МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ЭКОНОМИКИ

УДК 330.4

О.В. Павлов*

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПЛАНИРОВАНИЯ ОБЪЕМОВ ПРОИЗВОДСТВА В ПРОЕКТАХ ОСВОЕНИЯ НОВОЙ ПРОДУКЦИИ

В статье рассматриваются динамические задачи планирования производства для одного и нескольких подразделений промышленного предприятия с учетом эффекта обучения. Проблема математически формализуется как задача оптимального управления дискретной системой. Получены численные решения сформулированных задач для различных моделей кривых обучения с помощью метода динамического программирования Беллмана. Приводится исследование влияния индекса обучения на оптимальные решения задач.

Ключевые слова: освоение новой продукции, эффект кривой обучения, динамическое программирование.

Введение

В проектах по освоению новой продукции на промышленных предприятиях проявляется эффект кривой обучения, который заключается в том, что затраты времени работников на выполнение многократно повторяющихся производственных задач снижаются. Впервые эффект кривой обучения был замечен Т. Райтом [1]. При каждом удвоении кумулятивного объема производства затраты времени на его производство снижаются на 10–20 процентов. Под кумулятивным объемом производства понимается количество изделий, изготовленных с начала производства продукции нарастающим итогом.

Исследованию феномена кривой обучения и построению различных моделей, количественно описывающих снижение удельных затрат на выполнение производственных операций с увеличением кумулятивного объема производства посвящено большое количество научных публикаций, в основном иностранных. Наиболее полно обзор, обсуждение и сравнение различных моделей кривых обучения представлены в научных публикациях [2–4].

Снижение удельных затрат (себестоимости, трудоемкости) при увеличении кумулятивного объема производства делает актуальными постановки задач динамической оптимизации. Целью данной работы является поиск оптимального распределения объемов производства для одного и нескольких подразделений предприятия по временным периодам с учетом эффекта кривой обучения при заданных ограничениях.

Постановка задач планирования объемов производства для одного подразделения предприятия

Динамика производственной деятельности подразделения в период освоения новой продукции описывается дискретным уравнением:

Павлов Олег Валерьевич (pavlov@ssau.ru), заместитель директора института экономики и управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

$$x_t = x_{t-1} + u_t,\ \ t = \overline{1,T}, \tag{1}$$

где x_t – кумулятивный объем производства за t-й временной период, t – номер временного периода, u_t – объем производства в периоде t, T – число рассматриваемых периодов производственной деятельности (горизонт планирования). Выбор объема производства u_t в периоде t является управлением менеджмента предприятия.

Известно количество продукции уже произведенное подразделением до начала проекта (начальный производственный опыт):

$$x_0 = X_0. \tag{2}$$

В конечный период кумулятивный объем произведенной продукции должен быть равен заданному производственному заданию:

$$x_T = X_0 + R, \tag{3}$$

где R – заданное количество продукции.

На объем производства в каждом периоде t наложены следующие ограничения:

$$0 \le u_t \le X_0 + R - x_{t-1},\ \ t = \overline{1,T}. \tag{4}$$

Затраты в периоде t определяются как произведение удельных затрат продукции c_t и объема производства в этом периоде u_t:

$$C_t = c_t u_t. \tag{5}$$

Динамика изменения удельных затрат на производство продукции от кумулятивного объема производства описывается различными моделями кривой обучения. Наиболее типичными моделями являются степенная, экспоненциальная и логистическая, описанные в научной литературе [1]–[4].

Степенная модель удельных затрат:

$$c_t = a x_{t-1}^{-b}., \tag{6}$$

где a – затраты на производство первого изделия, b – индекс обучения.

Индекс обучения характеризует темп снижения удельных затрат продукции при увеличении кумулятивного объема производства (скорость обучения подразделения).

Экспоненциальная модель удельных затрат:

$$c_t = k + \beta e^{-\alpha x_{t-1}}. \tag{7}$$

где α – индекс обучения, k, β – параметры экспоненциальной модели.

Логистическая модель удельных затрат:

$$c_t = c_{\min} + (c_{\max} - c_{\min})\left[\frac{1}{1+\beta e^{\alpha x_{t-1}}}\right], \tag{8}$$

где $c_{\min}$, $c_{\max}$ – минимальные и максимальные значения удельных затрат на производство изделия, α – индекс обучения, β – параметр логистической модели.

Целевой функцией менеджмента предприятия является минимизация затрат подразделения за все временные периоды:

$$J = \sum_{t=1}^{T} c_t u_t \to \min. \tag{9}$$

Задача заключается в поиске оптимальных объемов производства u_t^{opt}, $t = \overline{1,n}$ удовлетворяющих ограничению (4), которые осуществляют перевод производственного процесса (1) из начального состояния (2) в конечное состояние (3) и минимизируют затраты за все временные периоды (9).

Для численного решения сформулированной задачи применялся метод динамического программирования Беллмана [5–6], реализованный в среде программирования Free pascal.

Результаты решения задачи планирования производства для одного подразделения

Численное решение задачи планирования объемов производства для одного подразделения проведено на примере производства новых изделий предприятия АО «Салют». По данным предприятия построены регрессионные модели трудоемкости новых изделий: «Кассета», «Балка» и «Отсек».

Трудоемкость производства изделия «Кассета» описывается степенной моделью:

$$c_t = 42{,}64\, x_{t-1}^{-0{,}29}.$$

Трудоемкость производства изделия «Балка» описывается экспоненциальной моделью:

$$c_t = 9{,}17 + 6{,}16 e^{-0{,}0169 x_{t-1}}.$$

Трудоемкость производства изделия «Отсек» описывается логистической моделью:

$$c_t = 55{,}10 + 36{,}61 \left[\frac{1}{1 + 0{,}017 e^{0{,}0561 x_{t-1}}} \right].$$

Для исследования использовались следующие данные: заданный объем производства изделий R = 240 шт., количество временных периодов T = 12 месяцев, производственный опыт подразделения до первого периода $x_0 = 1$ шт. При проведении численных расчетов дискретный шаг изменения объемов производства выбирался 1 изделие.

Численные решения задачи для степенной, экспоненциальной и логистической модели кривой обучения представлены на рис. 1–6. На рисунках представлены зависимости оптимальных кумулятивных объемов производства и оптимальных объемов производства от временных периодов.

Анализируя рис. 1–4, приходим к выводу, что для степенной и экспоненциальной моделей кривых обучения оптимальной траекторией кумулятивного объема производства является выпуклая кривая. Оптимальной стратегией менеджмента предприятия является увеличение объемов производства изделия от минимального значения в первом периоде до максимального в последнем периоде.

Из анализа рис. 5–6 приходим к выводу, что для логистической модели кривой обучения оптимальной траекторией кумулятивного объема производства является логистическая кривая. Оптимальной стратегией менеджмента предприятия является сначала уменьшение объемов производства до минимального значения, а затем увеличение объемов производства до максимального значения.

Рис. 1. Оптимальный кумулятивный объем производства для степенной модели кривой обучения

Рис. 2. Оптимальные объемы производства для степенной модели кривой обучения

Рис. 3. Оптимальный кумулятивный объем производства для экспоненциальной модели кривой обучения

Рис. 4. Оптимальные объемы производства для экспоненциальной модели кривой обучения

Рис. 5. Оптимальный кумулятивный объем производства для логистической модели кривой обучения

Рис. 6. Оптимальные объемы производства для логистической модели кривой обучения

Влияние индекса обучения на оптимальные кумулятивные объемы и оптимальные объемы производства для различных моделей кривой обучения представлено на рис. 7–14.

Анализируя рис. 7, приходим к выводу, что с увеличением индекса обучения для степенной модели кривой обучения оптимальная траектория кумулятивного объема производства становится более выпуклой. Из анализа рис. 8 делаем вывод, что с увеличением индекса обучения объемы производства значительно увеличиваются в последних двух периодах и уменьшаются во всех остальных. Чем больше индекс обучения, тем больший рост объемов производства в последних периодах.

Анализируя рис. 9, приходим к выводу, что с увеличением индекса обучения для экспоненциальной модели кривой обучения оптимальная траектория кумулятивного объема производства становится более выпуклой. Из анализа рис. 10 делаем вывод, с увеличением индекса обучения объемы производства значительно увеличиваются в последнем периоде и уменьшаются во всех остальных. Чем больше индекс обучения, тем больший рост объемов производства в последнем периоде. Экспоненциальная модель характеризуется большей неравномерностью распределения оптимальных объемов производства по временным периодам по сравнению со степенной.

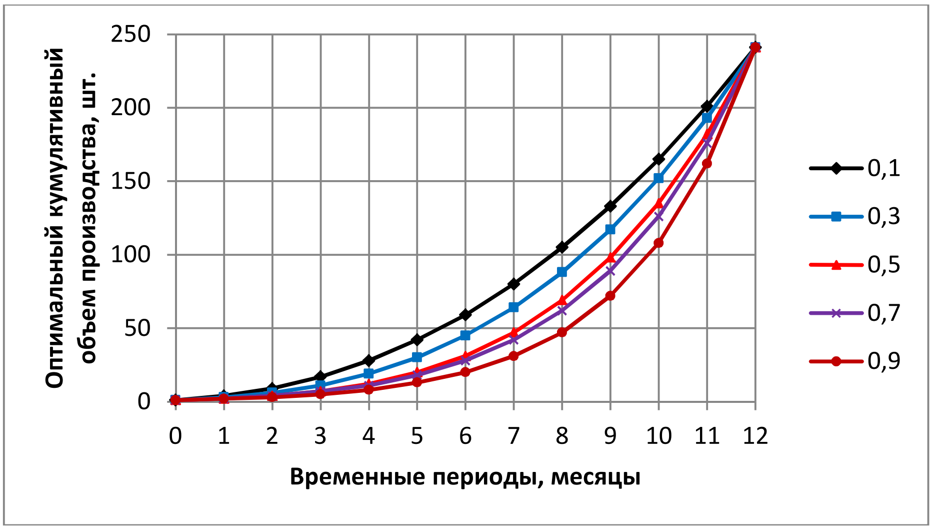

Рис. 7. Зависимость оптимального кумулятивного объема производства от индекса обучения для степенной модели кривой обучения

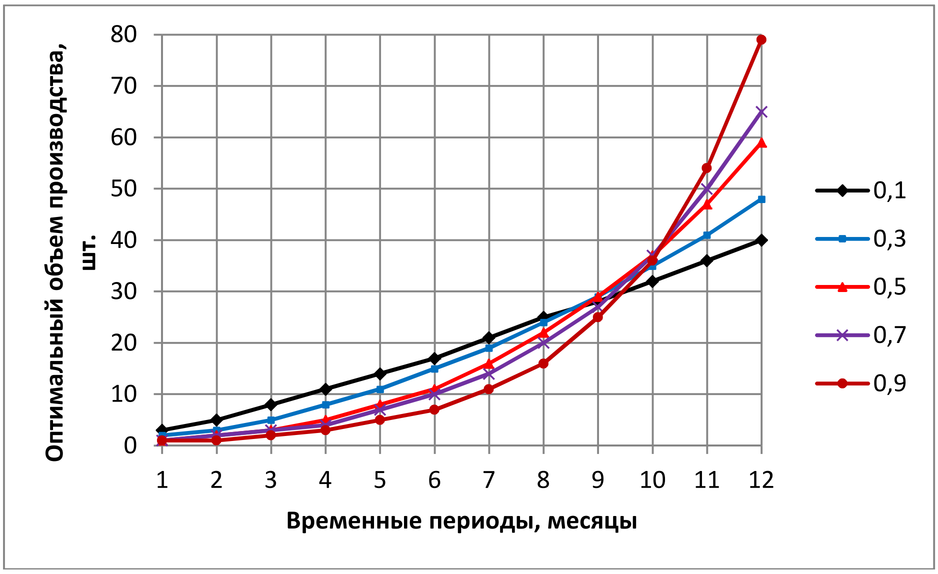

Рис. 8. Зависимость оптимальных объемов производства от индекса обучения для степенной модели кривой обучения

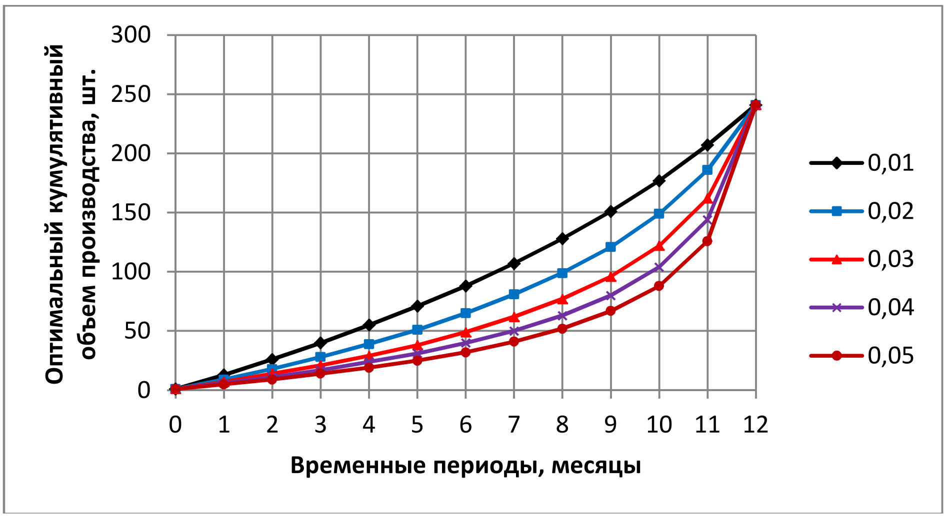

Рис. 9. Зависимость оптимального кумулятивного объема производства от индекса обучения для экспоненциальной модели кривой обучения

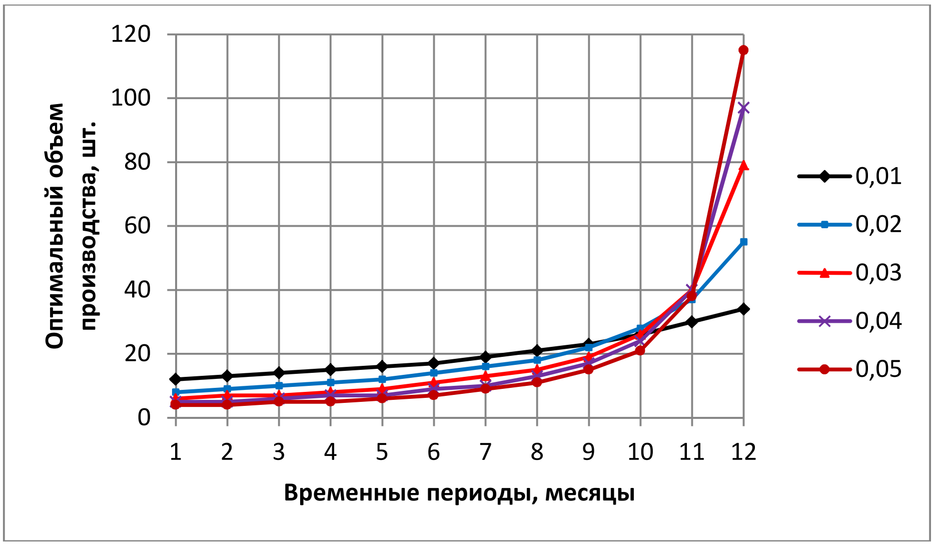

Рис. 10. Зависимость оптимальных объемов производства от индекса обучения
для экспоненциальной модели кривой обучения

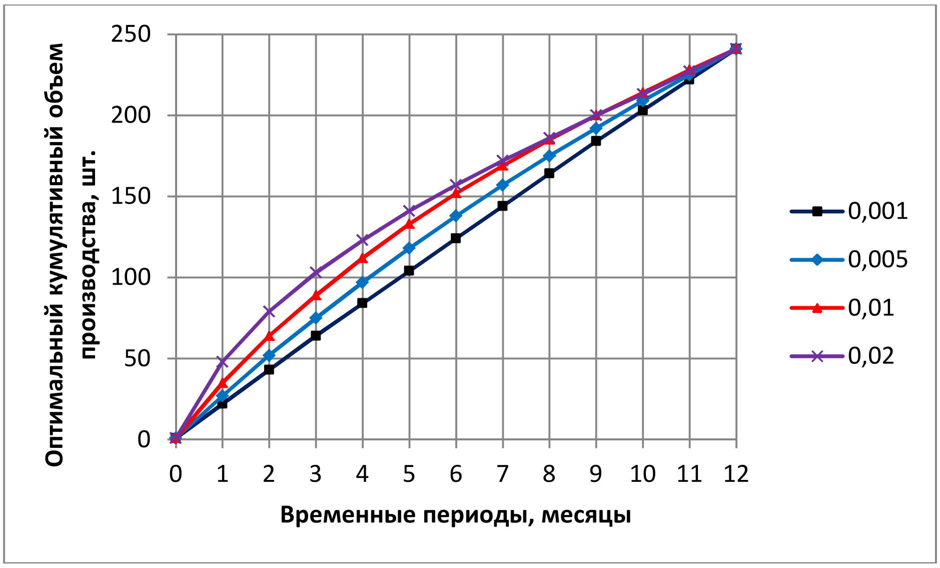

Рис. 11. Зависимость оптимального кумулятивного объема производства от индекса обучения
для логистической модели кривой обучения

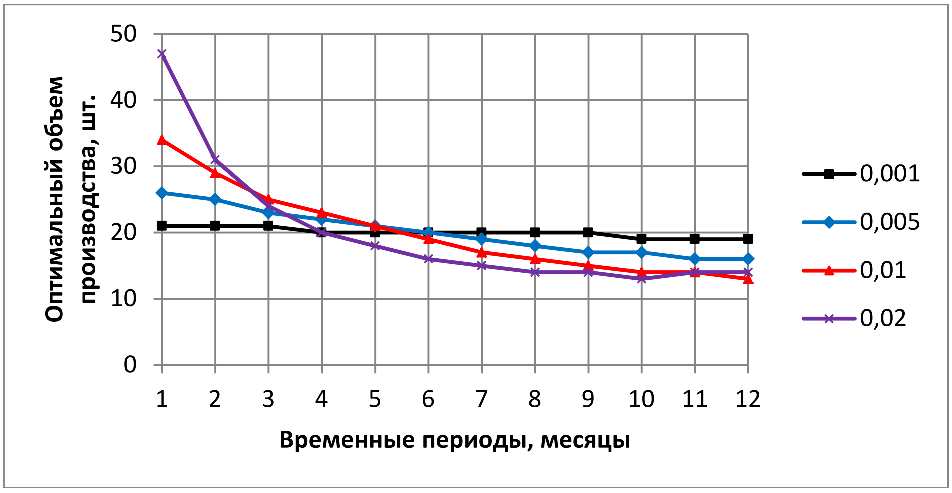

Рис. 12. Зависимость оптимальных объемов производства от индекса обучения
для логистической модели кривой обучения

Анализируя рис. 11, приходим к выводу, что для логистической модели кривой обучения с индексом обучения $\alpha < 0{,}02$ оптимальной траекторией кумулятивного объема производства является вогнутая кривая. С увеличением индекса обучения оптимальная траектория кумулятивного объема производства становится более вогнутой. Из анализа рис. 12 делаем вывод, что оптимальной стратегией менеджмента предприятия является уменьшение объемов производства от максимального значения в первом периоде до минимального в последнем периоде. При индексе обучения $\alpha = 0{,}02$ оптимальная стратегия изменяется, уменьшение объемов производства в последних периодах изменяется на увеличение. С увеличением индекса обучения оптимальные объемы производства значительно увеличиваются в первых периодах и уменьшаются во всех остальных. Чем больше индекс обучения, тем больший рост объемов производства в первых периодах.

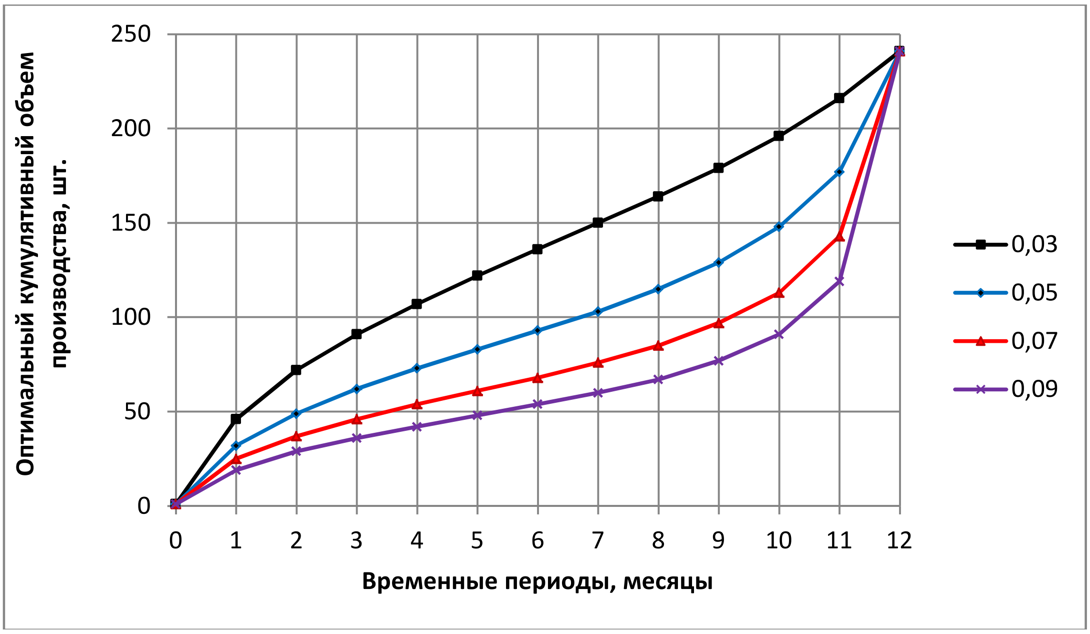

Рис. 13. Зависимость оптимального кумулятивного объема производства от индекса обучения для логистической модели кривой обучения

Анализируя рис. 13, приходим к выводу, что для логистической модели кривой обучения с индексом обучения $\alpha \geq 0{,}02$ оптимальной траекторией кумулятивного объема производства является логистическая кривая. Из анализа рис. 14 делаем вывод, что оптимальной стратегией менеджмента предприятия для логистической модели кривой обучения является сначала уменьшение объемов производства до минимального значения, а затем увеличение объемов производства до максимального значения. Вогнутому участку траектории кумулятивного объема производства соответствует уменьшение объемов производства, выпуклому участку траектории – увеличение объемов производства. Минимальный объем производства соответствует точке перегиба траектории кумулятивного объема.

С увеличением индекса обучения оптимальные объемы производства значительно увеличиваются в последнем периоде и уменьшаются во всех остальных. Чем больше индекс обучения, тем больший рост объемов производства в последнем периоде.

Постановка задачи распределения объемов производства между несколькими подразделениями

Динамика производственной деятельности *n* подразделений в период освоения новой продукции описывается *n* дискретными уравнениями:

$$x_{it} = x_{it-1} + u_{it}, \ \ i = \overline{1,n} \ \ t = \overline{1,T}, \tag{10}$$

где x_{it} – кумулятивный объем производства i-го подразделения за t-й временной период, u_{it} – объем производства i-го подразделения в периоде t, Выбор объема производства для каждого подразделения u_{it} в периоде t является управлением менеджмента предприятия.

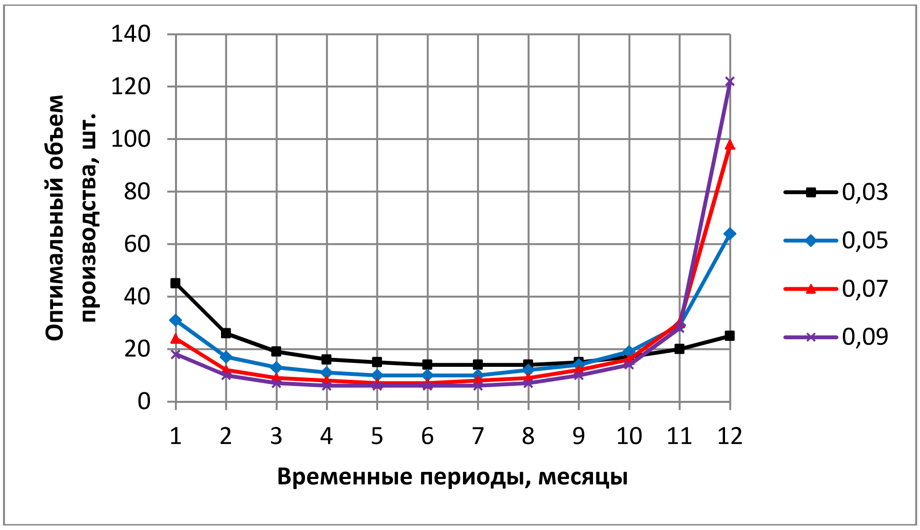

Рис. 14. Зависимость оптимальных объемов производства от индекса обучения
для логистической модели кривой обучения

Известно количество продукции уже произведенное каждым подразделением до начала проекта:

$$x_{i0} = X_{i0} \quad i = \overline{1,n}. \tag{11}$$

В последний период сумма кумулятивных объемов произведенной продукции всех подразделений должна быть равна заданному производственному заданию R, с учетом уже произведенной продукции:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{iT} = \sum_{i=1}^{n} X_{i0} + R. \tag{12}$$

На объем производства i-го подразделения в каждом периоде t наложены следующие ограничения:

$$0 \le u_{it}, \ i = \overline{1,n}, \ t = \overline{1,T}. \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_{it} \le \sum_{i=1}^{n} X_{i0} + R - \sum_{i=1}^{n} x_{it-1}, \ \ t = \overline{1,T}. \tag{14}$$

Затраты C_{it} i-го подразделения в периоде t определяются как произведение удельных затрат c_{it} и объема производства подразделения u_{it}:

$$C_{it} = c_{it} u_{it} \quad i = \overline{1,n} \tag{15}$$

Динамика изменения удельных затрат от кумулятивного объема производства описывается степенной, экспоненциальной и логистической моделями кривой обучения.

Степенная модель удельных затрат i-го подразделения:

$$c_{it} = a_i x_{it-1}^{-b_i}. \tag{16}$$

где a_i – затраты на производство первого изделия i-м подразделением, b_i – индекс обучения i-го подразделения.

Экспоненциальная модель удельных затрат i-го подразделения:

$$c_{it} = k_i + \beta_i e^{-\alpha_i x_{it-1}}. \tag{17}$$

где α_i – индекс обучения i-го подразделения, k_i, β_i – параметры экспоненциальной модели для i-го подразделения.

Логистическая модель удельных затрат *i*-го подразделения:

$$c_{it} = c_{i\min} + (c_{i\max} - c_{i\min})\left[\frac{1}{1+\beta_i e^{\alpha_i x_{it-1}}}\right], \tag{18}$$

где $c_{i\min}$, $c_{i\max}$ – минимальные и максимальные значения удельных затрат на производство изделия *i*-м подразделением, α_i – индекс обучения *i*-го подразделения, β_i – параметр логистической модели для *i*-го подразделения.

Целевой функцией менеджмента предприятия является минимизация суммы затрат *n* подразделений за все временные периоды:

$$J = \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{n} c_t u_t \to \min. \tag{19}$$

Задача заключается в поиске оптимальных объемов производства u_{it}^{opt}, $i=1,n$ $t=1,n$ для каждого подразделения, удовлетворяющих ограничениям (13)–(14), которые осуществляют перевод *n* производственных процессов подразделений (10) из начальных состояний (11) в конечные состояния, с учетом ограничения на конечные состояния подразделений (12) и минимизируют сумму затрат всех подразделений (19).

Для численного решения сформулированной задачи применялся метод динамического программирования Беллмана [5–6], реализованный в среде программирования Free pascal.

Результаты решения задачи распределения объемов производства между несколькими подразделениями

Численное решение задачи планирования объемов производства проведено для двух подразделений (бригад) на примере производства новых изделий предприятия АО «Салют».

Для исследования использовались следующие данные: заданный объем производства изделий *R* = 240 шт., количество временных периодов *T*=12 месяцев, производственный опыт каждой бригады до первого периода $x_0 = 1$ шт. При проведении численных расчетов дискретный шаг изменения объемов производства выбирался 1 изделие.

Для изделия «Кассета», трудоемкость производства которого описывается степенной моделью, целевая функция имеет следующий вид:

$$J = \sum_{t=1}^{T}(42{,}64x_{1t-1}^{-0{,}29}u_{1t} + 42{,}64x_{2t-1}^{-0{,}5}u_{2t}) \to \min.$$

Для изделия «Балка», трудоемкость производства которого описывается экспоненциальной моделью, целевая функция запишется:

$$J = \sum_{t=1}^{T}\{(9{,}17 + 6{,}16e^{-0{,}0169x_{1t-1}})u_{1t} + (9{,}17 + 6{,}16e^{-0{,}03x_{2t-1}})u_{2t})\} \to \min.$$

Для изделия «Отсек», трудоемкость производства которого описывается логистической моделью, целевая функция примет вид

$$J = \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{2}\left\{\left(55{,}10 + 36{,}61\left[\frac{1}{1+0{,}017e^{\alpha_i x_{it-1}}}\right]\right)u_{it}\right\} \to \min,$$

где индексы обучения подразделений: $\alpha_1 = 0{,}0561$, $\alpha_2 = 0{,}03$.

Оптимальные объемы производства для двух подразделений с одинаковым начальным производственным опытом и параметрами моделей кривых обучения, но разными индексами обучения представлены на рис. 15–17.

Оптимальной стратегией является предоставление всего производственного задания только одному подразделению с наибольшим индексом обучения, который характеризует максимальный темп снижения трудоемкости изделия в динамике.

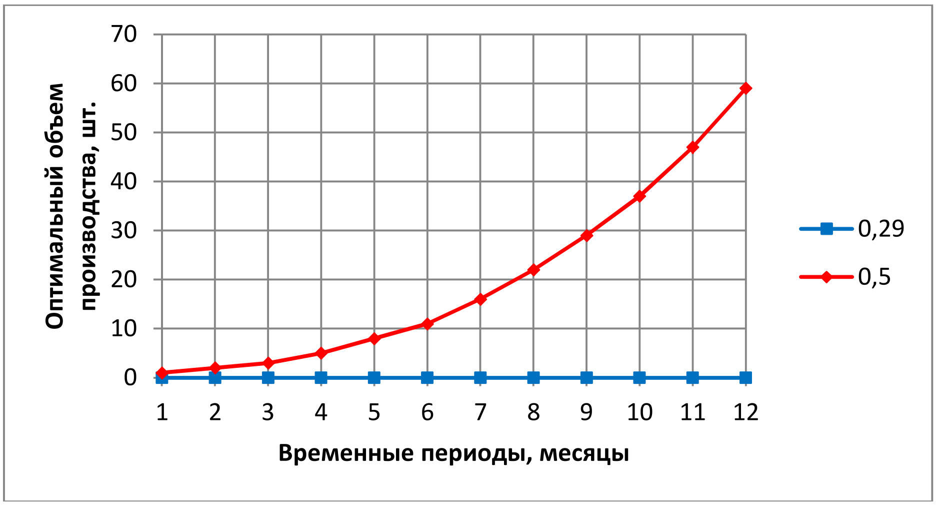

Рис. 15. Распределение оптимальных объемов производства между двумя подразделениями для степенной модели кривой обучения

Рис. 16. Распределение оптимальных объемов производства между двумя подразделениями для экспоненциальной модели кривой обучения

Рис. 17. Распределение оптимальных объемов производства между двумя подразделениями для логистической модели кривой обучения

Заключение

В работе сформулированы и численно решены задачи планирования производства для одного и нескольких подразделений промышленного предприятия с учетом эффекта обучения. Рассмотрены три модели кривых обучения: степенная, экспоненциальная и логистическая. Получены численные решения сформулированных задач для различных моделей кривых обучения с помощью метода динамического программирования Беллмана. Проведено исследование влияния индекса обучения на оптимальные решения задач.

На основе проведенных исследований сформулированы методические рекомендации по выбору оптимальных плановых показателей в период освоения новой продукции:

1. Для степенной и экспоненциальной моделей кривых обучения оптимальной стратегией менеджмента предприятия является увеличение объемов производства изделия от минимального значения в первом периоде до максимального в последнем периоде.

2. Для логистической модели кривой обучения с маленьким индексом обучения оптимальной стратегией менеджмента предприятия является уменьшение объемов производства от максимального значения в первом периоде до минимального в последнем периоде.

3. Для логистической модели кривой обучения оптимальной стратегией менеджмента предприятия является вначале уменьшение объемов производства до минимального значения, а затем увеличение объемов производства до максимального значения. Минимальный объем производства соответствует точке перегиба траектории кумулятивного объема производства.

4. Чем больше индекс обучения подразделения для степенной и экспоненциальной моделей кривых обучения, тем большие объемы производства должно выполнять подразделение в последних периодах. Для экспоненциальной модели рост объемов производства в последних периодах должен быть больше, чем для степенной модели.

5. Чем больше индекс обучения подразделения для логистической модели кривой обучения с маленьким индексом обучения, тем большие объемы производства должно выполнять подразделение в первых периодах.

6. Чем больше индекс обучения подразделения для логистической модели кривой обучения, тем большие объемы производства должно выполнять подразделение в последних периодах.

7. Оптимальной стратегией менеджмента предприятия является распределение всего производственного задания наиболее эффективному подразделению с наибольшим индексом обучения, при одинаковом начальном производственном опыте.

Благодарность. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Самарской области в рамках научного проекта № 17-46-630606.

Библиографический список

1. Wright T.P. Factors affecting the cost of airplanes // Journal of the aeronautical sciences. 1936. V. 3, no 4. P. 122–128.

2. Badiru A. Computational survey of univariate and multivariate learning curve models // IEEE Transactions on Engineering Management. 1992. V. 39, no. 2. P. 176–188.

3. Yelle L.E. The learning curve: Historical review and comprehensive survey // Decision Sciences. 1979. V. 10, no. 2. P. 302–328.

4. Learning Curves: Theory, Models, and Applications / ed. by Mohamad Y. Jaber. Boca Raton: CRC Press, 2011. 476 p.

5. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Издательство иностранной литературы, 1960.

6. Калихман И.Л., Войтенко М.А. Динамическое программирование в примерах и задачах. М.: Высш. школа, 1979.

References

1. Wright T.P. Factors affecting the cost of airplanes. In: *Journal of the aeronautical sciences.* 1936, vol. 3, no. 4, pp. 122–128.

2. Badiru A. Computational survey of univariate and multivariate learning curve models. In: *IEEE Transactions on Engineering Management*, 1992, vol. 39, no. 2, pp. 176–188.

3. Yelle L.E. The learning curve: Historical review and comprehensive survey. In: *Decision Sciences*, 1979, vol. 10, no. 2, pp. 302–328.

4. Learning Curves: Theory, Models, and Applications. Edited by Mohamad Y. Jaber. Boca Raton: CRC Press, 2011, 476 p.

5. Bellman R. Dinamicheskoye programmirovaniye [Dynamic Programming]. M.: Izdatel'stvo inostrannoy literatury, 1960.

6. Kalihman I.L., Voytenko M.A. Dynanic programming: tasks and examples [Dinamicheskoye programmirovaniye v primerakh i zadachakh]. M.: Visshaya shkola, 1979.

O.V. Pavlov*

NUMERICAL SOLUTION OF THE DYNAMIC PROBLEMS OF PLANNING PRODUCTION VOLUMES IN PROJECTS FOR THE DEVELOPMENT OF NEW PRODUCTS

In article dynamic tasks of production planning for one and several subdivisions of the industrial enterprise are considered with considering the learning curve effect. The problem is formalized mathematically as the problem of optimal control of a discrete system. Numerical solutions of the formulated problems for various models of learning curves are obtained using the Bellman dynamic programming method. The research of the learning index influence on optimal solutions of problems is given.

Key words: new products development, learning curves, dynamic programming.

Статья поступила в редакцию 2/XII/2017.
The article received 2/XII/2017.

* *Pavlov Oleg Valerievich* (pavlov@ssau.ru), Vice Director of the Institute of Economics and Management, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.