УДК 330.101.54

Е.А. Ильина, А.Л. Сараев*

МОДЕЛЬ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ ДИФФУЗИИ ИННОВАЦИЙ

В публикуемой статье предложена математическая модель диффузии потребительских инноваций, учитывающая влияние внешнего случайного возмущающего фактора. Уравнения стохастической динамики продаж инновационных товаров описывают случайный процесс непрерывного и распределенного увеличения числа потребителей инновационных продуктов. Показано, что учет в стохастической модели внешнего случайного возмущающего фактора приводит к существенным отклонениям от классической детерминированной модели плавного освоения рынка инновационными товарами.

Ключевые слова: инновация, диффузия инноваций, стохастические уравнения, винеровский процесс, коэффициент сноса, коэффициент волатильности, коэффициент инновации, коэффициент имитации.

Моделирование особенностей реагирования рынков на внедрение и продвижение инновационных товаров является одной из актуальных задач современной экономической теории и практики ведения бизнеса. Прогнозирование процессов диффузии потребительских инноваций способно во многих случаях эффективно оценивать скорости роста продаж новых товаров, определять параметры частичного или полного захвата рынков, выявлять степени рисков для малого и среднего инновационного бизнеса и т. д. Разработка адекватных моделей диффузии инноваций как процесса заполнения и захвата рынков новыми продуктами, технологиями и идеями должна опираться на теорию случайных полей [1].

Пусть в рамках некоторого рынка внедряется совершенно новый продукт в виде товара, технологии, идеи или услуги. У этого инновационного оригинального продукта нет аналогов и конкуренции со стороны уже имеющихся на рынке продуктов. Возникающий вместе с этим продуктом новый спрос порождает в момент времени определенное количество потребителей Q, осуществивших его покупку.

Величина $Q = Q(t)$ является случайной, непрерывной, непрерывно дифференцируемой и ограниченной на числовой полуоси ($0 < t < \infty$) функцией времени. Переменная времени t предполагается непрерывной, единицей ее измерения служит соответствующий обстоятельствам рыночный период (месяц, квартал, год). Функция $Q = Q(t)$ удовлетворяет неравенству

$$Q = Q(t) < P.$$

Здесь $Q(0) = 0$, $\mathrm{P} = \lim\limits_{t \to \infty} \mathrm{Q(t)}$ – максимальное число потенциальных покупателей продукта, определяющее потенциал рыночного спроса.

Приращение количества потребителей инновационного продукта ΔQ за некоторый малый промежуток времени образуется из трех компонентов

$$\Delta Q = \Delta_a Q + \Delta_b Q + \Delta_w Q. \tag{1}$$

Здесь $\Delta_a Q$ – число покупателей-новаторов, ориентирующихся на рекламу и средства массовой информации, $\Delta_b Q$ – число потребителей-имитаторов, ориентирующихся на отзывы уже совершивших приобретение людей, $\Delta_w Q$ – случайные колебания числа покупателей-имитаторов, обусловленные волатильностью рынка.

Число покупателей-новаторов $\Delta_a Q$, полагающихся на рекламу и средства массовой информации, за промежуток времени Δt можно представить в виде

$$\Delta_a Q = a \cdot (P - Q) \cdot \Delta t. \tag{2}$$

Здесь a – коэффициент инновации.

Ильина Елена Алексеевна (elenaalex.ilyina@yandex.ru), *Сараев Александр Леонидович* (alex.saraev@gmail.com), кафедра математики и бизнес-информатики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Число покупателей-имитаторов $\Delta_b Q$, полагающихся на отзывы уже совершивших приобретение потребителей, за промежуток времени Δt определяется соотношением

$$\Delta_b Q = b \cdot \frac{Q}{P} \cdot (P - Q) \cdot \Delta t. \tag{3}$$

Здесь b – коэффициент имитации.

Случайные колебания числа покупателей-имитаторов $\Delta_w Q$ представляют собой стохастический фактор стандартного винеровского процесса

$$\Delta_w Q = \sigma \cdot b \cdot \frac{Q}{P} \cdot (P - Q) \cdot \Delta w. \tag{4}$$

Здесь w – стандартный винеровский процесс, $\Delta w = \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta t}$, σ – волатильность рынка, $\varepsilon \sim N(0,1)$ – случайная величина с нормальным законом распределения, средним значением $\langle \varepsilon \rangle = 0$ и единичной дисперсией $\langle \varepsilon^2 \rangle = 1$. Таким образом, формула (1) принимает вид

$$\Delta Q = \left(a + b \cdot \frac{Q}{P} \right) \cdot (P - Q) \cdot \Delta t + \sigma \cdot b \cdot \frac{Q}{P} \cdot (P - Q) \cdot \Delta w. \tag{5}$$

Предельный переход $\Delta t \to 0$ приводит к стохастическому дифференциальному уравнению диффузии [2–6]

$$dQ = \left(a + b \cdot \frac{Q}{P} \right) \cdot (P - Q) \cdot dt + \sigma \cdot b \cdot \frac{Q}{P} \cdot (P - Q) \cdot d\,w. \tag{6}$$

Замена переменной $q = \dfrac{Q}{P}$ в уравнении (6) приводит к безразмерному уравнению диффузии Ито

$$dq = A(q) \cdot dt + B(q) \cdot d\,w. \tag{7}$$

Здесь $A(q) = (a + b \cdot q) \cdot (1 - q)$ и $B(q) = \sigma \cdot b \cdot q \cdot (1 - q)$ – коэффициент сноса и коэффициент волатильности соответственно. Начальное условие для уравнения (7) имеет вид

$$q\big|_{t=0} = q(0) = 0. \tag{8}$$

Численное решение уравнения с начальным условием (8) выполняется методом последовательных приближений в соответствии с алгоритмом

$$q_{s+1} = q_s + (a + b \cdot q_s) \cdot (1 - q_s) \cdot \Delta t + \sigma \cdot b \cdot q_s \cdot (1 - q_s) \cdot \varepsilon_s \cdot \sqrt{\Delta t}. \tag{9}$$

Здесь на каждом малом временном шаге Δt, начиная с начального значения, генерируется случайное число ε_s и вычисляется следующее значение q_{s+1}. Таким образом, образуются случайные последовательности $\{t_s\}$ и $\{q_s\}$. На координатной плоскости эти последовательности образуют систему точек $\{t_s, q_s\}$ и соответствующую ей линию с фрактальной изломанностью. При повторении реализации алгоритма (7) всякий раз образуется новая ломаная линия, поскольку каждый раз случайная величина ε генерирует новые случайные значения.

На рис. 1 представлены численные реализации решений задачи (9), (8). Стохастические линии представляют собой реализации случайного процесса диффузии инноваций для одних и тех же начальных условий и числовых параметров.

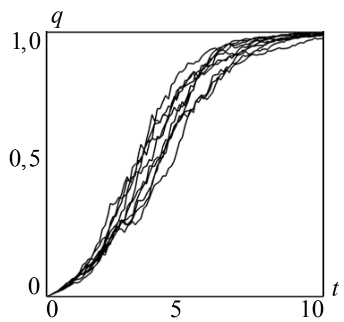

Рис. 1

В численных расчетах временной интервал $t \in [0,10]$ был разбит на $n = 100$ частей, величина шага была принята $\Delta t = 0{,}01$. Число реализаций случайного процесса диффузии инноваций было выбрано $m = 200$. На рис. 1 показано только десять из них. Коэффициент инновации $a = 0{,}05$, коэффициент имитации $b = 0{,}75$ волатильность рынка предполагалась $\sigma = 0{,}35$.

Следует отметить, что в начальной точке $t = 0$ и в точках, близких к процессу насыщения, $t \approx 10$, стохастический процесс становится практически детерминированным, что является вполне ожидаемым и определяется видом функции волатильности $B(q) = \sigma \cdot b \cdot q \cdot (1 - q)$.

Вид той функции не позволяет в полной мере воспользоваться формулой Ито и найти точное решение для среднего значения функции $q(t)$. При статистическом осреднении уравнения (7)

$$d\langle q\rangle = \langle A(q)\rangle \cdot dt = \langle (a + b\cdot q)\cdot(1-q)\rangle \cdot dt\,, \tag{10}$$

получается уравнение, содержащее статистический момент второго порядка

$$\frac{d\langle q\rangle}{dt} = a + (b-a)\cdot\langle q\rangle - b\cdot\langle q^2\rangle. \tag{11}$$

Вычисление момента $\langle q^2\rangle$ приводит к появлению моментов третьего и четвертого порядков. Таким образом образуется бесконечная цепочка статистических уравнений, которую необходимо оборвать, сделав определенные допущения.

В рассматриваемом случае естественно предположить, что флуктуации величины $q(t)$ определяются случайными колебаниями числа покупателей -имитаторов, и ее можно представить в виде

$$q = \langle q\rangle + \sigma\cdot\langle q\rangle\cdot(1-\langle q\rangle)\cdot\varepsilon\,. \tag{12}$$

Тогда

$$q^2 = \langle q\rangle^2 + 2\cdot\sigma\cdot\langle q\rangle^2\cdot(1-\langle q\rangle)\cdot\varepsilon + \sigma^2\cdot\langle q\rangle^2\cdot(1-\langle q\rangle)^2\cdot\varepsilon^2\,. \tag{13}$$

Усреднение соотношения (13)

$$\langle q^2\rangle = \langle q\rangle^2\cdot\left(1+\sigma^2\cdot(1-\langle q\rangle)^2\right) \tag{14}$$

приводит к уравнению относительно средней величины $\langle q\rangle$

$$\frac{d\langle q\rangle}{dt} = a + (b-a)\cdot\langle q\rangle - b\cdot\langle q\rangle^2\cdot\left(1+\sigma^2\cdot(1-\langle q\rangle)^2\right). \tag{15}$$

Сравнение численного решения уравнения (15) и среднего значения вычисленного для всех $m = 200$ реализаций алгоритма (7) приведено на рис. 2.

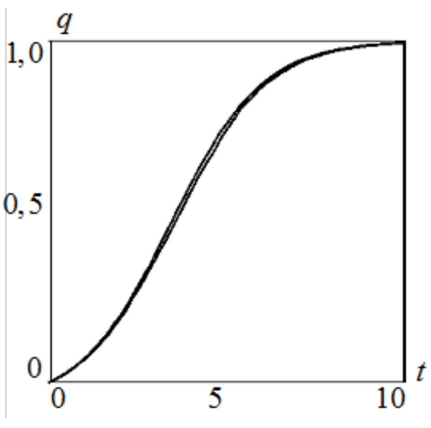

Рис. 2

Численный анализ показывает практическое совпадение результатов расчета по формуле (9) – нижняя кривая и формуле (15) – верхняя кривая.

На рис. 3 представлены кривые реализации случайного процесса с кривой для среднего значения процесса.

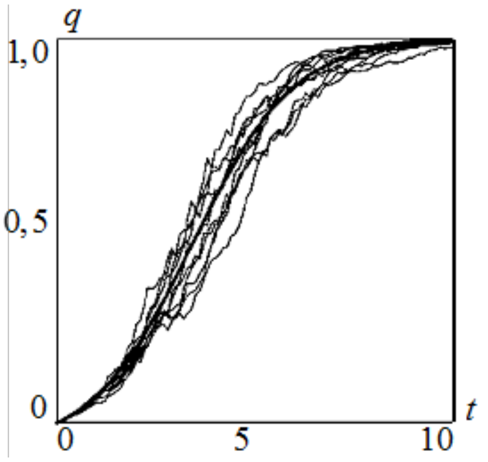

Рис. 3

В случае если волатильность рынка обращается в нуль $\sigma = 0$ и процесс становится детерминированным, полученные результаты совпадают с результатами классической модели Ф. Басса диффузии инноваций [7].

Библиографический список

1. Соловьев В.И. Экономико-математическое моделирование рынка программного обеспечения. М.: Вега-Инфо, 2009. 176 с.

2. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Особенности динамики выпуска продукции и производственных факторов модернизируемых предприятий // Вестник Самарского государственного университета. 2014. № 6 (117). С. 251–260.

3. Сараев А.Л. Уравнения динамики экономического развития предприятия, модернизирующего производственные технологии // Основы экономики, управления и права. 2014. № 3(15). С. 93–100.

4. Сараев А.Л. Уравнения нелинейной динамики кризисных явлений для многофакторных экономических систем // Вестник Самарского государственного университета. 2015. № 2(124). С. 262–272.

5. Егорова А.Ю., Сараев А.Л., Сараев Л.А. Вариант динамической модели переоборудования производственного предприятия, учитывающей эффект запаздывания внутренних инвестиций // Вестник Самарского государственного университета. 2015. № 5(127). С. 210–216.

6. Сараев А.Л. Динамическая многофакторная модель модернизации производственного предприятия // Вестник Самарского государственного университета. 2015. № 5(127). С. 224–232.

7. Bass F.M. A new product growth model for consumer durables // Management Science. 1969. Vol. 15.

References

1. Solov'yev V.I. Ekonomiko-matematicheskoye modelirovaniye rynka programmnogo obespecheniya [Economic and mathematical modeling of the software market]. M.: Vega-Info, 2009. 176 p.

2. Sarayev A.L., Sarayev L.A. Osobennosti dinamiki vypuska produktsii i proizvodstvennykh faktorov moderniziruyemykh predpriyatiy [Features of the dynamics of output and production factors of modernized enterprises]. In: Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta [Vestnik of Samara State University], 2014, no. 6(117), pp. 251–260.

3. Sarayev A.L. Uravneniya dinamiki ekonomicheskogo razvitiya predpriyatiya, moderniziruyushchego proizvodstvennyye tekhnologii [Equations of the Dynamics of the Economic Development of an Enterprise Modernizing Manufacturing Technologies]. In: Osnovy ekonomiki, upravleniya i prava [Fundamentals of Economics, Management and Law], 2014, no. 3(15), pp. 93–100.

4. Sarayev A.L. Uravneniya nelineynoy dinamiki krizisnykh yavleniy dlya mnogofaktornykh ekonomicheskikh sistem [Equations of nonlinear dynamics of crisis phenomena for multifactorial economic systems]. In: Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta [Vestnik of Samara State University], 2015, no. 2(124), pp. 262–272.

5. Yegorova A.Yu., Sarayev A.L., Sarayev L.A. Variant dinamicheskoy modeli pereoborudovaniya proizvodstvennogo predpriyatiya, uchityvayushchey effekt zapazdyvaniya vnutrennikh investitsiy [ariant of the dynamic model of re-equipment of a manufacturing enterprise that takes into account the effect of the delay of domestic investment]. In: Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta [Vestnik of Samara State University], 2015, no. 5(127), pp. 210–216.

6. Sarayev A.L. Dinamicheskaya mnogofaktornaya model' modernizatsii proizvodstvennogo predpriyatiya [Dynamic multi-factor model for the modernization of a production enterprise]. In: Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta [Vestnik of Samara State University], 2015, no. 5(127), pp. 224–232.

7. Bass F.M. A new product growth model for consumer durables. In: Management Science, 1969, vol. 15.

E.A. Ilyina, A.L. Saraev*

MODEL STOCHASTIC DYNAMICS DIFFUSION OF INNOVATIONS

In the published article the mathematical model of diffusion of innovations in consumer, taking into account the influence of the external random disturbing factor. The equations of the stochastic dynamics of sales of innovative products describe the random process of continuous and distributed to increase the number of consumers of innovative products. It is shown that the inclusion in the stochastic model of a random external disturbance factor leads to a significant departure from the classical deterministic model smooth development of innovative products market.

Key words: innovation, diffusion of innovations, stochastic equations, Wiener process, the drift coefficient, volatility factor, factor innovation, imitation factor.

Статья поступила в редакцию 4/VIII/2017.
The article received 4/VIII/2017.

* *Ilyina Elena Alexeevna* (elenaalex.ilyina@yandex.ru), *Saraev Alexander Leonidovich* (alex.saraev@gmail.com), Department. of Mathematics and BusinessInformatics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.