DOI: 10.18287/2542-0461-2020-11-2-157-165
УДК 330.42

Научная статья / Scientific article

Дата: поступления статьи / Submitted: 15.01.2020
после рецензирования / Revised: 09.02.2020
принятия статьи / Accepted: 25.05.2020

А.Л. Сараев
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: alex.saraev@gmail.com. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9223-6330

Л.А. Сараев
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: saraev_leo@mail.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3625-5921

Многофакторная математическая модель развития производственного предприятия за счет внутренних и внешних инвестиций

Аннотация: В публикуемой статье предложены новые модели динамического развития предприятий, которые восстанавливают свои производства за счет внутренних и внешних инвестиций. Установлены уравнения баланса для таких предприятий, описывающие изменения выпуска продукции и факторов производства. Разработанные экономико-математические модели представлены в виде систем дифференциальных уравнений относительно произвольного числа производственных факторов. В этих моделях рассмотрены пропорциональные, прогрессивные и дигрессивные амортизационные отчисления. Исследовано их взаимодействие с внутренними и внешними инвестициями. Получены уравнения, описывающие равновесные состояния работы предприятий, и вычислены соответствующие предельные значения факторов производства. Построенные в виде систем дифференциальных уравнений экономико-математические модели позволяют описывать различные режимы работы предприятий. К таким режимам относится стабильный выпуск продукции предприятиями, временная приостановка работы предприятия на время его технического переоснащения и временное частичное сворачивание производства. В качестве примера подробно рассмотрена двухфакторная модель предприятия. Установлены закономерности влияния объемов амортизационных отчислений, внутренних и внешних инвестиций на динамику развития предприятия. Получены уравнения равновесного состояния и вычислены предельные объемы производственных факторов предприятия – основного капитала и трудовых ресурсов.
Ключевые слова: предприятие, производство, ресурсы, производственные факторы, инвестиции, амортизация, производственная функция, трудовые ресурсы.
Цитирование. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Многофакторная математическая модель развития производственного предприятия за счет внутренних и внешних инвестиций // Вестник Самарского университета. Экономика и управление. 2020. Т. 11. № 2. С. 157–165. DOI: http://doi.org/10.18287/2542-0461-2020-11-2-157-165.
Информация о конфликте интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

A.L. Saraev
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: alex.saraev@gmail.com. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9223-6330

L.A. Saraev
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: saraev_leo@mail.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3625-5921

Multi-factor mathematical model of development of a production enterprise accounted by internal and external investments

Abstract: The published article proposes new models of the dynamic development of enterprises that restore their production through internal and external investments. Equations of balance are established for such enterprises, which describe changes in output and factors of production. The developed economic and mathematical models

are presented in the form of systems of differential equations for an arbitrary number of production factors. In these models, proportional, progressive and digressive depreciation charges are considered. Their interaction with internal and external investments is investigated. Equations are obtained that describe the equilibrium state of enterprises and the corresponding limit values of production factors are calculated. Constructed in the form of systems of differential equations, economic and mathematical models allow you to describe the various modes of operation of enterprises. Such regimes include stable production output by enterprises, temporary suspension of enterprises for the period of its technical re-equipment, and temporary partial winding up of production. As an example, a two-factor enterprise model is considered in detail. The regularities of the influence of depreciation, internal and external investments on the dynamics of the enterprise are established. Equilibrium equations are obtained and the marginal volumes of production factors of the enterprise – fixed capital and labor – are calculated.
Key words: enterprise, production, resources, production factors, investments, depreciation, production function, labor.
Citation. Saraev A.L., Saraev L.A. Multi-factor mathematical model of development of a production enterprise accounted by internal and external investments. *Vestnik Samarskogo universiteta. Ekonomika i upravlenie = Vestnik of Samara University. Economics and Management*, 2020, vol. 11, no. 2, pp. 157–165. DOI: http://doi.org/10.18287/2542-0461-2020-11-2-157-165. (In Russ.)
Information on the conflict of interest: authors declare no conflict of interest.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS
© *Александр Леонидович Сараев* – кандидат экономических наук, доцент кафедры математики и бизнес-информатики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.
© *Леонид Александрович Сараев* – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и бизнес-информатики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.
© *Alexander L. Saraev* – Candidate of Economical Sciences, associate professor of the Department of Mathematics and Business Informatics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.
© *Leonid A. Saraev* – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, head of the Department of Mathematics and Business Informatics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Введение

Разработка экономико-математических моделей динамического развития производственных предприятий является весьма актуальной проблемой современной экономической теории. Применение таких моделей на практике позволяет эффективно и адекватно проводить анализ деятельности предприятий, вычислять предельные значения показателей для производственных факторов, прогнозировать динамику выпуска продукции, прибыли и затрат и т. д. [1–10].

Целью публикуемой работы является создание новой многофакторной математической модели предприятия, на котором происходит техническое переоснащение производства. Модель представлена в виде системы связанных нелинейных дифференциальных уравнений.

Ее научная новизна состоит в том, что она описывает нелинейный характер амортизации производственных факторов и дает возможность исследовать различные варианты переоснащения собственных производств.

Рассмотрены случаи стабильной динамики выпуска продукции предприятием, временной приостановки его работы на время его технического переоснащения и временного частичного сворачивания производства.

Ход исследования

Объемы производственных ресурсов любого предприятия образуют n-мерный вектор пространства R^n [11]:

$$\mathbf{Q} = \left(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\right).$$

В качестве компонентов вектора $\mathbf{Q}$, как правило, используются основной, оборотный, финансовый капиталы, трудовые ресурсы, материалы, технологии, инновации и т. д.

Производственные факторы $Q_s = Q_s(t)$ являются функциями времени. Они предполагаются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми на временном интервале $(0 \le t < \infty)$.

Начальное значение фактора производства $Q_s^0 = Q_s(0)$ считается известным, его предельное значение $Q_s^\infty = \lim\limits_{t\to\infty} Q_s(t)$ подлежит вычислению. Все компоненты Q_s вектора $\mathbf{Q}$ удовлетворяют неравенствам

$$Q_s^0 \le Q_s \le Q_s^\infty .$$

В качестве производственной функции предприятия, обеспечивающей выпуск продукции, выберем мультипликативную функцию Кобба – Дугласа

$$V = P \cdot \prod_{k=1}^{n} Q_k^{a_k} . \tag{1}$$

Здесь a_k – эластичность выпуска по соответствующему ресурсу Q_k; P – выпуск продукции, приходящийся на единичные объемы производственных факторов.

Для составления уравнений баланса динамики развития рассматриваемого предприятия представим приращения объемов ресурсов на некотором малом промежутке времени Δt

$$\Delta Q_s = Q_s(t + \Delta t) - Q_s(t)$$

в виде суммы трех компонентов

$$\Delta Q_s(t) = \Delta Q_s^A(t) + \Delta Q_s^I(t) + \Delta Q_s^G(t). \tag{2}$$

Здесь $\Delta Q_s^A(t)$– частичная амортизационная утрата ресурса Q_s, $\Delta Q_s^I(t)$ – частичное восполнение ресурса Q_s за счет внутренних инвестиций, $\Delta Q_s^G(t)$ – частичное восполнение ресурса Q_s за счет внешних инвестиций.

Частичную утрату $\Delta Q_s^A(t)$ за время Δt можно представить в виде

$$\Delta Q_s^A(t) = -A_s \cdot \theta(t) \cdot Q_s^{u_s}(t) \cdot \Delta t . \tag{3}$$

Здесь A_s – коэффициенты амортизации, которые выражают доли утраченных объемов ресурсов Q_s в единицу времени; u_s – показатели интенсивности процесса амортизации.

Если $u_s = 1$, то имеет место пропорциональная амортизация, если $u_s > 1$ – прогрессивная амортизация, если же $u_s < 1$ – регрессивная амортизация.

Частичное восстановление ресурсов за счет внутренних инвестиций $\Delta Q_s^I(t)$ за время Δt записывается в виде

$$\Delta Q_s^I(t) = \theta(t) \cdot I_s(t) \cdot \Delta t = \theta(t) \cdot B_s \cdot V(t) \cdot \Delta t . \tag{4}$$

Здесь $I_s(t) = B_s \cdot V(t)$ – инвестиции, соответствующие фактору производства Q_s в момент времени t; B_s – нормы накопления внутренних инвестиций.

Частичное восстановление ресурсов за счет внешних инвестиций $\Delta Q_s^G(t)$ за время Δt выражается формулой

$$\Delta Q_s^G = \theta(t) \cdot G(t) \cdot \Delta t . \tag{5}$$

Здесь $G(t)$ – объем внешних инвестиций, приходящихся на все объемы ресурсов Q_s; η_s – коэффициенты распределения объема $G(t)$ между объемами ресурсов, которые удовлетворяют очевидному соотношению

$$\sum_{k=1}^{n} \eta_k = 1.$$

Подстановка формул (3)–(5) в уравнения баланса (2) дает

$$\Delta Q_s = \theta \cdot \left(-A_s \cdot Q_s^{u_s} + B_s \cdot V + \eta_s \cdot G\right) \cdot \Delta t,$$

а предельный переход при $\Delta t \to 0$ приводит к системе нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dQ_s}{dt} = \theta \cdot \left(-A_s \cdot Q_s^{u_s} + B_s \cdot V + \eta_s \cdot G\right), (s = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Исключая из соотношений (1) и (6) величину V, находим

$$\frac{dQ_s}{dt} = \theta \cdot \left(-A_s \cdot Q_s^{u_s} + B_s \cdot P \cdot \prod_{k=1}^{n} Q_k^{a_k} + \eta_s \cdot G\right). \tag{7}$$

Начальными условиями для системы уравнений (7) являются соотношения

$$Q_s\Big|_{t=0} = Q_s(0) = Q_s^0. \tag{8}$$

Применим построенную модель (7), (8) для описания поведения предприятия, которое развивается только за счет собственных внутренних инвестиций, а выпуск его готовой продукции обеспечивается только двумя производственными факторами – основным капиталом K и трудовыми ресурсами L. Тогда размерность системы становится $n = 2$, индекс s принимает только два значения $s = (1, 2)$, а функция внешних инвестиций тождественно равна нулю $G(t) \equiv 0$.

Для производственных факторов и остальных параметров удобно ввести следующие обозначения:

$Q_1(t) = K(t)$, $Q_2(t) = L(t)$, $Q_1^0 = K_0$, $Q_2^0 = L_0$, $Q_1^\infty = K_\infty$, $Q_2^\infty = L_\infty$,

$a_1 = a$, $a_2 = b$, $u_1 = u$, $u_2 = v$, $A_1 = A_K$, $A_2 = A_L$, $B_1 = B_K$, $B_2 = B_L$.

Производственная функция Кобба – Дугласа (1) принимает вид

$$V = P \cdot K^a \cdot L^b, \tag{9}$$

а задача Коши (7), (8) сводится к системе двух уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \theta \cdot \left(-A_K \cdot K^u + B_K \cdot P \cdot K^a \cdot L^b\right), \\ \frac{dL}{dt} &= \theta \cdot \left(-A_L \cdot L^v + B_L \cdot P \cdot K^a \cdot L^b\right), \end{aligned} \tag{10}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} K\big|_{t=0} &= K(0) = K_0, \\ L\big|_{t=0} &= L(0) = L_0. \end{aligned} \tag{11}$$

Из уравнений (10) следует, что развитие предприятия выйдет на предельный уровень при условии

$$\frac{dK}{dt} = 0, \frac{dL}{dt} = 0.$$

В этом случае предельные значения K_∞ и L_∞ объемов ресурсов $K = K(t)$ и $L = L(t)$ находятся из системы уравнений [12]

$$-A_K \cdot K^u + B_K \cdot P \cdot K^a \cdot L^b = 0, \quad -A_L \cdot L^v + B_L \cdot P \cdot K^a \cdot L^b = 0, \tag{12}$$

и равны

$$K_\infty = \left(P \cdot \left(\frac{B_L}{A_L} \right)^b \cdot \left(\frac{B_K}{A_K} \right)^{v-b} \right)^{\frac{1}{u \cdot v - a \cdot v - b \cdot u}}, \quad L_\infty = \left(P \cdot \left(\frac{B_L}{A_L} \right)^{u-a} \cdot \left(\frac{B_K}{A_K} \right)^{a} \right)^{\frac{1}{u \cdot v - a \cdot v - b \cdot u}}. \tag{13}$$

Если амортизация является пропорциональной $u=1$, $v=1$, то формулы (13) принимают вид

$$K_\infty = \left(P \cdot \left(\frac{B_L}{A_L} \right)^b \cdot \left(\frac{B_K}{A_K} \right)^{1-b} \right)^{\frac{1}{1-a-b}}, \quad L_\infty = \left(P \cdot \left(\frac{B_L}{A_L} \right)^{1-a} \cdot \left(\frac{B_K}{A_K} \right)^{a} \right)^{\frac{1}{1-a-b}}. \tag{14}$$

На рис. 1 показаны графики поверхностей функций:

$$Z_K = I_K - AM_K = -A_K \cdot K^u + B_K \cdot P \cdot K^a \cdot L^b, \quad Z_L = I_L - AM_L = -A_L \cdot L^v + B_L \cdot P \cdot K^a \cdot L^b. \tag{15}$$

Пространственная линия пересечения этих поверхностей представляет собой траекторию, вдоль которой осуществляется развитие факторов производства от начала координат до их предельных значений K_∞ и L_∞.

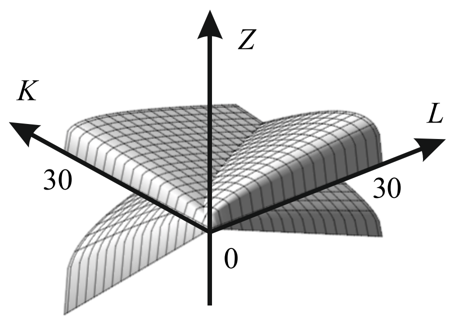

Рис. 1 – Графики поверхностей функций (15)
Fig. 1 – Graphs of functions surfaces (15)

Предельное значение объема выпуска продукции V_∞ находится по формуле (9)

$$V_\infty = P \cdot K_\infty^a \cdot L_\infty^b. \tag{16}$$

На рис. 2 представлены графики функции выпуска продукции $V(t) = P \cdot K^a(t) \cdot L^b(t)$, полученные в результате численного решения задачи Коши (10), (11) для случаев стабильной работы предприятия, временной приостановки работы предприятия и частичного сворачивания работы предприятия.

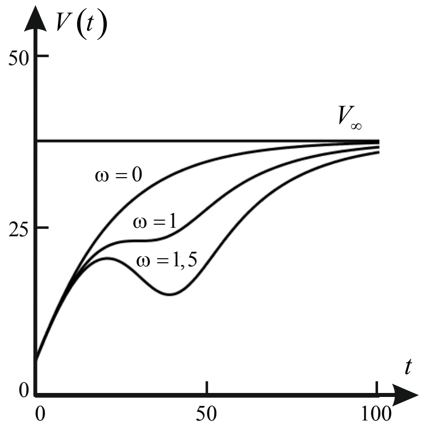

Рис. 2 – Графики функции выпуска продукции рассматриваемым предприятием, для случаев стабильной работы, временной приостановки работы и частичного сворачивания работы. Соответствующие значения параметра ω отмечены у каждой кривой

Fig. 2 – Graphs of the output function of the enterprise under consideration, for cases of stable operation, temporary suspension of work and partial curtailment of work. Corresponding parameter ω values are marked for each curve

При построении графиков функций на рис. 1 и рис. 2 были использованы следующие расчетные значения: $P=5$; $a=0{,}35$; $b=0{,}25$; $u=1$; $v=1$; $A_K=0{,}2$; $B_K=0{,}15$; $A_L=0{,}09$; $B_L=0{,}07$; $\sigma=10$; $t^*=30$; $K_\infty=27{,}8579$; $L_\infty=28{,}8897$; $V_\infty=37{,}1439$.

Если деятельность рассматриваемого производственного предприятия сопровождается помимо внутренних инвестиций внешними инвестициями, то в этом случае система нелинейных дифференциальных уравнений (6) сводится к системе двух уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dK}{dt}&=\theta\cdot\left(-A_K\cdot K^u+B_K\cdot P\cdot K^a\cdot L^b+\eta_K\cdot G\right),\\ \frac{dL}{dt}&=\theta\cdot\left(-A_L\cdot L^v+B_L\cdot P\cdot K^a\cdot L^b+\eta_L\cdot G\right),\end{aligned} \qquad (17)$$

с начальными условиями (11).

Выбор вида функции объема внешних инвестиций $G(t)$ объясняется условиями инвестирования. Если уровень объема внешних инвестиций определяется уровнями объемов производственных факторов, то функция $G(t)$ и функции факторов производства $K(t), L(t)$ будут связаны между собой. Ограничимся здесь степенной зависимостью

$$G(t)=\Omega\cdot K^\alpha(t)\cdot L^\beta(t). \qquad (18)$$

Здесь Ω – объем привлеченных внешних инвестиций на единичные объемы ресурсов $K(t), L(t)$, показатели степени α, β описывают интенсивности внедрения внешних инвестиций в предприятие $(0<\alpha<1, 0<\beta<1)$. Таким образом, система уравнений (17) записывается в виде

$$\begin{aligned}\frac{dK}{dt}&=\theta\cdot\left(-A_K\cdot K^u+B_K\cdot P\cdot K^a\cdot L^b+\eta_K\cdot\Omega\cdot K^\alpha(t)\cdot L^\beta(t)\right),\\ \frac{dL}{dt}&=\theta\cdot\left(-A_L\cdot L^v+B_L\cdot P\cdot K^a\cdot L^b+\eta_L\cdot\Omega\cdot K^\alpha(t)\cdot L^\beta(t)\right).\end{aligned} \qquad (19)$$

Из уравнений (19) следует, что развитие предприятия выйдет на предельный уровень при условии

$$\frac{dK}{dt}=0\,,\frac{dL}{dt}=0\,.$$

В этом случае предельные значения K_∞ и L_∞ объемов ресурсов $K=K(t)$ и $L=L(t)$ находятся из системы уравнений [12]

$$\begin{aligned}&-A_K\cdot K^u+B_K\cdot P\cdot K^a\cdot L^b+\eta_K\cdot\Omega\cdot K^\alpha\cdot L^\beta=0,\\&-A_L\cdot L^v+B_L\cdot P\cdot K^a\cdot L^b+\eta_L\cdot\Omega\cdot K^\alpha\cdot L^\beta=0,\end{aligned}\qquad(20)$$

которая в отличие от системы уравнений (10) имеет только численное решение.

На рис. 3 представлены графики функции выпуска продукции $V(t)=P\cdot K^a(t)\cdot L^b(t)$, полученные в результате численного решения задачи Коши (19), (11) для случаев стабильной работы предприятия, временной приостановки работы предприятия и частичного сворачивания работы предприятия.

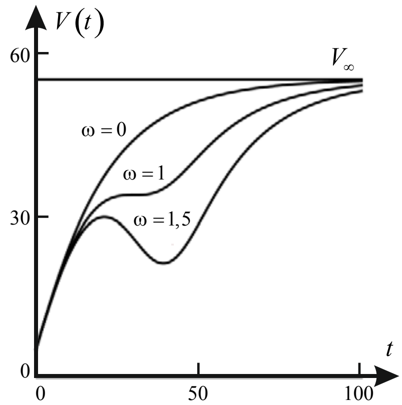

Рис. 3 – Графики функции выпуска продукции рассматриваемым предприятием для случаев стабильной работы, временной приостановки работы и частичного сворачивания работы. Соответствующие значения параметра ω отмечены у каждой кривой

Fig. 3 – Graphs of the output function of the enterprise under consideration for cases of stable operation, temporary suspension of work and partial curtailment of work. Corresponding parameter ω values are marked for each curve

При построении графиков функций на рис. 3 были использованы следующие расчетные значения: $P=5$; $a=0{,}35$; $b=0{,}25$; $\Omega=0{,}50$; $\alpha=0{,}30$; $\beta=0{,}20$; $\eta_K=0{,}75$; $\eta_L=0{,}25$; $u=1$; $v=1$; $A_K=0{,}2$; $B_K=0{,}15$; $A_L=0{,}09$; $B_L=0{,}07$; $\sigma=10$; $t^*=30$; $K_\infty=54{,}8234$; $L_\infty=52{,}7717$; $V_\infty=54{,}7278$.

Заключение

Разработаны новые модели динамического развития производственных предприятий, восполнение производственных мощностей которых происходит посредством внутреннего и внешнего инвестирования.

Полученные математические модели, представляющие собой нормальные системы дифференциальных уравнений относительно произвольного числа производственных факторов, позволяют описывать различные варианты динамики роста выпуска продукции предприятиями.

Рассмотрены случаи стабильного выпуска продукции предприятием, временной приостановки работы предприятия на время его технического переоснащения и временного частичного сворачивания производства.

Для двухфакторной модели предприятия получены условия его предельного состояния, вычислены соответствующие ему предельные объемы ресурсов.

Библиографический список

1. Нижегородцев Р.М. Модели логистической динамики как инструмент экономического анализа и прогнозирования // Моделирование экономической динамики: риск, оптимизация, прогнозирование. Москва, 1997. С. 34–51.

2. Бадаш Х.З. Экономико-математическая модель экономического роста предприятия // Вестник Удмуртского университета. Серия Экономика и право. 2009. № 1. С. 5–9. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=11700881.

3. Королев А.В., Матвеенко В.Д. О структуре равновесных нестационарных траекторий в модели эндогенного роста Лукаса // Автоматика и телемеханика. 2006. № 4. С. 106–114. URL: http://mi.mathnet.ru/at1170.

4. Кузнецов Ю.А., Мичасова О.В. Сравнительный анализ применения пакетов имитационного моделирования и систем компьютерной математики для анализа моделей теории экономического роста // Экономический анализ: теория и практика. 2007. № 5 (86). С. 23–30. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/sravnitelnyy-analiz-primeneniya-paketov-imitatsionnogo-modelirovaniya-i-sistem-kompyuternoy-matematikidly aanaliza-modeley.

5. Кузнецов Ю.А. Обобщенная модель экономического роста с учетом накопления человеческого капитала // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2012. № 4. С. 46–57. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=18079557.

6. Прасолов А.В. Математические методы экономической динамики. Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2015. 352 с.

7. Uzawa H. Optimal technical change in an aggregate model of economic growth // International Economic Review. 1965. Vol. 6, № 1. P. 18–31. URL: http://kisi.deu.edu.tr/yesim.kustepeli/uzawa1965.pdf.

8. Lucas R.E., Jr. On the Mechanics of Economic Development // Journal of Monetary Economics. 1988. Vol. 22, № 1. P. 3–42. URL: https://www.parisschoolofeconomics.eu/docs/darcillon-thibault/lucasmechanic seconomicgrowth.pdf.

9. Barro R., Sala-i-Martin X. Economic Growth. 2nd Edition. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 2004. 142 p. URL: http://piketty.pse.ens.fr/files/BarroSalaIMartin2004Chap1-2.pdf.

10. Gong G., Greiner A., Semmler W. The Uzawa – Lucas model without scale effects: theory and empirical evidence // Structural change and economic dynamics. 2004. Vol. 15, № 4. P. 401–420. DOI: https://doi.org/10.1016/j.strueco.2003.10.002.

11. Сараев А.Л. Уравнения нелинейной динамики кризисных явлений для многофакторных экономических систем // Вестник Самарского государственного университета. 2015. № 2 (124). С. 262–272. URL: https://journals.ssau.ru/index.php/eco/article/view/5635.

12. Сараев А.Л. Показатели нелинейной динамики и предельное состояние производственного предприятия // Экономика и предпринимательство. 2018. № 11. С. 1237–1241. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36512728.

References

1. Nizhegorodtsev R.M. Models of logistics dynamics as a tool for economic analysis and forecasting. In: Modeling of economic dynamics: risk, optimization, forecasting. Moscow, 1997, pp. 34–51. (In Russ.)

2. Badash Kh.Z. The economic-mathematical model of the economic growth of enterprises. Bulletin of Udmurt University. Series Economics and Law, 2009, no. 1, pp. 5–9. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=11700881. (In Russ.)

3. Korolev A.V., Matveenko V.D. Structure of equilibrium time-varying trajectories in the Lucas endogenous growth model. Automation and Remote Control, 2006, vol. 67, pp. 624–633. DOI: https://doi.org/10.1134/S0005117906040102. (In Russ.)

4. Kuznetsov Yu.A., Michasova O.V. Comparative analysis of the application of simulation packages and computer mathematics systems for the analysis of models of the theory of economic growth. Economic Analysis: Theory and Practice, 2007, no. 5 (86), pp. 23–30. Available at: https://cyberleninka.ru/article/n/sravnitelnyy-

analiz-primeneniya-paketov-imitatsionnogo-modelirovaniya-i-sistem-kompyuternoy-matematiki-dlya-analiza-modeley. (In Russ.)

5. Kuznetsov Yu.A., Michasova O.V. The generalized model of economic growth with human capital accumulation. Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control processes, 2012, no. 4, pp. 46–57. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=18079557. (In Russ.)

6. Prasolov A.V. Mathematical methods of economic dynamics. Saint Petersburg: Izdatel'stvo «Lan'», 2015, 352 p. (In Russ.)

7. Uzawa H. Optimal technical change in an aggregate model of economic growth. International Economic Review, 1965, vol. 6, no. 1, pp. 18–31. Available at: http://kisi.deu.edu.tr/yesim.kustepeli/uzawa1965.pdf.

8. Lucas R.E., Jr. On the Mechanics of Economic Development. Journal of Monetary Economics, 1988, vol. 22, no. 1, pp. 3–42. Available at: https://www.parisschoolofeconomics.eu/docs/darcillon-thibault/lucasmechanicseconomicgrowth.pdf.

9. Barro R., Sala i Martin X. Economic Growth. 2nd edition. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 2004, 142 p. Available at: http://piketty.pse.ens.fr/files/BarroSalaIMartin2004Chap1-2.pdf.

10. Gong G., Greiner A., Semmler W. The Uzawa-Lucas model without scale effects: theory and empirical evidence. Structural Change and Economic Dynamics, 2004, vol. 15, no. 4, pp. 401–420. DOI: https://doi.org/10.1016/j.strueco.2003.10.002.

11. Saraev A.L. Equations of nonlinear dynamics of crisis phenomena for multifactor economic systems. Vestnik of Samara State University, 2015, no. 2 (124), pp. 262–272. Available at: https://journals.ssau.ru/index.php/eco/article/view/5635. (In Russ.)

12. Saraev A.L., Saraev L.A. Indicators of nonlinear dynamics and the limiting condition of a manufacturing enterprise. Journal of Economy and entrepreneurship, 2018, no. 11, pp. 1237–1241. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36512728. (In Russ.)