**Сараев А.Л., Сараев Л.А.**
*К расчету стохастических кривых динамики развития предприятий // Вестник Самарского университета. Экономика и управление. 2016. № 1. С. 136–142.*



УДК 330.101.54

***А.Л. Сараев, Л.А. Сараев****

# К РАСЧЕТУ СТОХАСТИЧЕСКИХ КРИВЫХ ДИНАМИКИ РАЗВИТИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ

В статье предложена однофакторная математическая модель стохастической динамики развития предприятия. Уравнения баланса этой системы описывают случайный процесс непрерывного и распределенного увеличения выпуска продукции фактора производства

Показано, что учет в предложенной модели внешнего случайного возмущающего фактора приводит к существенным отклонениям от классической детерминированной модели плавного развития предприятия.

***Ключевые слова:*** предприятие, факторы производства, производственная функция, выпуск продукции, ресурсы, стохастические уравнения, винеровский процесс, коэффициент сноса, коэффициент волатильности.

Рассмотрим некоторое производственное предприятие, выпуск готовой продукции которого обеспечивается одним ресурсом в виде некоторого объема фактора производства $Q$. Этот объем может составлять основной капитал, производственные фонды, привлекаемые в производство трудовые ресурсы, используемые в производстве материалы, применяемые технологии, различного рода инновации и т. д. [1 – 4].

В самом общем случае величина $Q = Q(t)$ является случайной, непрерывной, непрерывно дифференцируемой и ограниченной на числовой полуоси $(0 < t < \infty)$ функцией времени. Переменная времени $t$ предполагается непрерывной, единицей ее измерения служит соответствующий обстоятельствам рыночный период (месяц, квартал, год). Функция $Q = Q(t)$ удовлетворяет неравенству

$$Q_0 < Q(t) < Q_\infty .$$

Здесь $Q_0 = Q(0)$ – начальное значение фактора производства, $Q_\infty = \lim\limits_{t \to \infty} Q(t)$ – его предельное значение.

Выпуск продукции предприятия $V$ обеспечивается степенной производственной функцией Кобба–Дугласа [5]

$$V = P \cdot Q^a . \tag{1}$$

Здесь показатель степени $a$ представляет собой эластичность выпуска $(0 < a < 1)$, $P$ – стоимость продукции, произведенной на единичный объем ресурса.

---



*Сараев Александр Леонидович* (alex.saraev@gmail.com), *Сараев Леонид Александрович* (saraev.LEO@gmail.com), кафедра математики и бизнес-информатики, Самарский университет, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Предельное значение производственной функции в бесконечно удаленной точке $(t \to \infty)$ имеет вид

$$V_\infty = P \cdot (Q_\infty)^a. \tag{2}$$

Подстановка формулы (2) в формулу (1) позволяет записать производственную функцию в виде

$$V = V_\infty \cdot \left(\frac{Q}{Q_\infty}\right)^a = V_\infty \cdot q^a. \tag{3}$$

Здесь $q = \dfrac{Q}{Q_\infty}$ – безразмерный фактор производства $(0 \le q \le 1)$.

Приращение объема фактора производства $\Delta Q$ за некоторый малый промежуток времени $\Delta t$ образуется из трех компонентов

$$\Delta Q = \Delta_\alpha Q + \Delta_\beta Q + \Delta_w Q. \tag{4}$$

Здесь $\Delta_\alpha Q$ – частичная амортизация фактора производства, $\Delta_\beta Q$ – частичное восстановление фактора производства за счет внутренних эндогенных инвестиций, $\Delta_w Q$ – случайные колебания приращения объема фактора производства, обусловленные волатильностью реализации выпускаемой продукции.

Приращение частичной амортизации $\Delta_\alpha Q$ за промежуток времени $\Delta t$ можно представить в виде

$$\Delta_\alpha Q = -\alpha \cdot Q \cdot \left(1 - \frac{Q}{Q_\infty}\right) \cdot \Delta t. \tag{5}$$

Здесь $\alpha$ – доля выбывшего за единицу времени объема фактора производства. Приращение внутренних эндогенных инвестиций $\Delta_\beta Q$ за промежуток времени $\Delta t$ определяется соотношением

$$\Delta_\beta Q = \beta \cdot V \cdot \left(1 - \frac{Q}{Q_\infty}\right) \cdot \Delta t. \tag{6}$$

Здесь $\beta$ – норма накопления внутренних эндогенных инвестиций. Случайные колебания приращения объема фактора производства $\Delta_w Q$, обусловленные волатильностью реализации выпускаемой продукции, представляют собой стохастический фактор стандартного винеровского процесса

$$\Delta_w Q = \sigma \cdot (Q - Q_0) \cdot \left(1 - \frac{Q}{Q_\infty}\right) \cdot \Delta w. \tag{7}$$

Здесь $w$ – стандартный винеровский процесс, $\Delta w = \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta t}$, $\sigma$ – волатильность рынка, $\varepsilon \sim N(0,1)$ – случайная величина с нормальным законом распределения, средним значением $\langle \varepsilon \rangle = 0$ и единичной дисперсией $\langle \varepsilon^2 \rangle = 1$. Таким образом, формула (4) принимает вид

$$\Delta Q = (-\alpha \cdot Q + \beta \cdot V) \cdot \left(1 - \frac{Q}{Q_\infty}\right) \cdot \Delta t + \sigma \cdot (Q - Q_0) \cdot \left(1 - \frac{Q}{Q_\infty}\right) \cdot \Delta w. \tag{8}$$

Предельный переход $\Delta t \to 0$ приводит к стохастическому дифференциальному уравнению [2–6]

$$dQ = \left(-\alpha \cdot Q + \beta \cdot V\right) \cdot \left(1 - \frac{Q}{Q_\infty}\right) \cdot d\,t + \sigma \cdot \left(Q - Q_0\right) \cdot \left(1 - \frac{Q}{Q_\infty}\right) \cdot d\,w \,. \tag{9}$$

Замена переменной $q = \dfrac{Q}{Q_\infty}$ в уравнении (9) приводит к безразмерному уравнению диффузии Ито

$$dq = A(q) \cdot dt + B(q) \cdot d\,w. \tag{10}$$

Здесь

$$A(q) = \left(-\alpha \cdot q + \eta \cdot q^a\right) \cdot (1 - q) \tag{11}$$

– коэффициент сноса,

$$B(q) = \sigma \cdot \left(q - q_0\right) \cdot (1 - q) \tag{12}$$

– коэффициент волатильности, $\eta = \beta \cdot \dfrac{V_\infty}{Q_\infty}$, $q_0 = \dfrac{Q_0}{Q_\infty}$. Начальное условие для уравнения (10) имеет вид

$$q\big|_{t=0} = q_0 \,. \tag{13}$$

Численное решение уравнения (11) с начальным условием (13) выполняется методом последовательных приближений в соответствии с алгоритмом

$$q_{s+1} = q_s + A\left(q_s\right) \cdot \Delta t + B\left(q_s\right) \cdot \varepsilon_s \cdot \sqrt{\Delta t} \,. \tag{14}$$

В любом варианте реализации алгоритма (12) на каждом малом временном шаге $\Delta t$, начиная с начального значения, генерируется случайное число $\varepsilon_s$ и рассчитывается последующее значение $q_{s+1}$. В результате образуются две случайные последовательности $\{t_s\}$ и $\{q_s\}$, которые на координатной плоскости образуют систему точек $\{t_s, q_s\}$ и соответствующую ей фрактальную линию. Всякий раз при повторении реализации алгоритма (12) образуется новая ломаная линия, поскольку каждый раз случайная величина $\varepsilon$ генерирует новые случайные значения.

На рис. 1 представлены численные реализации решений алгоритма (12) в виде семейства стохастических линий.

В численных расчетах временной интервал $t \in [0,10]$ был разбит на $n = 200$ частей и величина шага была принята $\Delta t = 0,05$. Число реализаций случайного процесса динамики предприятия было выбрано $m = 20$. На рис. 1. показано только десять из них. Расчетные значения: $Q_0 = 200$, $Q_\infty = 1000$, $V_\infty = 2000$, $a = 0.65$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.3$, $\sigma = 0.25$.

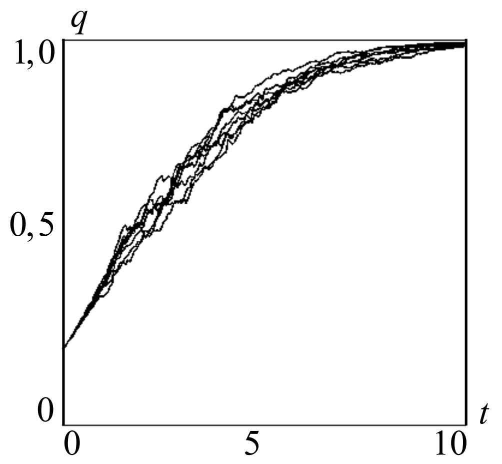


Рис. 1

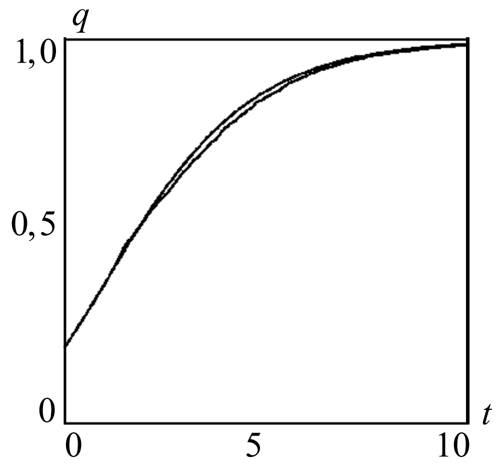


Рис. 2

Следует отметить, что в начальной точке $t = 0$ и в точках, близких к процессу насыщения $t \approx 10$, стохастический процесс становится практически детерминированным, что является вполне ожидаемым и определяется видом функции волатильности $B(q) = \sigma \cdot (q - q_0) \cdot (1 - q)$.

Вид этой функции не позволяет в полной мере воспользоваться формулой Ито и найти точное решение для среднего значения функции $q(t)$. При статистическом осреднении уравнения (10)

$$d\langle q\rangle = \langle A(q)\rangle \cdot dt = \left\langle \left(-\alpha \cdot q + \eta \cdot q^{a}\right) \cdot (1 - q)\right\rangle \cdot dt, \qquad (15)$$

получается уравнение, содержащее статистические моменты:

$$\frac{d\langle q\rangle}{d\,t} = -\alpha \cdot \langle q\rangle + \alpha \cdot \left\langle q^2 \right\rangle + \eta \cdot \left\langle q^{a} \right\rangle - \eta \cdot \left\langle q^{a+1} \right\rangle. \qquad (16)$$

Процесс вычисления статистических моментов вида $\left\langle q^{b} \right\rangle$ последовательно приводит к появлению моментов более высоких порядков, для которых образуется бесконечная цепочка статистических уравнений, которую необходимо оборвать, сделав определенные допущения.

В рассматриваемом случае естественно предположить, что флуктуации величины $q$ от среднего значения пропорциональны случайной величине $\varepsilon$:

$$q = \langle q\rangle + \xi \cdot \varepsilon. \qquad (17)$$

Здесь $\xi = \sigma \cdot (\langle q\rangle - q_0) \cdot (1 - \langle q\rangle)$ – коэффициент пропорциональности. Тогда формула для величины $q^2$ принимает вид

$$q^2 = \langle q\rangle^2 + 2 \cdot \xi \cdot \varepsilon + \xi^2 \cdot \varepsilon^2. \qquad (18)$$

В формуле для произвольной степени

$$q^b = \left(\langle q \rangle + \xi \cdot \varepsilon\right)^b = \langle q \rangle^b \cdot \left(1 + \xi \cdot \frac{\varepsilon}{\langle q \rangle}\right)^b$$

ограничимся тремя слагаемыми биномиального ряда

$$q^b = \langle q \rangle^b \cdot \left(1 + b \cdot \xi \cdot \frac{\varepsilon}{\langle q \rangle} + \frac{b \cdot (b-1)}{2} \cdot \xi^2 \cdot \frac{\varepsilon^2}{\langle q \rangle^2} + \ldots\right) \tag{19}$$

Подставляя средние величины

$$\left\langle q^2 \right\rangle = \langle q \rangle^2 + \xi^2,$$

$$\left\langle q^a \right\rangle = \langle q \rangle^a \cdot \left(1 + \frac{a \cdot (a-1)}{2} \cdot \frac{\xi^2}{\langle q \rangle^2}\right),$$

$$\left\langle q^{a+1} \right\rangle = \langle q \rangle^{a+1} \cdot \left(1 + \frac{a \cdot (a+1)}{2} \cdot \frac{\xi^2}{\langle q \rangle^2}\right)$$

в уравнение (16), находим

$$\frac{d\langle q \rangle}{dt} = -\alpha \cdot \langle q \rangle + \alpha \cdot \left(1 + \frac{\xi^2}{\langle q \rangle^2}\right) \cdot \langle q \rangle^2 + \\ + \eta \cdot \langle q \rangle^a \cdot \left(1 - \langle q \rangle + \frac{a}{2} \cdot \left((a-1) - (a+1) \cdot \langle q \rangle\right) \cdot \frac{\xi^2}{\langle q \rangle^2}\right). \tag{20}$$

Сравнение численного решения уравнения (20) и среднего значения вычисленного для всех реализаций алгоритма (14) приведено на рис. 2.

Численный анализ показывает практическое совпадение результатов расчета по формуле (14) − нижняя кривая и формуле (20) − верхняя кривая.

На рис. 3 представлены кривые реализации случайного процесса с кривой для среднего значения процесса.

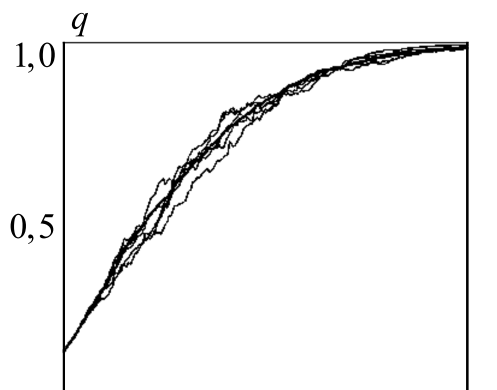


Рис. 3

В случае если волатильность обращается в нуль $\sigma = 0$ и процесс становится детерминированным, полученные результаты совпадают с результатами работы [2].

**Библиографический список**

1. Соловьев В.И. Экономико-математическое моделирование рынка программного обеспечения. М.: Вега-Инфо, 2009. 176 с.

2. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Особенности динамики выпуска продукции и производственных факторов модернизируемых предприятий // Вестник Самарского государственного университета. 2014. № 6(117). С. 251–260.

3. Сараев А.Л. Уравнения динамики экономического развития предприятия, модернизирующего производственные технологии // Основы экономики, управления и права. 2014. № 3(15). С. 93–100.

4. Сараев А.Л. Уравнения нелинейной динамики кризисных явлений для многофакторных экономических систем // Вестник Самарского государственного университета. 2015. № 2(124). С. 262–272.

5. Егорова А.Ю., Сараев А.Л., Сараев Л.А. Вариант динамической модели переоборудования производственного предприятия, учитывающей эффект запаздывания внутренних инвестиций // Вестник Самарского государственного университета. 2015. № 5(127). С. 210–216.

**References**

1. Soloviev V.I. Ekonomiko-matematicheskoe modelirovanie rynka programmnogo obespecheniia [Economic and mathematical modeling of the software market]. Moscow: izdatel'stvo Vega-Info, 2009, 176 p. [in Russian].

2. Saraev A.L., Saraev L.A. Osobennosti dinamiki vypuska produktsii i proizvodstvennykh faktorov moderniziruemykh predpriiatii [Peculiarities of dynamics of issue of production and production factors of modernized enterprises]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2014, no. 6(117), pp. 251–260 [in Russian].

3. Saraev A.L. Uravneniia dinamiki ekonomicheskogo razvitiia predpriiatiia, moderniziruiushchego proizvodstvennye tekhnologii [Equations of dynamics of economic development of an enterprise modernizing production technologies]. *Osnovy ekonomiki, upravleniia i prava* [Foundations of Economics, Management and Law], 2014, no. 3(15), pp. 93–100 [in Russian].

4. Saraev A.L. Uravneniia nelineinoi dinamiki krizisnykh iavlenii dlia mnogofaktornykh ekonomicheskikh sistem [Equations of nonlinear dynamics of crisis events for multifactor economic systems]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2015, no. 2(124), pp. 262–272 [in Russian].

5. Egorova A.Yu., Saraev A.L., Saraev L.A. Variant dinamicheskoi modeli pereoborudovaniia proizvodstvennogo predpriiatiia, uchityvaiushchei effekt zapazdyvaniia vnutrennikh investitsii [Variant of dynamic model of reequipment of an industrial enterprise that takes into consideration the effect of retardation of domestic investments]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2015, no. 5(127), pp. 210–216 [in Russian].

***A.L. Saraev, L.A. Saraev****

## ON THE CALCULATION OF STOCHASTIC CURVES OF DYNAMICS OF DEVELOPMENT OF ENTERPRISES

In the published article the mathematical model of single-factor stochastic dynamics of enterprise development is suggested. The equations of balance of the system describe a random process of continuous and increasing output of distributed production factor.

It is shown that the inclusion in the proposed model of a random external disturbance factor leads to a significant departure from the classical deterministic model of smooth development of an enterprise.

***Key words:*** enterprise, production factors, production function, output, resources, stochastic equations, Wiener process, drift coefficient, volatility coefficient.

Статья поступила в редакцию 7/II/2016.
The article received 7/II/2016.

* *Saraev Alexander Leonidovich* (alex.saraev@gmail.com), *Saraev Leonid Alexandrovich* (saraev.LEO@gmail.com), Department of Mathematics and Business-Informatics, Samara University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.