%	13	15	13	13	11	11	16
17,23%	12	13	9	8	9	4	3
18,67%	6	3	7	6	5	6	6
20,11%	1	0	1	1	1	2	2

На рисунке 5 приведены графики частот, полученные в результате имитационного моделирования индексного портфеля и разреженного портфеля для eps=10%.

На рисунке R_Ind – частоты смоделированного индекса и r_P(10%).

На рисунке 6 приведены графики частот, полученные в результате имитационного моделирования индексного портфеля и разреженного портфеля для eps=20%.

В таблице 7 приведены квадраты разности частот между R_ind и r_ind(eps).

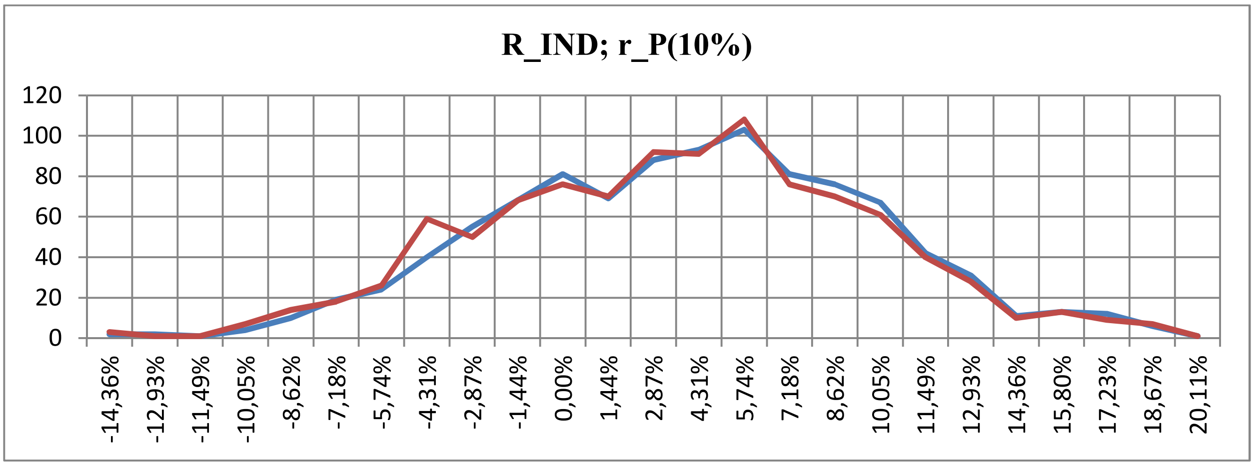

Рисунок 5 – Графики частот, полученные в результате имитационного моделирования индексного портфеля и разреженного портфеля для eps=10%

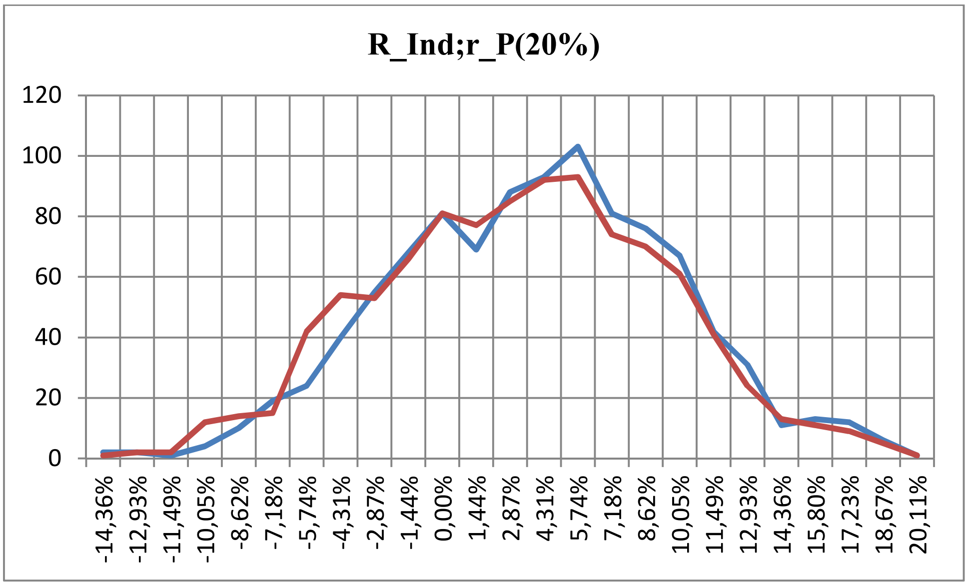

Рисунок 6 – Графики частот, полученные в результате имитационного моделирования индексного портфеля и разреженного портфеля для eps=20%

Таблица 7 – Квадраты разности частот между R_ind и r_ind(eps)

r_P(5%)	r_P(10%)	r_P(15%)	r_P(20%)	r_P(25%)	r_P(30%)
306	610	816	990	1225	1665

- **Имитационное моделирование стохастической динамики портфеля акций**

Рассмотрим портфель акций, его стоимость в момент времени t

$$P(t) = \sum_{k=1}^{n} n_k S_k(t),$$

здесь $n_k = \gamma_k \frac{P(0)}{S(0)}$ – количество акций k –го вида, γ_k– удельный вес акций $k -$ вида в портфеле $S_k(0)$ – стоимость акции $k -$ вида в начальный момент времени, $P(0) = \sum_{k=1}^{n} n_k S_k(0)$ – начальная стоимость портфеля.

Представим ковариационную матрицу доходности акций V в виде:

$$V = G \cdot G^T,$$

где G – матрица Холецкого.

Стоимость акции меняется во времени в соответствии с геометрическим броуновским движением:

$$\frac{dS_i}{S_i} = r_i dt + \sum_{j=1}^{n} G_{ij} \cdot dW_j,$$

где $W_j(t)$ – стандартный процесс Винера, G_{ij} – элементы матрицы Холецкого.

В силу независимости процессов Винера выражение $\sum_{j=1}^{n} G_{ij} dW_j$ эквивалентно выражению $\sum_{j=1}^{n} G_{ij} dW_j = C_i dW_i$, где $C_i = \left(\sum_{j=1}^{n} G_{i,j}^2\right)^{1/2}$.

Лемма Ито

Если $x(t)$ удовлетворяет уравнению $dx = a(x,t)dt + b(x,t)dW(t)$, то функция $F(x,t)$ удовлетворяет уравнению:

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} b(x,t)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) dt + b(x,t)\frac{\partial F}{\partial x}.$$

Введем функцию $F_i = F(S_i) = \ln(S_i)$, для которой $\frac{\partial F}{\partial t} = 0, \frac{\partial F}{\partial S_i} = \frac{1}{S_i}, \frac{\partial^2 F_i}{\partial S_i^2} = -\frac{1}{S_i^2}$.

Учитывая, что в данном случае $a(x,t) = a(S_i) = r_i S_i$, $b(x,t) = C_i S_i$ после применения леммы Ито [7] получим:

$$dF_i = \left(r_i - C_i^2/2\right)dt + C_i dW_i,$$

откуда имеем $F_i = F_0 + \left(r_i - C_i^2/2\right)t + C_i W_i(t)$, $F_i(0) = \ln\left(S_i(0)\right)$ и, следовательно,

$$S_i(t) = S_i(0)\exp\left(\left(\mu_i - C_i^2/2\right) \cdot t\right) \cdot \exp\left(C_i \cdot W_i(t)\right).$$

В развернутом виде:

$$S_i(t) = S_i(0)\exp\left(\left(r_i - \sum_{j=1}^{n} G_{ij}^2\right) \cdot t\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{n} G_{ij} W_j(t)\right).$$

Для портфеля соответственно получим:

$$\frac{P(t)}{P(0)} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \exp\left(\left(r_i - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} G_{ij}^2\right) \cdot t\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{n} G_{ij} W_j(t)\right).$$

С учетом наличия на рынке безрисковой процентной ставки r_f заменим r_i на

$$r_i = r_f - \sigma_i^2/2.$$

Стохастическая динамика портфеля имеет вид:

$$\hat{P}(t) = \frac{P(t)}{P(0)} = e^{r_f t} \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \exp\left(\left(\sigma_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} G_{ij}^2\right) \cdot t\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{n} G_{ij} W_j(t)\right)$$

Нормированная стоимость опционов call и Put на момент времени исполнения T для каждой $k-$й реализации будет даваться выражением

$$\hat{C}all_k(T) = \max\left(0; \hat{P}_k(T) - \hat{K}\right); \hat{P}ut_k(T) = \max\left(0; \hat{K} - \hat{P}_k(T)\right),$$

Здесь $T-$ момент исполнения, $\hat{K} = K/P(0)$ – нормированная цена исполнения.

Нормированная стоимость опционов на момент заключения контрактов находим как среднее по ансамблю реализаций:

$$Call(0) = \frac{1}{N}\exp\left(-r_f T\right) \cdot \sum_{k=1}^{N} Call_k(T); Put(0) = \frac{1}{N}\exp\left(-r_f T\right) \cdot \sum_{k=1}^{N} Put_k(T).$$

Здесь N - размерность ансамбля реализаций.

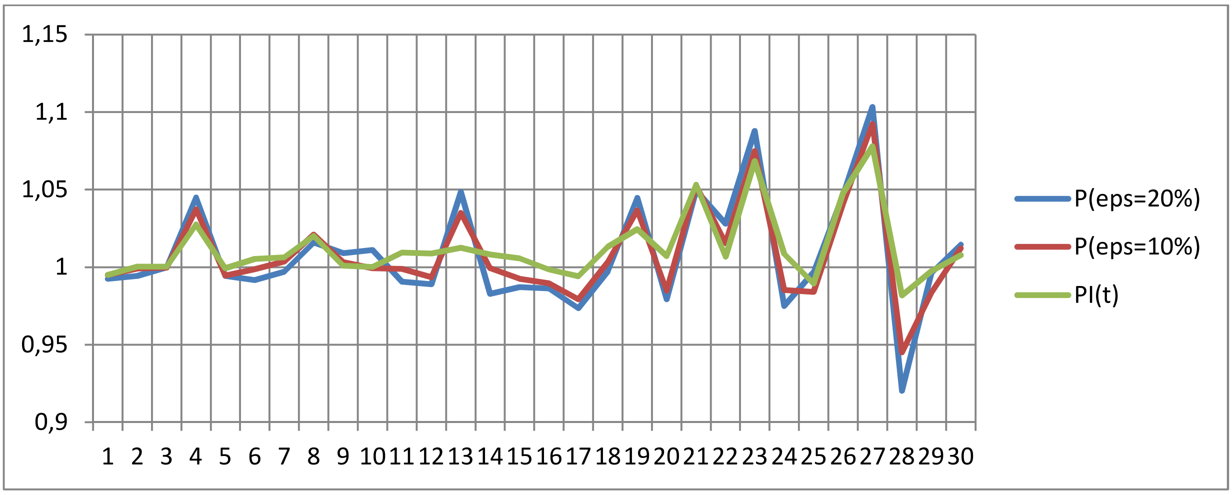

Рисунок 7 – Формирование портфеля ценных бумаг

При формировании портфеля ценных бумаг зачастую неудобно иметь дело с большим количеством ценных бумаг в портфеле. Это вдвойне неприятно, если требуется изменять портфель ценных бумаг слишком часто в связи с наличием очень волатильных акций.

Одним из подходов к частичному решению данной проблемы является идея формирования разреженного (sparse) портфеля ценных бумаг, в некотором смысле дублирующем целевой портфель. Термин разреженный означает, что число входящих в портфель ценных бумаг невелико. Ограничение на количество входящих в портфель ценных бумаг является самым важным и наиболее трудно реализуемым. Мотивацией для данного ограничения являются соображения сложности портфеля, как для проведения расчетов, так и для администрирования инвестиционным менеджером – управляющим. Данное ограничение в англоязычной литературе называется cardinality condition. Методы решения оптимизационных задач, содержащих данное ограничение являются эвристическими и, в основном решаются путем введения штрафных функций [8–13].

Стратегия копирования индекса состоит в формировании портфеля, который по своему составу повторяет некоторый фондовый индекс, обычно индекс с широкой базой. Недостатком такой стратегии является то, что выплата дивидендов и процентов по бумагам, входящим в индекс, автоматически отражается в его стоимости. В то же время менеджер несет дополнительные издержки при реинвестировании полученных средств. Кроме того, для приобретения какого-либо актива может потребоваться определенное время для аккумулирования необходимой суммы денег. Точное копирование индекса может повлечь высокие трансакционные издержки, так как менеджеру приходится приобретать относительно малое количество большого числа разных активов. Кроме того, при изменении состава индекса также должны последовать изменения и в структуре портфеля. Обычно, при исключении какой-либо бумаги из состава индекса цена ее падает, в то же время цена включаемого в индекс актива возрастает. Поэтому менеджер несет дополнительные затраты в сумме разности цен продаваемого и покупаемого активов.

Чтобы исключить указанные недостатки, можно копировать индекс на основе определенной выборки бумаг, входящих в индекс, которые наиболее близко повторяют его динамику. В этом случае сокращаются трансакционные расходы. Однако возникает вероятность отклонения результатов сформированного портфеля от результатов рыночного портфеля.

Заключение

Индексные фонды относятся к пассивным инвестиционным управляющим. Их задачей является получение доходности не хуже чем доходность некоторого индекса.

Основной стратегией фонда, которая позволяет ему зарабатывать является инвестирование в портфель с небольшим количеством акций, доходность которого следует за доходностью индекса. Это позволяет реже пересматривать портфель, снижает транзакционные издержки. Обратной стороной такого подхода является риск отклонения доходности из-за несовершенного хеджирования.

Библиографический список

1. Фондовая биржа ОАО ММВБ-РТС // URL: http://www.moex.com/.
2. Мельников А.В., Попова Н.В., Скорнякова В.С. Математические методы финансового анализа // М.: Анкил, 2006, с.440.
3. Нестеров Ю. Е. Методы выпуклой оптимизации // М.: МЦНМО, 2011.
4. Шукаев Д. Н. Прикладные методы оптимизации // М.: Издательский дом Академии Естествознания, 2017.
5. Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ / Т. Андерсон. М.: Физматгиз, 1963. 500 с.
6. Мэри Джексон, Майк Стонтон. Финансовое моделирование в EXCEL и VBA: углубленный курс // М.: ООО "И.Д. Вильямс", 2006, с.352.
7. Ито К. Вероятностные процессы, вып. 1,2 // Изд-во “ИЛ”. М: 1960.
8. Рубцов Б. Б. Современные фондовые рынки // М.: Альпина Бизнес Букс, 2013. – 370 с.
9. Шарп У.Ф., Александер Г.Дж., Бэйли Д.В. Инвестиции. // М.: ИНФРА-М, 2011.1035с.
10. Holton G.A. Value-at-Risk. Theory and Practice. – Academic Press. 2003.
11. Беннинга, Шимон. Финансовое моделирование с использованием EXCEL // М.: ООО "И.Д. Вильямс", 2007, с.592.
12. Чернова Г. В., Кудрявцев А.А. Управление рисками : учеб. пособие // М.: ТК Велби, Проспект, 2007. – 160 с.
13. Королев В. Ю., Бенинг В. Е., Шоргин С. Я. Математические основы теории риска. М.: Физматлит, 2007. 544 с.

References

1. Stock Exchange of OJSC MICEX-RTS // URL: http://www.moex.com/.

2. Melnikov A.V. Mathematical methods of financial analysis // A.V. Melnikov, N.V. Popova, V.S. Skornyakov. M .: Ankil, 2006, p. 440.

3. Nesterov Yu.E. Methods of convex optimization // Moscow: MTsNMO, 2011.

4. Shukaev D.N.Applied optimization methods // Moscow: Publishing House of the Academy of Natural Sciences, 2017.

5. Anderson T. Introduction to multivariate statistical analysis / T. Anderson. Moscow: Fizmatgiz, 1963.500 p.

6. Mary Jackson, Mike Staunton. Financial modeling in EXCEL and VBA: an advanced course // M .: ID Williams, 2006, p. 352.

7. Ito K. Probabilistic Processes, no. 1.2 // Publishing house "IL". M: 1960.

8. Rubtsov B. B. Modern stock markets // M .: Alpina Business Books, 2013 .-- 370 p.

9. Sharpe W.F., Alexander G.J., Bailey D.W. Investments. // M .: INFRA-M, 2011.1035c.

10. Holton G.A. Value-at-Risk. Theory and Practice. – Academic Press. 2003.

11. Benning, Shimon. Financial modeling using EXCEL // M .: ID Williams, 2007, p. 592.

12. Chernova G.V., Kudryavtsev A.A. Risk management: textbook. manual // M .: TK Welby, Prospect, 2007. – 160 p.

13. Korolev V. Yu., Bening VE, Shorgin S. Ya. Mathematical foundations of risk theory. Moscow: Fizmatlit, 2007.544 p.