
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ЭКОНОМИКИ

УДК 338.27:519.2

А.Л. Сараев*

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ РАЗВИТИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ В УСЛОВИЯХ ЦИФРОВИЗАЦИИ

В публикуемой статье предложена математическая модель динамики экономического развития предприятия, находящегося в условиях цифровой трансформации, представляющей собой процесс интеграции цифровых технологий во все аспекты деятельности предприятия и вносящей коренные изменения в технологии, операции и способы создания новой продукции. Результатом цифровой трансформации производственных мощностей предприятия является неуклонное вытеснение новым цифровым производством старого производства.

Установлены уравнения баланса для двухкомпонентной системы взаимодействующих двух производств, которые описываются связанными нелинейными дифференциальными уравнениями.

Рассмотрены различные варианты экономического развития предприятия, цифровая трансформация которых может сопровождаться временным замедлением темпов роста выпуска продукции и кризисными явлениями.

Ключевые слова: предприятие, цифровые технологии, факторы производства, производственная функция, производственные фонды, ресурсы, цифровая трансформация.

Одним из важных направлений формирования цифровой экономики является организация процессов цифровизации производственных предприятий. Эти процессы сопровождаются широким внедрением таких новых технологий, как обработка и аналитика больших данных, машинное обучение, искусственный интеллект, роботизация, дополненная реальность, промышленный интернет вещей (IoT), 3D-печать, облачные вычисления и т. д. [1].

Широкое развитие и диффузия цифровизации стали возможными за счет снижения стоимости технологий, увеличения вычислительных мощностей и скорости передачи данных. Цифровая трансформация предприятия опирается на операционную цифровизацию, представляющую собой внедрение цифровых инструментов для повышения эффективности предприятия. Внедрение цифровых инструментов в операционную деятельность позволяет предприятиям удаленно управлять физическими элементами оборудования предприятия и его производством в целом. Набор эффективных технологий представляет для предприятия инструментарий, позволяющий увеличивать выпуск готовой продукции, снижать издержки, сокращать расход материалов, повышать доступность оборудования [2].

* © Сараев А.Л., 2018

Сараев Александр Леонидович (alex.saraev@gmail.com), кафедра математики и бизнес-информатики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Рассмотрим производственное предприятие, мощности которого обеспечивают выпуск продукции одним ресурсом в виде некоторого объема фактора производства. Если на этом предприятии происходит внедрение цифровых инструментов для модернизации технологического оборудования, то внутри имеющегося производства возникает и развивается новое цифровое производство. Оба эти производства определенное время работают параллельно, до тех пор пока новое производство не вытеснит окончательно старое производство.

Старое производство предприятия затрачивает определенный набор ресурсов в виде объема фактора производства Q , а новое производство предприятия затрачивает свой набор ресурсов в виде объема фактора производства P . Эти факторы производства Q и P складываются из основного капитала, производственных фондов, привлекаемых в производство трудовых ресурсов, используемых в производстве материалов, применяемых технологий, различного рода инновации и т. д.

Переменная времени t предполагается непрерывной, единицей ее измерения служит так называемый производственный период (месяц, квартал, год). Функции $Q = Q(t)$ и $P = P(t)$ предполагаются непрерывными, непрерывно дифференцируемыми и ограниченными на числовой полуоси ($0 < t < \infty$)

$$\begin{aligned} Q_0 < Q(t) < Q_\infty, \\ P_0 < P(t) < P_\infty. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} Q_0 &= \lim_{t \rightarrow 0} Q(t), Q_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t), \\ P_0 &= \lim_{t \rightarrow 0} P(t), P_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t). \end{aligned}$$

Начальные значения факторов производства Q_0 и P_0 считаются известными, предельные значения Q_∞ и P_∞ подлежат вычислению.

Выпуски продукции старым производством предприятия V_Q и новым производством предприятия V_P обеспечиваются двумя производственными функциями Кобба-Дугласа

$$V_Q = R_Q \cdot Q^{a_Q}, V_P = R_P \cdot P^{a_P}. \quad (1)$$

Здесь R_Q, R_P – стоимости продуктов, произведенных на единичные объемы ресурсов, степенные показатели производственных функций a_Q, a_P представляют собой эластичности выпуска по соответствующим ресурсам, при этом имеют место неравенства $0 < a_Q < 1, 0 < a_P < 1$.

Для оценки динамики развития рассматриваемых производств предприятия следует составить уравнения баланса для объемов факторов производств Q и P .

Значения изменений объемов факторов производства ΔQ и ΔP за некоторый малый промежуток времени Δt могут быть представлены соотношениями

$$\begin{aligned} \Delta Q(t) &= \Delta Q^A(t) + \Delta Q^I(t) + \Delta Q^G(t), \\ \Delta P(t) &= \Delta P^A(t) + \Delta P^I(t) + \Delta P^G(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\Delta Q^A(t), \Delta P^A(t)$ – частичные амортизации факторов производств, $\Delta Q^I(t), \Delta P^I(t)$ – частичные восстановления факторов производств за счет внутренних эндогенных инвестиций в рассматриваемое предприятие, $\Delta Q^G(t), \Delta P^G(t)$ – частичные восстановления факторов производств за счет внешних экзогенных инвестиций в рассматриваемое предприятие.

Ограничимся здесь случаем пропорциональных частичных амортизаций $\Delta Q^A(t), \Delta P^A(t)$ за промежутки времени Δt

$$\begin{aligned}\Delta Q^A(t) &= -A_Q \cdot \theta(t) \cdot Q(t) \cdot \Delta t, \\ \Delta P^A(t) &= -A_P \cdot \theta(t) \cdot P(t) \cdot \Delta t.\end{aligned}\quad (3)$$

Здесь A_Q, A_P – коэффициенты амортизации, доли выбывших за единицу времени объемов факторов производства.

Приращения внутренних эндогенных инвестиций $\Delta Q^I(t), \Delta P^I(t)$ за промежутки времени Δt записываются в виде

$$\begin{aligned}\Delta Q^I(t) &= \theta(t) \cdot (I_{QQ}(t) + I_{QP}(t)) \cdot \Delta t, \\ \Delta P^I(t) &= \theta(t) \cdot (I_{PQ}(t) + I_{PP}(t)) \cdot \Delta t.\end{aligned}\quad (4)$$

Здесь

$$\begin{aligned}I_{QQ}(t) &= B_{QQ} \cdot V_Q(t), I_{QP}(t) = B_{QP} \cdot V_P(t), \\ I_{PQ}(t) &= B_{PQ} \cdot V_Q(t), I_{PP}(t) = B_{PP} \cdot V_P(t),\end{aligned}$$

– инвестиции, сделанные в момент времени t , $B_{QQ}, B_{QP}, B_{PQ}, B_{PP}$ – нормы накоплений внутренних эндогенных инвестиций.

Таким образом, формулы (4) принимают вид

$$\begin{aligned}\Delta Q^I(t) &= \theta(t) \cdot (B_{QQ} \cdot V_Q(t) + B_{QP} \cdot V_P(t)) \cdot \Delta t, \\ \Delta P^I(t) &= \theta(t) \cdot (B_{PQ} \cdot V_Q(t) + B_{PP} \cdot V_P(t)) \cdot \Delta t.\end{aligned}\quad (5)$$

Приращения внешних инвестиций $\Delta Q^G(t), \Delta P^G(t)$ за промежутки времени Δt определяются соотношениями

$$\begin{aligned}\Delta Q^G(t) &= \theta(t) \cdot \eta_Q \cdot G(t) \cdot \Delta t, \\ \Delta P^G(t) &= \theta(t) \cdot \eta_P \cdot G(t) \cdot \Delta t.\end{aligned}\quad (6)$$

Здесь $G(t)$ – общий объем внешних инвестиций; η_Q, η_P – доли объемов внешних инвестиций $G(t)$, приходящихся на объемы факторов производства Q и P . Следует отметить, что величины η_Q, η_P не являются независимыми, а удовлетворяют условию

$$\eta_Q + \eta_P = 1.$$

Подстановка формул (3), (5) и (6) в уравнения баланса (2) дает

$$\begin{aligned}\Delta Q &= \theta \cdot (-A_Q \cdot Q + B_{QQ} \cdot V_Q + B_{QP} \cdot V_P + \eta_Q \cdot G) \cdot \Delta t, \\ \Delta P &= \theta \cdot (-A_P \cdot P + B_{PQ} \cdot V_Q + B_{PP} \cdot V_P + \eta_P \cdot G) \cdot \Delta t.\end{aligned}\quad (7)$$

Подставляя в уравнения (7) выражения для производственных функций (2.5.1) и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, находим систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt} &= \theta \cdot (-A_Q \cdot Q + B_{QQ} \cdot R_Q \cdot Q^{a_Q} + B_{QP} \cdot R_P \cdot P^{a_P} + \eta_Q \cdot G), \\ \frac{dP}{dt} &= \theta \cdot (-A_P \cdot P + B_{PQ} \cdot R_Q \cdot Q^{a_Q} + B_{PP} \cdot R_P \cdot P^{a_P} + \eta_P \cdot G).\end{aligned}\quad (8)$$

Уравнения (8) образуют систему нормальных нелинейных связанных уравнений первого порядка, а ее начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned} Q(0) &= Q_0, \\ P(0) &= P_0. \end{aligned} \quad (9)$$

В общем случае нелинейная задача Коши (8), (9) может быть решена только численно.

Структура уравнений баланса (8) показывает, что предприятие будет развиваться до тех пор, пока объем внутренних и внешних инвестиций будет превосходить амортизационные отчисления. Предельные значения Q_∞ и P_∞ объемов производственных факторов $Q(t)$ и $P(t)$ находятся из уравнений [3]

$$\begin{aligned} -A_Q \cdot Q + B_{QQ} \cdot R_Q \cdot Q^{a_Q} + B_{QP} \cdot R_P \cdot P^{a_P} + \eta_Q \cdot G &= 0, \\ -A_P \cdot P + B_{PQ} \cdot R_Q \cdot Q^{a_Q} + B_{PP} \cdot R_P \cdot P^{a_P} + \eta_P \cdot G &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Функция $\theta(t)$ описывает удельную скорость развития рассматриваемого предприятия. При постоянной и единичной скорости $\theta(t) \equiv 1$ развитие предприятия будет поступательным и монотонно возрастающим. Различные значения отклонений функции $\theta(t)$ от единицы будут соответствовать замедлению процесса развития предприятия, его временной остановке во время смены технологий производства и кризисным явлениям. Формы интегральных кривых уравнения (8) существенно зависят от вида функции $\theta(t)$, которая задает центр временного интервала, его протяженность и размер отклонения от единичного значения, при котором предприятие работает стабильно.

Если в некоторых временных окрестностях с центром в заданный момент времени $t = t^*$ на предприятии производится полная или частичная замена технологического оборудования, то функция $\theta(t)$ будет иметь вид [4; 5]

$$\theta(t) = 1 - \omega \cdot \exp\left(-\frac{(t - t^*)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right). \quad (11)$$

Здесь ω – максимальный размер отклонения функции $\theta(t)$ от единицы, σ – радиус временного интервала $(t^* - \sigma, t^* + \sigma)$, на котором происходит отклонение функции $\theta(t)$ от единицы.

В процессе модернизации рассматриваемого предприятия новый производственный фактор P постепенно вытесняет прежний производственный фактор Q . При этом значение выпуска продукции старого производства V_Q уменьшается до нуля, а предельное значение выпуска продукции нового производства V_P неуклонно увеличивается. Такой процесс может быть описан кинетическим соотношением

$$W(t) = W_Q(t) + W_P(t) = V_Q(t) \cdot e^{-\lambda \cdot t} + V_P(t) \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot t}). \quad (12)$$

Здесь $W(t)$ – общее значение выпуска продукции предприятия в целом, $W_Q(t)$ и $W_P(t)$ – значения выпусков продукции производствами при передачи старых мощностей новым.

На рис. 1 представлены графики производственных функций каждого производственного компонента и предприятия в целом, построенных по результатам численного решения задачи Коши (8), (9), описывающие процесс замещения одного производства предприятия другим в условиях эволюционного процесса модернизации $\omega = 0$.

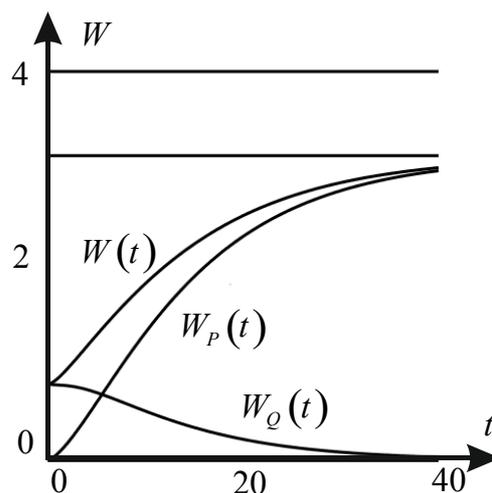


Рис. 1

Численный анализ модели показывает, что в случае эволюционного процесса модернизации максимальный выпуск продукции предприятия происходит в тот ограниченный период времени, когда оба производства работают эффективно параллельно. Затем старое производство демонтируется и предприятие в целом переходит на стабильный выпуск продукции в новых условиях.

На рис. 2 представлены графики производственных функций каждого производственного компонента и предприятия в целом, построенных по результатам численного решения задачи Коши (8), (9), описывающие процесс вытеснения одного производства предприятия другим производством, которое сопровождается сменой технологических укладов с полной временной остановкой работы предприятия $\omega = 1$, $t^* = 15$, $\sigma = 5$.

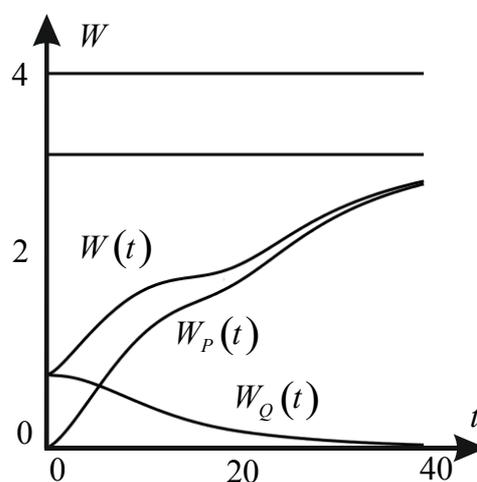


Рис. 2

Численный анализ модели в этом случае показывает, что в случае смены технологического уклада предприятия его максимальный выпуск продукции происходит после периода стагнации в ограниченный период времени, когда старое производство еще интенсивно эксплуатируется. Далее осуществляется его вытеснение, а предприятие в целом снова переходит на стабильный выпуск продукции в новых условиях.

На рис. 3 представлены графики производственных функций каждого производственного компонента и предприятия в целом, построенных по результатам численного решения задачи Коши (8), (9), описывающие процесс вытеснения одного производства предприятия другим

производством, которое, помимо смены технологических укладов, сопровождается временными кризисными явлениями и элементами временной деградации предприятия $\omega = 1,2$; $t^* = 15$; $\sigma = 5$.

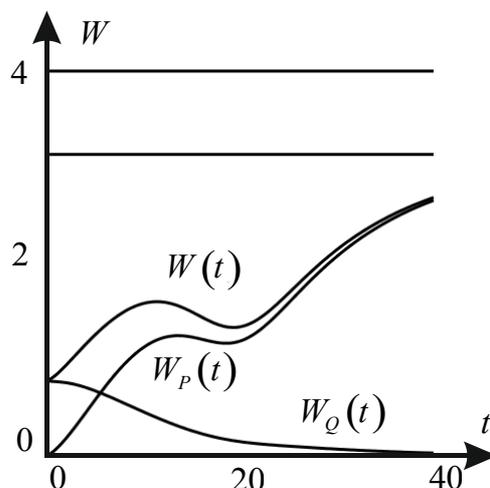


Рис. 3

Здесь численный анализ модели показывает, что в случае смены технологического уклада предприятия сопровождаемого временными кризисными явлениями и элементами деградации, его максимальный выпуск продукции происходит в весьма ограниченный период времени, после которого предприятие в целом выходит на стабильный выпуск продукции в новых условиях.

Расчетные значения: $R_Q = 1,0$; $R_P = 1,5$; $a_Q = 0,35$; $a_P = 0,45$; $A_Q = 0,20$; $A_P = 0,12$; $B_{QQ} = 0,20$; $B_{QP} = 0,19$; $B_{PQ} = 0,21$; $B_{PP} = 0,18$; $\lambda = 0,10$.

Предельные значения ресурсов $Q_\infty = 4,6948$ и $P_\infty = 7,7067$ вычислены в результате численного решения системы уравнений (10).

Библиографический список

1. Кешелова А.В. Цифровая трансформация предприятия [Электронный ресурс]. URL: http://spkurdyumov.ru/digital_economy/cifrovaya-transformaciya-predpriyatiya.
2. Макаров И.Н., Широкова О.В., Арутюнян В.А., Путинцева Е.Э. Цифровая трансформация разномасштабных предприятий, вовлеченных в реальный сектор российской экономики // Экономические отношения. 2019. Т. 9. № 1. С. 313–326. DOI: 10.18334/eo.9.1.3996.
3. Сараев А.Л. Показатели нелинейной динамики и предельное состояние производственного предприятия // Экономика и предпринимательство. 2018. № 11. С. 1237–1241.
4. Барышева Е.Н. Динамическая модель модернизации двухкомпонентного промышленного предприятия // Математика, экономика и управление, 2015. Т. 1. № 1 (1). С. 35–40.
5. Ильина Е.А. К теории модернизации производственных предприятий, учитывающей запаздывание внутренних инвестиций // Экономика и предпринимательство. 2017. № 9–4 (86). С. 1130–1134.

References

1. Keshelava A.V. *Tsifrovaya transformatsiya predpriyatiya [Elektronnyi resurs]* [Digital Transformation of an Enterprise [Electronic Resource]]. Available at: http://spkurdyumov.ru/digital_economy/cifrovaya-transformatsiya-predpriyatiya/ [in Russian].
2. Makarov I.N., Shirokova O.V., Arutyunyan V.A., Putintseva E.E. *Tsifrovaya transformatsiya raznomasshtabnykh predpriyatii, вовлеченных в real'nyi sektor rossiiskoi ekonomiki* [Digital transformation of multi-scale enterprises involved in the real sector of the Russian economy]. *Ekonomicheskie otnosheniya* [Journal of International Economic Affairs], 2019, Vol. 9, no. 1, pp. 313–326. DOI: 10.18334/eo.9.1.3996 [in Russian].
3. Saraev A.L., Saraev L.A. *Pokazateli nelineinoi dinamiki i predel'noe sostoyanie proizvodstvennogo predpriyatiya* [Indicators of nonlinear dynamics and the limiting condition of a manufacturing enterprise]. *Ekonomika i predprinimatel'stvo* [Journal of Economy and entrepreneurship], 2018, no. 11, pp. 1237–1241 [in Russian].
4. Barysheva E.N., Saraev A.L., Saraev L.A. *Dinamicheskaya model' modernizatsii dvukhkomponentnogo promyshlennogo predpriyatiya* [Dynamic model of modernization of a two-component industrial enterprise]. *Matematika, ekonomika i upravlenie* [Mathematics, Economics and Management], 2015, Vol. 1, no. 1 (1), pp. 35–40 [in Russian].
5. Ilyina E.A., Saraev A.L., Saraev L.A. *K teorii modernizatsii proizvodstvennykh predpriyatii, uchityvayushchei zapazdyvanie vnutrennikh investitsii* [To the theory of modernization of manufacturing enterprises, taking into account the lag of domestic investment]. *Ekonomika i predprinimatel'stvo* [Journal of Economy and entrepreneurship], 2017, no. 9–4 (86), pp. 1130–1134 [in Russian].

*A.L. Saraev**

ECONOMIC AND MATHEMATICAL MODEL OF DEVELOPMENT DYNAMICS OF MANUFACTURING ENTERPRISE IN CONDITIONS OF DIGITALIZATION

The published article proposes a mathematical model of dynamics of the economic development of an enterprise in conditions of digital transformation, which is the process of integrating digital technologies into all aspects of the enterprise's activity and making fundamental changes in technologies, operations and ways of creating new products. The result of digital transformation of production capacity of an enterprise is the steady replacement of the new digital production of the old production. The balance equations for a two-component system of interacting two productions, which are described by related nonlinear differential equations, are established.

Various options for the economic development of enterprises, which digital transformation may be accompanied by a temporary slowdown in the growth rate of output and crisis phenomena are considered.

Key words: enterprise, digital technologies, factors of production, production function, production assets, resources, digital transformation.

Статья поступила в редакцию 11/II/2018.

The article received 11/II/2018.

* *Saraev Alexander Leonidovich* (alex.saraev@gmail.com), Department of Mathematics and Business-Informatics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.