

## АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ВЫХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ К ВОЗМУЩАЮЩИМ ВОЗДЕЙСТВИЯМ

В статье рассмотрены ориентированные графы, позволяющие решать широкий круг управленческих задач и находить оптимальные решения, которые в условиях воздействия возмущающих факторов могут нуждаться в определенной корректировке. Для определения такой корректировки разработан специальный аппарат анализа чувствительности, с помощью которого можно оценивать степень влияния возмущений на выходные характеристики графа.

**Ключевые слова:** ориентированный граф, анализ чувствительности, коэффициенты чувствительности, матрицы чувствительности, возмущающие воздействия, изменение выходных характеристик графа.

В настоящее время, когда производство все больше становится мелкосерийным и даже позаказным, предприятию для сохранения своей конкурентоспособности необходимо синхронизировать производственную деятельность в соответствии с запросами заказчиков, обеспечивая быструю реакцию системы управления производством, включающую подсистемы планирования и координации, на быстро меняющиеся предпочтения потребителей.

Известно, что функционированию сложных производственно-экономических систем присуще свойство активности, т. е. целенаправленного поведения отдельных исполнителей. Данное обстоятельство в совокупности с явлениями внешних возмущений, характерных для рыночной экономики, приводит к тому, что управленческие решения, принимаемые в определенный момент времени и оптимальные именно для этого момента времени, трансформируются при возникновении различных отклонений. Это относится в полной мере к классу управленческих задач, описываемых ориентированными графами [1, с. 12].

Ориентированный граф отображает план осуществления какого-либо проекта, который можно рассматривать как комплекс логически взаимосвязанных работ. Такие графические модели позволяют установить временную взаимосвязь и последовательность выполнения технологических операций, составить план изготовления заказа, выявить и устранить «узкие места» производства, количественно оценить имеющиеся резервы повышения эффективности бизнес-процессов и использовать их для сокращения длительности производственного цикла.

Ориентированный граф, как известно, строится с помощью двух элементов: событий и работ. События принято изображать кружками, а работы – стрелками. Каждому событию присваивается определенный номер ( $i$ ), проставляемый внутри кружка. Таким образом, каждая работа начинается с конкретного начального события ( $i$ ) и завершается также конкретным конечным событием ( $j$ ), поэтому работа получает двойной шифр ( $ij$ ). Над каждой работой, кроме фиктивной, проставлена длительность ее выполнения  $t$  ( $ij$ ) в выбранных единицах времени.

Изменение продолжительности отдельной работы, вызванное различными причинами (активность производственных элементов, возмущения внешней среды), влияет на сроки выполнения других работ и все выходные характеристики графа.

Апробированными и эффективными инструментами решения многих задач управления производством, рассматривающим сложный комплекс взаимосвязанных во времени работ и операций, служат ориентированные графы. Следует заметить, что функционирование организационной системы на стадии осуществления планов характеризуется достаточно большой неопределенностью, поскольку

---

\* © Голубева Т.В., 2017

Голубева Татьяна Владимировна (golubeva-tat.vl@yandex.ru), кафедра организации производства, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

на этом этапе действуют возмущающие внешние и внутренние факторы. В качестве таких факторов можно назвать: нарушение сроков поставки комплектующих, несвоевременное выполнение отдельных операций, брак в работе и необходимость его исправления. Под воздействием этих возмущающих факторов меняются длительности некоторых работ, что может вызвать необходимость корректировки ранее рассчитанных ключевых характеристик графа без их повторного перерасчета. Для повышения степени оперативности управления реализацией проекта встает задача быстро и объективно провести оценку воздействия возмущающих факторов. Для решения этой задачи может быть применена методология теории чувствительности [2, с. 14].

Постановка задачи анализа чувствительности ключевых характеристик ориентированного графа к влиянию возмущающих факторов может быть сформулирована следующим образом:

в условиях заданного времени выполнения работ проекта оценить количественные вариации выходных характеристик ориентированного графа в результате изменения в определенных пределах времени выполнения некоторых работ при сохранении известной топологии.

К ключевым характеристикам ориентированного графа относятся ранние  $X(j)$  и поздние  $Y(j)$  сроки свершения событий, полные  $R(i,j)$  и частные резервы работ первого  $R^1(i,j)$  и второго рода  $R^2(i,j)$ .

Полный резерв времени работы определяется как

$$R(ij) = Y(j) - X(i) - t(ij)$$

и характеризует резерв времени наибольшего пути, проходящего через данную работу. Экономический смысл полного резерва заключается в том, что он показывает наибольшее время, на которое можно задержать начало исполнения работы по сравнению с наиболее ранним ее началом, не изменяя срока окончания всего комплекса запланированных работ.

Частный резерв первого рода:

$$R^1(ij) = Y(j) - Y(i) - t(ij),$$

он является частью полного резерва работы, и эта часть может быть использована для увеличения продолжительности работы при условии, что такое увеличение не вызовет изменения позднего срока свершения начального события. Поскольку

$$R(ij) = R^1(ij) + R(i),$$

то частный резерв первого рода совпадает с полным резервом у работ, выходящих их событий, принадлежащих критическому пути.

Частный резерв второго рода

$$R^2(ij) = X(j) - X(i) - t(ij)$$

аналогично частному резерву первого рода определяется как часть полного резерва работы, и эта часть может быть использована для увеличения продолжительности работы при условии, что такое увеличение не вызовет изменения раннего срока свершения конечного события.

$$R(ij) = R^2(ij) + R(j).$$

Таким образом, частный резерв второго рода совпадает с полным резервом у работ, завершающихся в событиях, принадлежащих критическому пути.

Применим методологию теории чувствительности [3, с. 26] для того, чтобы оценить количественно воздействие вариаций времени выполнения отдельных операций на выходные характеристики ориентированного графа. Рассмотрим коэффициенты чувствительности раннего срока свершения  $j$ -го события к изменению продолжительности работы ( $lk$ ):

$$\alpha_j^{(lk)} = \frac{\partial X(j)}{\partial t(lk)}.$$

Применение созданного алгоритма определения коэффициентов чувствительности параметров графа к вариациям длительности работ [4, с. 72] помогло получить матрицы коэффициентов чувстви-

тельности, содержащие информацию, позволяющую оперативно оценивать влияние возмущений на выходные характеристики графа.

Общеизвестно, что у работ, принадлежащих критическому пути, все резервы времени равны нулю:

$$R(ij) = R^1(ij) = R^2(ij) = 0.$$

Если же работа принадлежит максимальному пути, проходящему через вершину, лежащую на критическом пути, то у этой работы один из частных резервов времени равен нулю: или  $R^1(ij) = 0$ , или  $R^2(ij) = 0$ .

Работы, не принадлежащие максимальному пути, имеют ненулевые резервы:

$$R(ij) \neq 0, R^1(ij) \neq 0, R^2(ij) \neq 0.$$

Исходя из этих соображений, можно предложить следующую классификацию работ ориентированного графа:

$$P_1 = \{(ij), \text{ у которых } R^1(ij) = 0\}$$

$$P_2 = \{(ij), \text{ у которых } R^1(ij) \neq 0\}$$

$$P_3 = \{(ij), \text{ у которых } R^2(ij) = 0\}$$

$$P_4 = \{(ij), \text{ у которых } R^2(ij) \neq 0\}$$

Каждая из работ может быть отнесена к одному из множеств вида:

$$P_i \cap P_j, \quad (i, j = \overline{1,4}).$$

Очевидно, что в проекте не могут присутствовать работы, принадлежащие множеству  $P_1 \cap P_2$  и множеству  $P_3 \cap P_4$ .

Степень влияния изменения продолжительности работ на выходные характеристики графа будет зависеть от того, к *какому* из множеств

$$P_1 \cap P_3, P_1 \cap P_4, P_2 \cap P_3, P_2 \cap P_4$$

принадлежат работы.

Изменение продолжительности любой из работ, принадлежащих множеству  $P_1 \cap P_3$ , приводит к изменению одновременно как поздних, так и ранних сроков свершения событий и работ, поскольку для каждой из этих работ справедливы следующие равенства:

$$X(j) - X(i) = t(ij),$$

$$Y(j) - Y(i) = t(ij).$$

Изменение продолжительности работ, принадлежащих множеству  $P_1 \cap P_4$ , вызовет изменение только поздних сроков свершения событий и работ, т. к. только для них справедливо равенство

$$Y(j) - Y(i) = t(ij).$$

Изменение продолжительности работ, принадлежащих к множеству  $P_2 \cap P_3$ , вызовет изменение только ранних сроков свершения событий и работ, поскольку только для них справедливо следующее равенство:

$$X(j) - X(i) = t(ij).$$

Изменение продолжительности работ, принадлежащих к множеству  $P_2 \cap P_4$ , вызовет изменение только резервов времени у этих работ.

Определим изменение ранних сроков свершения событий в результате изменения продолжительности работ, у которых  $R^2(ij) = 0$ , т. е. установим влияние на алгебраическую систему:

$$X(j) - X(i) = t(ij), \quad (i, j = \overline{1, n}) \tag{1}$$

изменения продолжительности работ из множества:

$$(i, j) \in (P_1 \cap P_3) \cup (P_2 \cap P_3). \tag{2}$$

Систему (1) в матричном виде можно представить так:

$$AX = t. \tag{3}$$

Последовательно продифференцируем систему (3) по всем работам, принадлежащим к множеству (2). В результате дифференцирования получим матрицу чувствительности ранних сроков свершения событий:

$$\alpha = \frac{\partial X}{\partial t} = A^{-1}.$$

Строки матрицы  $\alpha$  можно рассматривать как векторы чувствительности к изменению длительности определенной работы графа. А элементами вектора чувствительности выступают коэффициенты чувствительности ранних сроков всех событий проекта к вариациям длительности данной работы. Элементы этой матрицы принимают значения, равные 1 или 0, означающие влияние или не влияние продолжительности определенной работы на ранний срок свершения конкретного события [5, с. 20].

Если предположить, что продолжительность работы  $t(ij)$  изменится на величину  $\Delta t(ij)$ , то изменение всех ранних сроков наступления событий  $\Delta X$  будет определяться следующим уравнением:

$$\Delta X = \alpha^{(ij)} \cdot \Delta t(ij).$$

При одновременном изменении продолжительности нескольких работ изменение величины ранних сроков можно определить так:

$$\Delta X = \sum_{(ij)} \alpha^{(ij)} \cdot \Delta t(ij). \quad (4)$$

Здесь суммирование проводится по всем работам, продолжительность которых изменилась на  $\Delta t$ .

Определим чувствительность поздних сроков свершения событий проекта к вариациям продолжительности работ. На поздние сроки окажут влияние длительности тех работ, для которых справедливы равенства:

$$Y(j) - Y(i) = t(ij) \quad (i, j = \overline{1, n}).$$

Эти работы принадлежат множеству

$$(i, j) \in (P_1 \cap P_3) \cup (P_1 \cap P_4) \quad (5)$$

Для удобства запишем систему в матричном виде:

$$BY = t.$$

Дифференцируя ее последовательно по времени выполнения работ, принадлежащих множеству (5), получим матрицу чувствительности поздних сроков наступления событий:

$$\beta = \frac{\partial Y}{\partial t} = B^{-1}.$$

Эта матрица характеризует влияние единичного изменения продолжительности каждой работы на все поздние сроки наступления событий. Элементы матрицы чувствительности поздних сроков могут принимать значения, равные 0 или 1, или  $-1$ . Значение  $-1$  будут принимать коэффициенты чувствительности к вариациям длительности некритических работ, определяющих соответствующий поздний срок, но при этом принадлежащих наибольшему пути, ведущему от данного события к завершающему.

Изменения поздних сроков свершения событий может быть найдено на основе сформированной матрицы чувствительности  $\beta$  по формуле:

$$\Delta Y = \beta^{(ij)} \cdot \Delta t(ij). \quad (6)$$

Если одновременно происходят изменения продолжительности нескольких работ, формула (6) видоизменяется и выглядит так:

$$\Delta Y = \sum_{(ij)} \beta^{(ij)} \cdot \Delta t(ij). \quad (7)$$

Оценим чувствительность полных резервов работ к вариациям продолжительности работ проекта. Для этого уравнения полных резервов

$$R(ij) = Y(j) - X(i) - t(ij) \quad (i, j = \overline{1, n})$$

продифференцируем по продолжительности работ. В результате получим:

$$\frac{\partial R(ij)}{\partial t} = \beta(j) - \alpha(i) - \frac{\partial t(ij)}{\partial t}.$$

Если за  $\gamma_{(ij)}^{(lk)}$  обозначить чувствительность полного резерва работы (ij) к изменению продолжительности работы (lk), то

$$\gamma_{(ij)}^{(lk)} = \beta(j) - \alpha(i) - \frac{\partial t(ij)}{\partial t(lk)}.$$

Отсюда следует, что матрица чувствительности  $\gamma$  полных резервов работ может быть составлена по ранее рассчитанным матрицам чувствительности ранних  $\alpha$  и поздних  $\beta$  сроков свершения событий.

Воздействие возмущающих факторов на изменения полных резервов можно установить с помощью уравнений:

$$\Delta R = \gamma^{(ij)} \cdot \Delta t(ij).$$

$$\Delta R = \sum_{(ij)} \gamma^{(ij)} \cdot \Delta t(ij). \quad (8)$$

Допустимая область изменения продолжительностей работ  $\Delta t$  должна удовлетворять следующим условиям:

$$R + \Delta R = R + \sum_{(ij)} \gamma^{(ij)} \cdot \Delta t(ij) \geq 0.$$

Предложенные модели анализа чувствительности ориентированного графа позволяют в условиях воздействия возмущающих факторов объективно, быстро и с высокой степенью надежности обосновывать принимаемые управленческие решения относительно всех промежуточных и конечных сроков выполнения производственного заказа, исключая их пересчет.

### Библиографический список

1. Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А. Теория графов в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2001. 115 с.
2. Томович Е., Вукобратович М. Общая теория чувствительности. М.: Советское радио, 1972. 238 с.
3. Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. Чувствительность систем управления. М.: Наука, 1981. 120 с.
4. Голубева Т.В. Модели и методы повышения эффективности производства на основе оптимизации длительности производственного цикла с использованием аппарата теории чувствительности (на примере краностроительного предприятия ОАО «Сокол»): дис. ... канд. экон. наук: 08.00.13 – математические и инструментальные методы экономики / Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С.П. Королева. Самара, 2004. 154 с.
5. Голубева Т.В. Модели и методы повышения эффективности производства на основе оптимизации длительности производственного цикла с использованием аппарата теории чувствительности (на примере краностроительного предприятия ОАО «Сокол»): автореф. дис. ... канд. экон. наук: 08.00.13 – математические и инструментальные методы экономики / Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С.П. Королева. Самара, 2004. 24 с.

## References

1. Burkov V.N., Zalognev A.U., Novikov D.A. Teoriya grafov v upravlenii organizatsionnymi sistemami [Graph theory in management of organizational systems]. M.: Sinteg, 2001, 115 p. [in Russian].
2. Tomovich E., Vukobratovich M. Obshchaya teoriya chuvstvitel'nosti [The general theory of sensitivity]. M.: Soviet radio, 1972, 238 p. [in Russian].
3. Rozenvasser E.N., Yusupov R.M. Chuvstvitel'nost' sistem upravleniya [Sensitivity of control system]. M.: Science, 1981, 120 p. [in Russian].
4. Golubeva T.V. Modeli i metody povysheniya effektivnosti proizvodstva na osnove optimizatsii dlitel'nosti proizvodstvennogo tsikla s ispol'zovaniyem apparata teorii chuvstvitel'nosti (na primere kranostroitel'nogo predpriyatiya OAO «Sokol») [Models and methods of increase effectiveness production based on optimization throughput time with usage methods theory of sensitivity (by the example of plug-building enterprise «Falcon»)]. PhD economics thesis. Samara, SSAU, 2004, 154 p. [in Russian].
5. Golubeva T.V. Modeli i metody povysheniya effektivnosti proizvodstva na osnove optimizatsii dlitel'nosti proizvodstvennogo tsikla s ispol'zovaniyem apparata teorii chuvstvitel'nosti (na primere kranostroitel'nogo predpriyatiya OAO «Sokol») [Models and methods of increase effectiveness production based on optimization throughput time with usage methods theory of sensitivity(the example of plug-building enterprise «Falcon»)]. Abstract of a thesis candidate economic science, Samara, SSAU, 2004, 24 p. [in Russian].

*T.V. Golubeva\**

### THE SENSITIVITY ANALYSIS OF OUTPUT CHARACTERISTIC ORIENTED GRAPH TO PERTURBATION ACTION

In this article oriented graph to solve wide circle of problem and to find optimal solutions which can be need in determined correction by impact of defined factors is viewed. Author developed a special mechanism of sensitivity analysis for correction and rating of impact disturbance to output characteristics graph.

**Key words:** oriented graph, sensitivity analysis, sensitivity index, sensitivity matrix, perturbation action, variation of output characteristic graph.

Статья поступила в редакцию 2/1/2017.

The article received 2/1/2017.

---

\* Golubeva Tatyana Vladimirovna (egolubeva-tat.vl@yandex.ru), Department of Production Management, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.