



О.В. Павлов

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,
г. Самара, Российская Федерация

E-mail: pavlov@ssau.ru. Web of Science ResearcherID: Z-1018-2018

Идентификация и оценка регрессионных моделей кривой обучения для автомобилестроительного производства

Аннотация: Рассматривается задача идентификации и оценки надежности регрессионных моделей кривой обучения для автомобилестроительного производства. Для регрессионного анализа используются четыре модели кривых обучения заданного вида: Райта, Стэнфорда-В, Дейонга и экспоненциальная. Параметры моделей кривых обучения определяются с помощью нелинейного метода наименьших квадратов. Выполнена оценка значимости и надежности регрессионных моделей. Показано, что модели кривых обучения в автомобилестроительном производстве хорошо аппроксимируются степенной функцией Стэнфорда-В.

Ключевые слова: кривые обучения, регрессионные модели, освоение производства автомобилей.

Цитирование. Павлов О.В. Идентификация и оценка регрессионных моделей кривой обучения для автомобилестроительного производства // Вестник Самарского университета. Экономика и управление. 2020. Т. 11, № 4 С. 107–117. DOI: <http://doi.org/10.18287/2542-0461-2020-11-4-107-117>.

Информация о конфликте интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

O.V. Pavlov

Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: pavlov@ssau.ru. Web of Science ResearcherID: Z-1018-2018

Identification and assessment of regression models of the learning curve for automotive manufacturing

Abstract: The problem of identification and assessment of the reliability of regression models of the learning curve for the automotive industry is considered. For regression analysis, four learning curve models of a given type are used: Wright's, Stanford-B, Deyong's, and exponential. The parameters of the learning curve models are determined using a nonlinear least squares method. The estimation of the significance and reliability of the regression models is carried out. It is shown that the models of learning curves in the automotive industry are well approximated by the Stanford-B power function.

Key words: learning curves, regression models, mastering the production of cars.

Citation. Pavlov O.V. Identification and assessment of regression models of the learning curve for automotive manufacturing. *Vestnik Samarskogo universiteta. Ekonomika i upravlenie = Vestnik of Samara University. Economics and Management*, 2020, vol. 11, no. 4, pp. 107–117. DOI: <http://doi.org/10.18287/2542-0461-2020-11-4-107-117>. (In Russ.)

Information on the conflict of interest: author declares no conflict of interest.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ / INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

© Олег Валерьевич Павлов – кандидат технических наук, доцент кафедры менеджмента и организация производства, заместитель директора института экономики и управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

© Oleg V. Pavlov – Candidate of Technical sciences, associate professor of the Department of General and Operations Management, vice director of the Institute of Economics and Management, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Введение

В процессе освоения новой продукции на промышленных предприятиях проявляется эффект кривой обучения. Эффект кривой обучения заключается в том, что затраты времени работников на выполнение многократно повторяющихся производственных операций снижаются. Впервые эффект кривой обучения был описан инженером Т. Райтом для авиастроительного предприятия [1]. Под кумулятивным объемом производства понимается количество промышленных изделий нарастающим итогом.

В научной литературе, в основном иностранной, приводятся исследования по построению различных моделей, количественно описывающих снижение трудоемкости на выполнение производственных операций с увеличением кумулятивного объема производства. Наиболее полно обзор, обсуждение и сравнение различных моделей кривых обучения представлены в научных публикациях [2–4].

Целью данной статьи является идентификация и оценка надежности регрессионных моделей кривых обучения по данным об освоении производства автомобилей «Калина» и «Нива-Шевроле» предприятия АО «АВТОВАЗ». Регрессионные модели кривых обучения имеют большое практическое значение для принятия управленческих решений на промышленном предприятии. Полученные регрессионные модели могут быть применены для решения прикладных оптимизационных и игровых задач.

Постановка задачи и методика решения

По данным о динамике изменения трудоемкости автомобиля в процессе освоения производства автомобилей «Калина» и «Нива-Шевроле» на предприятии АО «АВТОВАЗ» необходимо определить параметры регрессионных моделей, оценить допускаемую при этом ошибку, статистическую значимость и надежность.

Задача идентификации регрессионных моделей математически формулируется следующим образом. Необходимо определить параметры уравнения регрессии заданного вида:

$$\hat{y}_x = f(x),$$

где \hat{y}_x – трудоемкость производства автомобилей, расчетное значение зависимой переменной; x – кумулятивный объем производства автомобилей, независимая переменная.

Для решения задачи применяются методы регрессионного и корреляционного анализа [5]. Для нахождения параметров регрессионной зависимости $f(x)$ применяется нелинейный метод наименьших квадратов [4–5]:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{xi})^2 \rightarrow \min, \quad (1)$$

где y_i – фактические значения трудоемкости автомобилей в i -м наблюдении, \hat{y}_{xi} – расчетные значения трудоемкости автомобилей, рассчитанные по уравнению регрессии; n – число наблюдений.

Метод наименьших квадратов заключается в поиске оценок параметров уравнения регрессии, которые минимизируют сумму квадратов отклонений фактических значений y_i от расчетных значений \hat{y}_{xi} . Рассматриваемые в работе уравнения регрессии внутренне нелинейны по оцениваемым параметрам, поэтому для решения оптимизационной задачи (1) используется численный итеративный метод Ньютона.

Для выбора наилучшей регрессионной зависимости кривой обучения рассматриваются четыре различные модели, описанные в научной литературе [1–4].

1. Степенная модель Райта:

$$y = C_1 x^{-b}, \quad (2)$$

где y – трудоемкость производства автомобилей, C_1 – трудоемкость производства первого автомобиля, x – кумулятивный объем производства автомобилей, b – индекс обучения, характеризует скорость снижения трудоемкости автомобиля при увеличении кумулятивного объема производства.

2. Модель Стэнфорда-В, которая является модификацией степенной модели Райта:

$$y = C_1(x + B)^{-b}, \quad (3)$$

где B – параметр модели.

3. Модель Дейонга, которая также является разновидностью степенной модели:

$$y = C_1[M + (1 - M)x^{-b}], \quad (4)$$

где M – коэффициент, который учитывает, что часть работы выполняется машинами. Если $M = 0$, то в работе не задействовано автоматизированное оборудование, а если $M = 1$, то работа полностью выполняется автоматом и обучения не происходит.

4. Экспоненциальная модель:

$$y = C_0 + \beta e^{-\alpha x}, \quad (5)$$

где C_0, α, β – параметры экспоненциальной модели.

Выбор наилучшей из моделей кривых обучения осуществляется на основе расчета остаточной дисперсии $\sigma_{\text{ост}}^2$:

$$\sigma_{\text{ост}}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{xi})^2. \quad (6)$$

Для оценки тесноты связи между зависимой и независимой переменными в построенных регрессионных моделях рассчитывается индекс парной корреляции:

$$R_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{xi})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (7)$$

где \bar{y} – средняя величина трудоемкости производства автомобилей (зависимой переменной), определяемая по формуле

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^n y_i.$$

Чем ближе индекс парной корреляции к 1, тем более тесная связь между трудоемкостью автомобилей (зависимой переменной) и кумулятивным объемом производства автомобилей (независимой переменной).

Для оценки качества построенных регрессионных моделей вычисляется индекс детерминации:

$$R^2 = R_{xy}^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_{xi})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}. \quad (8)$$

Индекс детерминации показывает долю изменения трудоемкости автомобилей (зависимой переменной), обусловленную изменением кумулятивного объема производства автомобилей (независимой переменной). Чем ближе индекс детерминации к 1, тем лучше качество построенной регрессионной модели.

Для построенных регрессионных моделей проводится оценка их значимости с помощью F -критерия Фишера. При этом выдвигается гипотеза о статистической незначимости уравнения регрессии и показателя тесноты связи. Выполняется сравнение фактического $F_{\text{факт}}$ и табличного $F_{\text{табл}}$ значений F -критерия.

Величина фактического F -критерия вычисляется:

$$F_{\text{факт}} = \frac{R^2}{1-R^2} \frac{n-m-1}{m}, \quad (9)$$

где m – число параметров при кумулятивном объеме производства автомобилей x (независимой переменной).

Табличное значение $F_{\text{табл}}$ определяется по таблице критических значений при уровне значимости α и двух степенях свободы $k_1 = m$, $k_2 = n - m - 1$. В расчетах уровень значимости α принимается равным 0,01.

Если фактическое значение больше табличного, то гипотеза о случайной природе оцениваемых переменных отклоняется и признается статистическая значимость и надежность уравнения регрессии. В противном случае гипотеза не отклоняется и признается статистическая незначимость, ненадежность построенной регрессионной модели.

Качество анализируемых нелинейных уравнений регрессии также оценивается по средней ошибке аппроксимации:

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \hat{y}_{xi}}{y_i} \right| 100\%. \quad (10)$$

Значение средней ошибки аппроксимации до 10 % свидетельствует о достаточной точности регрессионной модели.

Идентификация и оценка регрессионных моделей кривой обучения для автомобилей «Калина»

Данные о динамике трудоемкости автомобилей «Калина» в зависимости от кумулятивного объема производства на предприятии ОА «АВТОВАЗ» представлены на рис. 1.

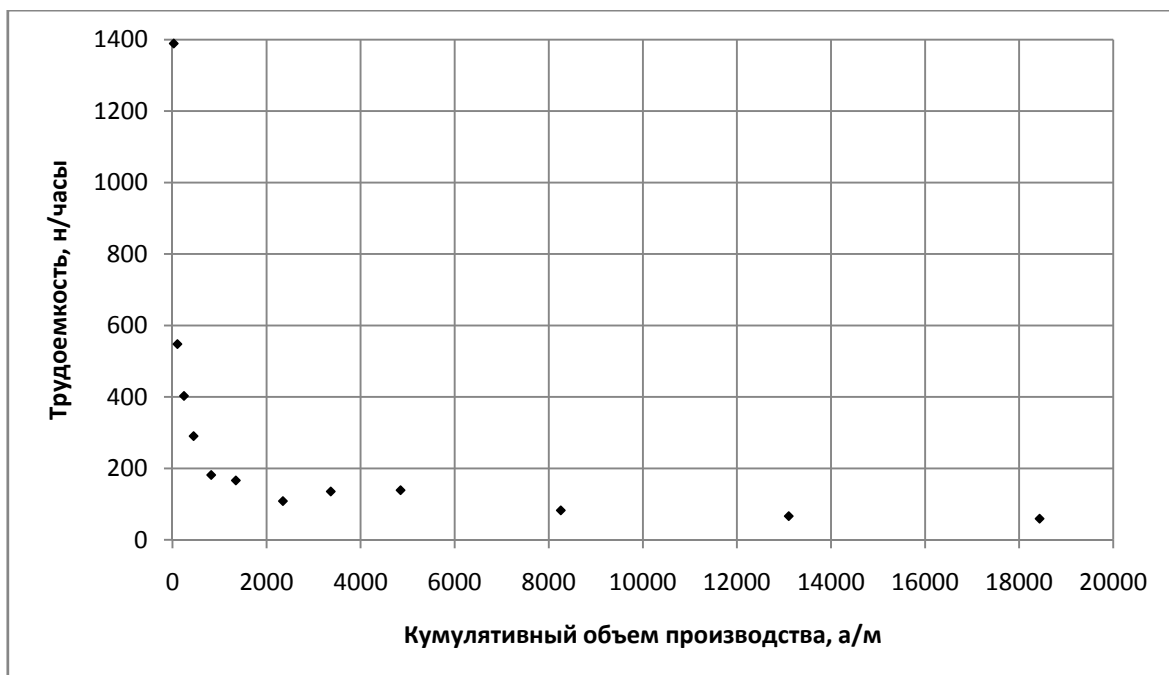


Рисунок 1 – Зависимость трудоемкости автомобилей «Калина» от кумулятивного объема производства

Figure 1 – Dependence of labor intensity of Kalina cars on the cumulative volume of production

Из анализа рис. 1 видно, что корреляционное поле соответствует нелинейному регрессионному уравнению $f(x)$. Параметры моделей кривых обучения (2)–(5) для автомобилей «Калина» были определены в результате решения оптимизационной задачи (1). Для численного решения использовался инструмент «Поиск решения» электронной таблицы Excel.

Идентифицируемые регрессионные модели кривой обучения представлены ниже.

1. Степенная модель Райта:

$$y = 7905,04x^{-0,5456}.$$

2. Степенная модель Стэнфорда-В:

$$y = 3820,53(x - 14,34)^{-0,4274}.$$

3. Степенная модель Дейонга:

$$y = 10339,43(0,055 + 0,945x^{-0,6364}).$$

4. Экспоненциальная модель:

$$y = 82,29 + 1555,01e^{-0,0087x}.$$

Регрессионные модели кривых обучения для автомобилей «Калина» представлены на рис. 2–5.

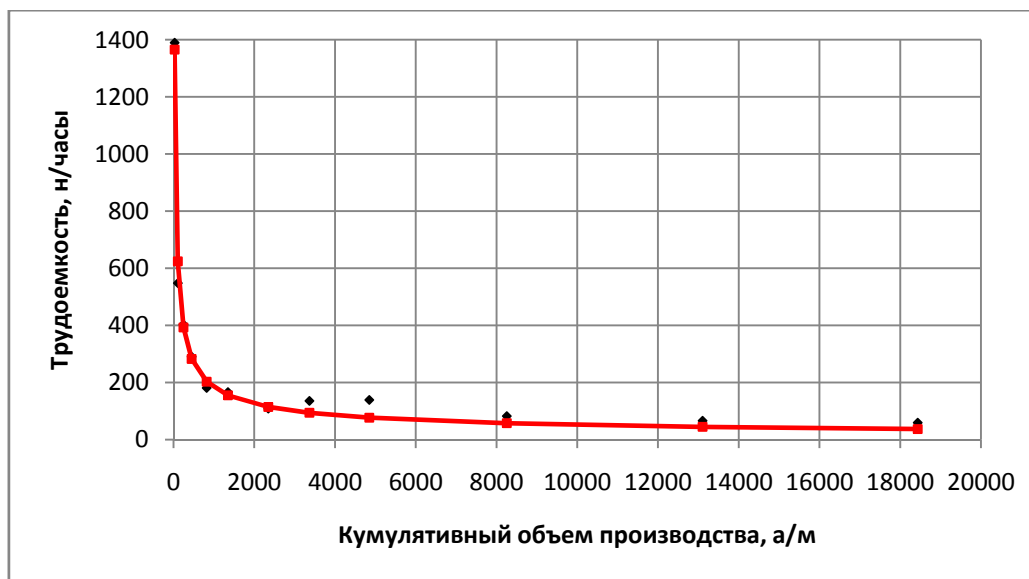


Рисунок 2 – Степенная модель Райта кривой обучения для автомобилей «Калина»

Figure 2 – Wright's power-law model of the learning curve for Kalina cars

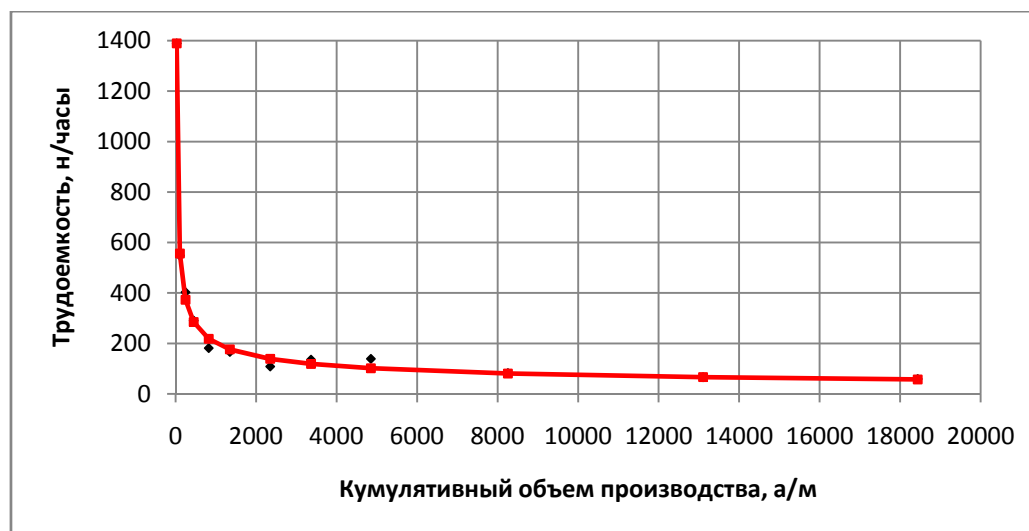


Рисунок 3 – Степенная модель Стэнфорда-В кривой обучения для автомобилей «Калина»

Figure 3 – Power-law model of Stanford-B learning curve for Kalina cars

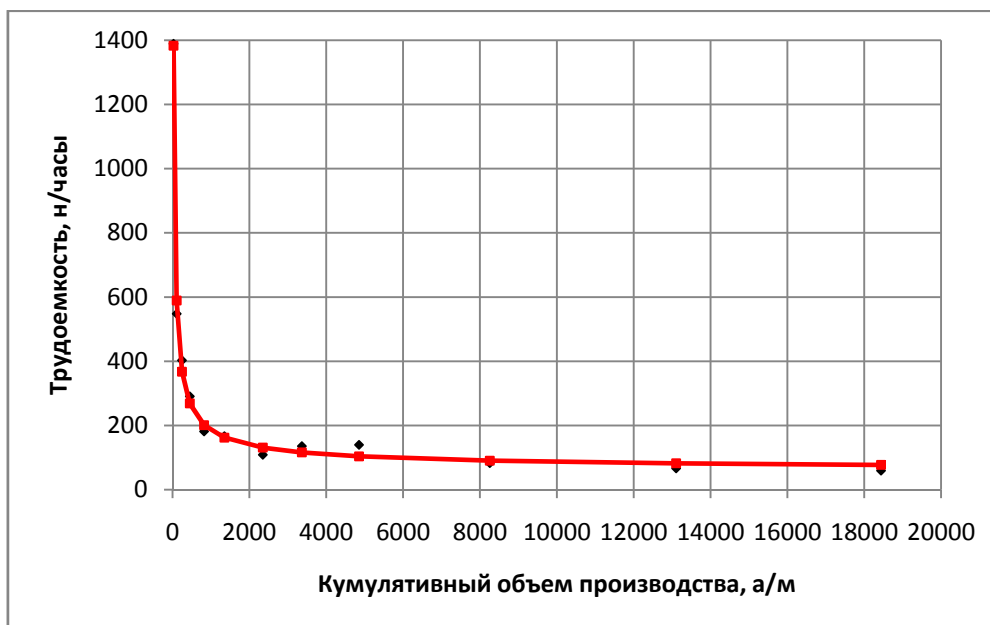


Рисунок 4 – Степенная модель Дейонга кривой обучения для автомобилей «Калина»
 Figure 4 – Deyong's power-law model of the learning curve for Kalina cars

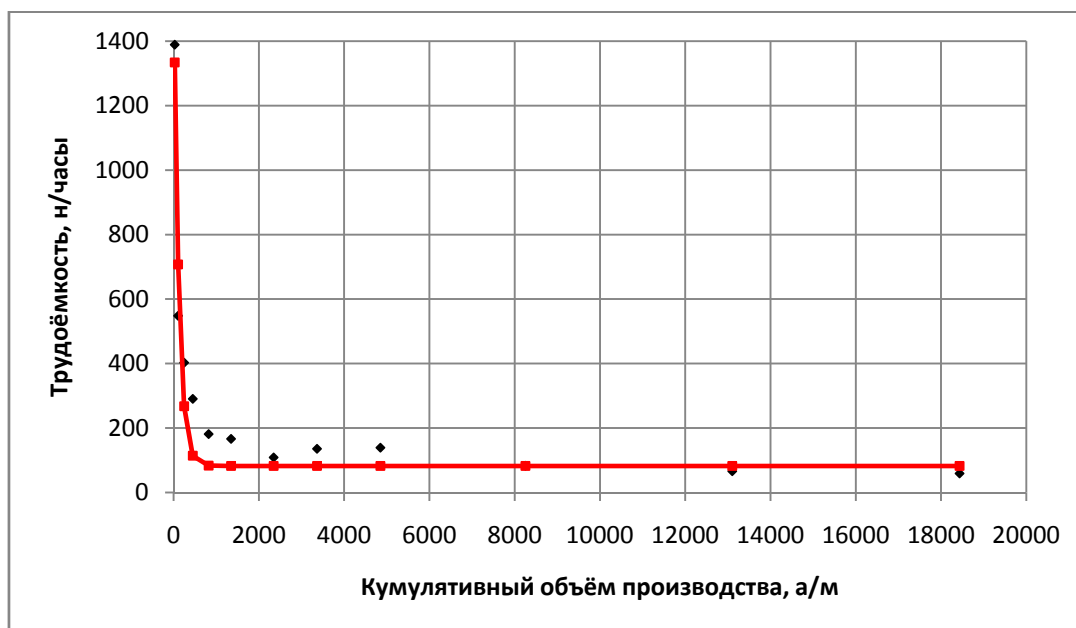


Рисунок 5 – Экспоненциальная модель кривой обучения для автомобилей «Калина»
 Figure 5 – Exponential learning curve model for Kalina cars

В таблице 1 для регрессионных моделей кривой обучения автомобилей «Калина» приводятся рассчитанные по формулам (6)–(10) значения остаточной дисперсии $\sigma_{\text{ост}}^2$, индекса парной корреляции R_{xy} , индекса детерминации R^2 , фактического значения F -критерия Фишера $F_{\text{факт}}$, средней ошибки аппроксимации \bar{A} .

Из анализа таблицы 1 делается вывод, что у степенной модели Стэнфорда-В остаточная дисперсия $\sigma_{\text{ост}}^2$, средняя ошибка \bar{A} наименьшие, индекс парной корреляции R_{xy} , индекс детерминации R^2 наибольшие по сравнению с другими моделями. Таким образом, наиболее хорошо данные по освоению производства автомобилей «Калина» аппроксимирует степенная модель Стэнфорда-В.

Таблица 1 – Расчет статистических характеристик моделей кривых обучения для автомобилей «Калина»**Table 1 – Calculation of the statistical characteristics of the learning curve models for Kalina cars**

№	Модель	Остаточная дисперсия	Индекс парной корреляции	Индекс детерминации	Фактическое значение F -критерия Фишера	Средняя ошибка аппроксимации, %
1	Райта	1192,62	0,9953	0,9907	1065,7	18,35
2	Стэнфорда-В	420,96	0,9984	0,9967	3037,6	9,15
3	Дейонга	552,4	0,9978	0,9957	2312,43	13,39
4	Экспоненциальная	8506,6	0,9663	0,9337	140,81	33,3

Для оценки значимости построенных степенных моделей было определено табличное значение F -критерия Фишера $F_{\text{табл}} = 10,04$. Так как фактическое значение больше табличного значения F -критерия Фишера $F_{\text{факт}} > F_{\text{табл}}$, то гипотеза о случайной природе оцениваемых переменных отклоняется и признается статистическая значимость и надежность степенной модели Стэнфорда-В.

Значение средней ошибки аппроксимации $\bar{A} = 9,15\%$ меньше 10% свидетельствует о достаточной точности степенной модели Стэнфорда-В.

Идентификация и оценка регрессионных моделей кривой обучения для автомобилей «Нива-Шевроле»

Данные о динамике трудоемкости автомобилей «Нива-Шевроле» в зависимости от кумулятивного объема производства на предприятии ОА «АВТОВАЗ» представлены на рис. 6.

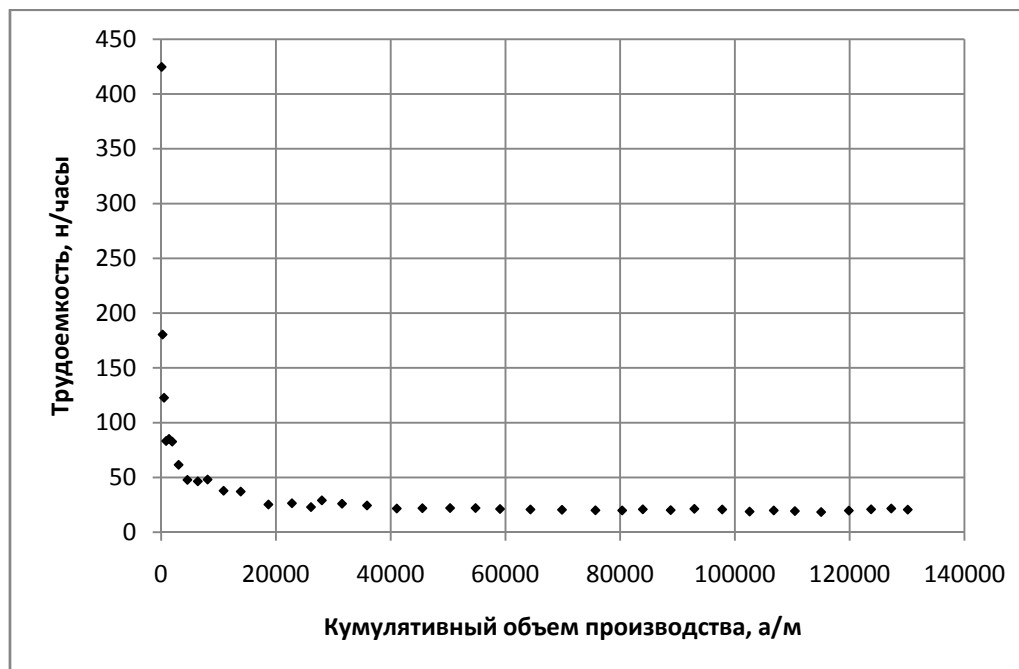


Рисунок 6 – Зависимость трудоемкости автомобилей «Нива-Шевроле» от кумулятивного объема производства

Figure 6 – Dependence of labor intensity of Niva-Chevrolet cars on the cumulative volume of production

Из анализа рис. 6 можно сделать вывод, что корреляционное поле соответствует нелинейному регрессионному уравнению $f(x)$. Параметры моделей кривых обучения (2)–(5) для автомобилей «Нива-Шевроле» были определены в результате решения оптимизационной задачи (1).

Идентифицируемые регрессионные модели кривой обучения представлены ниже.

1. Степенная модель Райта:

$$y = 3697,25x^{-0,5147}.$$

2. Степенная модель Стэнфорда-В:

$$y = 1131,41(x - 62,05)^{-0,3621}.$$

3. Степенная модель Дейонга:

$$y = 7930,54(0,024 + 0,976x^{-0,1813}).$$

4. Экспоненциальная модель:

$$y = 30,61 + 520,6e^{-0,0041x}.$$

Построенные регрессионные модели кривых обучения для автомобилей «Нива-Шевроле» представлены на рис. 7–10.



Рисунок 7 – Степенная модель Райта кривой обучения для автомобилей «Нива-Шевроле»
Figure 7 – Wright's power-law model of the learning curve for Niva-Chevrolet cars

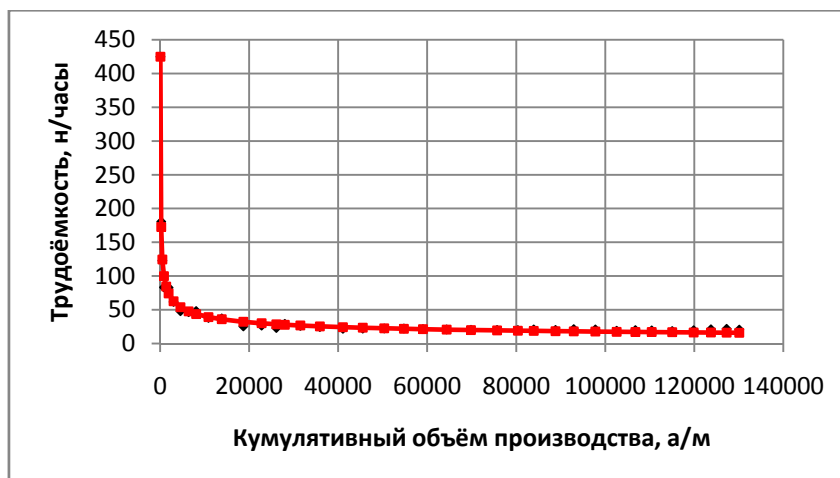


Рисунок 8 – Степенная модель Стэнфорда-В кривой обучения для автомобилей «Нива-Шевроле»
Figure 8 – Stanford-B power law model of the learning curve for Niva-Chevrolet cars



Рисунок 9 – Степенная модель Дейонга кривой обучения для автомобилей «Нива-Шевроле»
 Figure 9 – Deyong's power-law model of the learning curve for Niva-Chevrolet cars



Рисунок 10 – Экспоненциальная модель кривой обучения для автомобилей «Нива-Шевроле»
 Figure 10 – Exponential learning curve model for Niva-Chevrolet cars

В таблице 2 для регрессионных моделей кривой обучения автомобилей «Нива-Шевроле» приводятся рассчитанные по формулам (6)–(10) значения остаточной дисперсии $\sigma_{\text{ост}}^2$, индекса парной корреляции R_{xy} , индекса детерминации R^2 , фактического значения F -критерия Фишера $F_{\text{факт}}$, средней ошибки аппроксимации \bar{A} .

Из анализа таблицы 2 делается вывод, что у степенной модели Стэнфорда-Восточная дисперсия $\sigma_{\text{ост}}^2$, средняя ошибка \bar{A} наименьшие, индекс парной корреляции R_{xy} , индекс детерминации R^2 наибольшие по сравнению с другими моделями. Таким образом, наиболее хорошо статистические данные по освоению производства автомобилей «Нива-Шевроле» аппроксимирует степенная модель Стэнфорда-В.

Таблица 2 – Расчет статистических характеристик моделей кривых обучения для автомобилей «Нива-Шевроле»

Table 2 – Calculation of the statistical characteristics of the learning curve models for Niva-Chevrolet cars

№	Модель	Остаточная дисперсия	Индекс парной корреляции	Индекс детерминации	Фактическое значение F -критерия Фишера	Средняя ошибка аппроксимации, %
1	Райта	169,98	0,9822	0,9648	1012,95	33,42
2	Стэнфорда-В	18,23	0,9981	0,9962	9752,87	9,22
3	Дейонга	42,74	0,9956	0,9911	4138,76	11,03
4	Экспоненциальная	357,78	0,9622	0,9258	461,82	39,94

Для оценки значимости построенной модели определяется табличное значение F -критерия Фишера $F_{\text{табл}} = 7,3734$. Так как фактическое значение больше табличного значения критерия F -Фишера $F_{\text{факт}} > F_{\text{табл}}$, то гипотеза о случайной природе оцениваемых переменных отклоняется и признается статистическая значимость и надежность степенной модели Стэнфорда-В.

Значение средней ошибки аппроксимации $\bar{A} = 9,22\%$ меньше 10% свидетельствует о достаточной точности построенной степенной модели Стэнфорда-В.

Заключение

В статье на основе данных автомобилестроительного предприятия АО «АВТОВАЗ» о производстве новых моделей автомобилей «Калина» и «Нива-Шевроле» построены регрессионные модели кривых обучения. Построены четыре модели зависимости трудоемкости автомобилей от кумулятивного объема производства автомобилей (кривые обучения): Райта, Стэнфорда-В, Дейонга и экспоненциальная. Рассчитаны статистические характеристики для каждой модели. Из анализа графиков регрессионных уравнений и рассчитанных статистических характеристик были сделаны следующие выводы.

1. Кривую обучения в процессе освоения производства автомобилей «Калина» наиболее хорошо аппроксимирует степенная модель Стэнфорда-В:

$$y = 3820,53(x - 14,34)^{-0,4274}.$$

2. Кривую обучения в процессе освоения производства автомобилей «Нива-Шевроле» наиболее хорошо аппроксимирует степенная модель Стэнфорда-В:

$$y = 1131,41(x - 62,05)^{-0,3621}.$$

3. Проведенное исследование показало статистическую значимость и надежность рассмотренных степенных регрессионных моделей кривых обучения.

4. Результаты расчетов свидетельствуют о достаточной точности построенных регрессионных моделей.

Идентифицированные регрессионные модели кривых обучения могут быть применены для постановки и решения различных прикладных динамических оптимизационных и игровых задач управления производственной деятельностью на промышленных предприятиях.

Библиографический список

1. Wright T.P. Factors affecting the cost of airplanes // Journal of the aeronautical sciences. 1936. Vol. 3, no. 4. P. 122–128. URL: <https://www.uvm.edu/pdodds/research/papers/others/1936/wright1936a.pdf>.
2. Badiru A. Computational survey of univariate and multivariate learning curve models // IEEE Transactions on Engineering Management. 1992. Vol. 39, no. 2. P. 176–188. DOI: <http://doi.org/10.1109/17.141275>.

3. Yelle L.E. The learning curve: Historical review and comprehensive survey // *Decision Sciences*. 1979. Vol. 10, no. 2. P. 302–328. DOI: <http://doi.org/10.1111/j.1540-5915.1979.tb00026.x>.
4. *Learning Curves: Theory, Models, and Applications* / edited by Mohamad Y. Jaber. Boca Raton: CRC Press, 2011. 476 p. URL: <https://b-ok.global/book/1218652/7f139c>.
5. *Эконометрика: учебник* / под ред. И.И. Елисеевой. Москва: Финансы и статистика, 2003. 344 с. URL: <https://institutiones.com/download/books/1224-ekonometrika.html>.

References

1. Wright T.P. Factors affecting the cost of airplanes. *Journal of the aeronautical sciences*, 1936, vol. 3, no. 4, pp. 122–128. Available at: <https://www.uvm.edu/pdodds/research/papers/others/1936/wright1936a.pdf>.
2. Badiru A. Computational survey of univariate and multivariate learning curve models. *IEEE Transactions on Engineering Management*, 1992, vol. 39, no. 2, pp. 176–188. DOI: <http://doi.org/10.1109/17.141275>.
3. Yelle L.E. The learning curve: Historical review and comprehensive survey. *Decision Sciences*, 1979, vol. 10, no. 2, pp. 302–328. DOI: <http://doi.org/10.1111/j.1540-5915.1979.tb00026.x>.
4. Mohamad Y. Jaber (Ed.) *Learning Curves: Theory, Models, and Applications*. Boca Raton: CRC Press, 2011, 476 p. Available at: <https://b-ok.global/book/1218652/7f139c>.
5. Eliseeva I.I. (Ed.) *Econometrics: textbook*. Moscow: Finansy i statistika, 2003, 344 p. Available at: <https://institutiones.com/download/books/1224-ekonometrika.html>. (In Russ.)