МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ЭКОНОМИКИ

УДК 368.1:519.22

*А.Г. Коваленко**

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ ПОДХОД И ТЕОРИЯ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ СЕТЕЙ В ПРОБЛЕМЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГОРОДСКИХ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ

В статье рассматривается задача распределения транспортных потоков на урбанизированных территориях. При применении игрового подхода и математических методов теории гидравлических сетей ставится задача отыскания состояния равновесия, для решения которой применяются методы поциклической увязки.

Ключевые слова: урбанизированные территории, распределение транспортных потоков, теория игр, теория гидравлических сетей, равновесие по Нешу.

Введение

Проблемы систем инженерного обеспечения урбанизированных территорий и, в частности, дорожно-транспортых систем общеизвестны [1]. Каждый горожанин ощущает на себе это ежедневно. Как в будни, так и в выходные дни многие города практически стоят в автомобильных пробках, и, как следствие, возникают социальное недовольство населения, огромные экономические затраты, значительное ухудшение экологии. И решить эти проблемы только управлением транспортными потоками невозможно. Это проблема комплексная. И в первую очередь проблема неправильной компоновки города, размещения спальных районов, промышленных районов, магазинов и т. д. Структура города заставляет людей ездить. Но для правильной компоновки, для комплексной ее оценки необходимы и транспортные модели [2; 3]. Предлагаемые модели и методы основаны на теоретико-игровых подходах [4] и моделях теории гидравлических сетей [5], имеющих широчайшее применение.

Коваленко Алексей Гаврилович (alexey.gavrilovich.kovalenko@rambler.ru), кафедра математики и бизнес-информатики Самарского государственного университета. 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

1. Описательная модель

Город можно представить как множество объектов (микрорайонов, кварталов, отдельных домов, предприятий, магазинов, мест въезда–выезда из города и т. д.), между которыми движется транспорт, перевозящий различные виды грузов и людей. Между этими объектами существуют транспортные магистрали, состоящие из участков улиц между перекрестками, местами въезда–выезда из перечисленных объектов, по которым осуществляется движение. Будем считать, что все объекты привязаны к точкам (местам) въезда–выезда на дорогу из кварталов; через эти места кварталы впускают и выпускают транспорт (см.пример на рис. 1). Стрелками показаны полосы одностороннего движения, кружками показаны точки (места) въезда–выезда потока, объединения–разъединения потока. На перекрестках потоки объединяются и разъединяются. Достаточно общая схема перекрестка представлена на рис. 2. Аналогично для въезда–выезда из города на рис. 3.

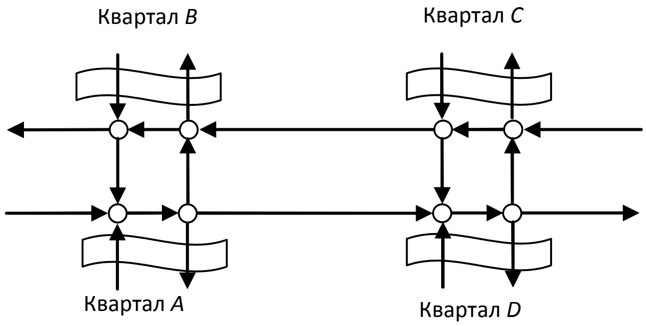

Рис. 1. Въезд-выезд из кварталов

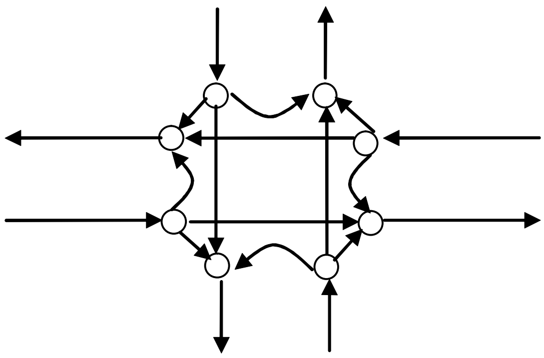

Рис. 2. Пример перекрестка

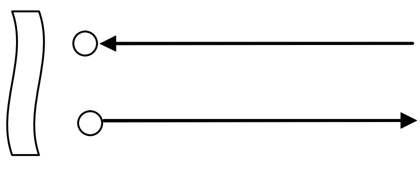

Рис. 3. Въезд – выезд из города

Движение потоков происходит по дорогам между различными точками, приведенными выше. Таким образом, структуру движения можно описать в виде ориентированного графа. Вершины графа – точки въезда – выезда с перекрестка, въезда–выезда с кварталов, въезда – выезда в город. Дуги графа – участки дороги между вершинами. Направление стрелки указывает направление движения потока.

Вершины, из которых поток поступает в сеть, будем называть источниками, вершины; в которые поток поступает из сети, – стоками.

Будем считать, поток состоит из отдельных токов, характеризующихся одним путем движения в конечную вершину – сток. Транспортные единицы тока одинаковые и двигаются равномерно, скорость движения этих единиц на различных дугах может быть различна. В какой мере ток можно представить собой движущуюся организованную бесконечную колонну. Весь поток состоит из множества отдельных токов, суммарную величину образующихся потоков из вершины i в вершину j обозначим через Q_{ij}. Пути токов, входящих в Q_{ij}, вообще говоря, различные. Будем считать, что каждым током управляет субъект, который организует движение этого тока.

Множество всех таких субъектов образует множество игроков I. Для каждого игрока $\gamma \in I$ стратегией ξ_γ будет путь от источника i в сток j из множества всех стратегий – путей χ_γ, соединяющих эти вершины. Критерием каждого субъекта является время движения из i в j, его цель – минимизировать время движения каждой транспортной единицы, а значит, и всех транспортных единиц тока. На значение этого критерия влияют другие игроки, путь которых пересекается с путем игрока γ. На пересекающихся участках они увеличивают плотность потока, тем самым уменьшая скорость движения и, соответственно, увеличивая время. В результате мы получаем игру в нормальной форме:

$$G = \left\langle I;\ \chi_\gamma, \gamma \in I;\ \ \varphi_\gamma(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_\gamma, \ldots, \xi_{|I|}) \underset{\xi_\gamma \in \chi_\gamma}{\Longrightarrow} \min, (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_\gamma, \ldots, \xi_{|I|}) \in \chi = \prod_{k \in I} \chi_k, \gamma \in I \right\rangle$$

Под равновесием в этой игре будем понимать равновесие по Нешу [4].

В дальнейшем мы примем еще одно допущение, что множество игроков I бесконечно, носит континуальный характер. В соответствии с этим потоки Q_{ij} будут разделены на токи x_{ij}^γ сколь угодно малой величины.

2. Анализ движения потока по дуге

Очевидно, для того, чтобы время движения на всем пути было минимальным, необходимо, чтобы скорость движения каждого участника движения на дуге была максимальной. Но на значение скорости данного участника движения непроизвольно оказывают отрицательное влияние другие участники. Они тоже стремятся в выборе своих параметров движения к максимизации скорости. Увеличение потока приводит к уменьшению скорости движения рассматриваемого водителя, что ведет к увеличению его времени.

Рассмотрим движение только по одной дуге, поэтому все индексы, касающиеся дуги, опустим. Введем следующие обозначения: L – длина участка сети; T – время движения по участку; x-поток – количество машин, прошедшее через сечение дороги за единицу времени; ρ – плотность потока – количество машин на единицу длины на одной полосе; s – количество полос на дороге; w – скорость, с которой движется поток; λ – средняя длина участка, приходящаяся на 1 автомобиль на 1-й полосе.

Согласно определению плотности, $\rho = 1/\lambda$. Пусть w – скорость автомобиля, w_{max} – скорость. Время, которое пройдет автомобиль отрезок пути длиной λ равно $\tau = \lambda/w$. Количество автомобилей за единицу времени будет равно $\kappa = 1/\tau$. Отсюда $x = \kappa s = \dfrac{1}{\tau} s = \dfrac{w}{\lambda} = w\rho s$. Будем считать, что скорость и плотность потока связана между собой линейно зависимостью $w/w_{max} + \rho/\rho_{max} = 1$ (формула Гриндшилса), отсюда $w = w_{max}\left(1 - \rho/\rho_{max}\right)$, или $\rho = \rho_{мax}\left(1 - w/w_{max}\right)$. Подставим в выражение для потока x формулу для ρ, получим $x = s\ w\ \rho_{мах}(1 - w/w_{мах})$. Получившаеся функция есть парабола с ветвями, направленными вниз, максимум достигается при $w = w_{\max}/2$, и, соответственно, максимальный поток будет равен $x_{max} = s(w_{max}\ \rho_{мах})/4$. Таким образом, мы получили величину максимального потока, который может быть пропущен по дороге.

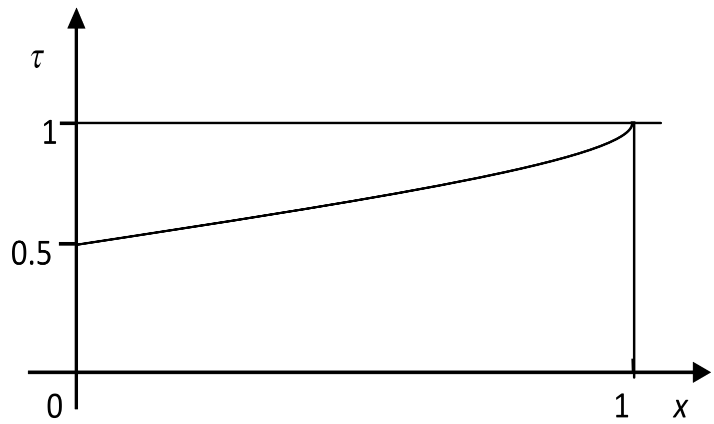

Рис. 4

Преобразуем формулу для потока x, получим $w^2 - w_{мах}w + (w_{мах}/(s\rho_{мах}))x = 0$. Из формул Виетта с учетом того, что каждый стремится максимизировать свою скорость, и соответствующих замен переменных будем иметь $w = w_{мах}\left(1 + \sqrt{1 - x/x_{мах}}\right)/2$. Отсюда видим, что время движения по участку сети выражается следующей зависимостью: $\tau(x) = 2\tau_{мin}/\left(1 + \sqrt{1 - x/x_{мах}}\right)$, где τ_{min} – минимальное время движения по участку в случае, когда поток по нему равен нулю. Для наглядности вида этой зависимости на рис. 4 приведем график функции $\tau(x) = 1/\left(1 + \sqrt{1 - x}\right)$.

3. Понятие слоя, балансовые соотношения слоя, инвариантное преобразование потоков слоя

3.1. Понятие слоя, балансовые соотношения слоя

Пусть $G = \langle E, V, H\rangle$ – ориентированный граф, E и V – конечные множества, H – отображение $H: V \to E \times E$. Элементы множества E будем называть вершинами графа, элементы множества V – дугами. Для каждой дуги $v \in V$ отображение $H(v) = (h1(v), h2(v))$, $h1(v)$ – начало дуги v, $h2(v)$ – конец. Обозначим $V^+(i) = \{v \in V \mid h2(v) = i\}$ – множество дуг, входящих в вершину i, $V^-(i) = \{v \in V \mid h1(v) = i\}$ – множество дуг, выходящих из вершины i.

Для каждой пары (i, j) вершин заданы числа Q_{ij}, задающие величину потока из вершины – источника i в вершину – сток j. Эти потоки разлагаются на отдельные токи и распределяются по сети, в результате для каждой дуги $v \in V$ получаем q_{ij}^{v} – поток по дуге v, перемещаемой из источника i в сток j.

3.2. Разбиение транспортных потоков по слоям

Возьмем вершину i_0, которая является источником потока в другие вершины. Потоки, входящие в вершины $i \in E$, обозначим $q_i(i_0)$, для вершины $i_0 \in E$ будет $q_{i_0}(i_0)$.

Совокупность $S(i_0) = \langle G; i_0; q_i(i_0), i \in E; x_v(i_0), v \in V \rangle$ будем называть слоем i_0. Для каждой вершины справедливо

$$\sum_{v \in V^+(i)} x_v(i_0) - \sum_{v \in V^-(i)} x_v(i_0) = q_i(i_0), \qquad i \in E \tag{1}$$

Для вершины i_0 будет справедливо

$$q_{i_0}(i_0) = -\sum_{i \in E \setminus \{i_0\}} q_i(i_0) \tag{2}$$

Соотношение (1) является Первым правилом Кирхгофа сети.

Обозначим через $X_v = \sum_{i_0 \in E} x_v(i_0)$, это суммарный поток, идущий по дуге v. Из (1) следует

$$\sum_{v \in V^+(i)} X_v - \sum_{v \in V^-(i)} X_v = \sum_{i_0 \in E} q_i(i_0), \qquad i \in E. \tag{3}$$

Не ограничивая общности будем считать, что каждая вершина образует слой, если для некоторой вершины i_0 его нет, то это означает, что $q_i(i_0) = 0, i \in E$. В городской транспортной сети (1), (2) выполняются для всех i_0ОE. Из выполнимости (3) не следует справедливость (1).

Замечание. Однослойные транспортные системы сами по себе имеют большое практическое значение. Простейшими примерами таких задач являются задачи входа в некоторое заведение, эвакуацию из зданий, стадионов и т. д.

4. Анализ однослойной системы

4.1. Поиск начальных допустимых потоков с помощью задачи о максимальном потоке в сети

Так как рассматривается только один слой, то индекс слоя i_0 будем опускать. Идея алгоритма поиска равновесия заключается в поиске допустимых начальных потоков в сети и последующем преобразовании их в равновесное состояние. Так как каждая дуга имеет ограниченную пропускную способность, то проверку на существование допустимых потоков с поиском их можно осуществлять с помощью задачи о максимальном потоке и решении ее алгоритмом Форда и Фалкерсона.

В задаче о максимальном потоке поток пропускается из начальной одной начальной вершины в одну конечную. Все дуги имеют заданную пропускную способность. Для того чтобы привести задачу к такому виду, добавим две фиктивные вершины *ii* и *kk*. Соединим *ii* с источником потока i_0. Для нее пропускная способность равна $-q_{i_0}(i_0)$. Стоки с $q_i\ (i) > 0$ соединяем дугами с вершиной *kk*. Для этих дуг пропускная способность равна соответственно $q_i\ (i)$ Получаем задачу о максимальном потоке в стандартном виде, для ее решения применяем любой из известных алгоритмов. Если оказалось, что максимальный поток меньше $q_{i_0}(i_0)$, то исходная задача одного слоя, а значит, и вся задача решения не имеет. В этом случае минимальный разрез находится вне дополнительных дуг.

Если оказалось, что максимальный поток равен $q_{i_0}(i_0)$, то получаем допустимый поток, который инвариантными преобразованиями переводим в состояние равновесия.

4.2. Инвариантное преобразование потоков слоя

Рассмотрим произвольный цикл *C*. Зададим произвольное направление обхода, совпадающее с направлением некоторой дуги из цикла *u*. Построим характеристическую функцию $sign_C^u(v)$:

$$sign_u(v) = \begin{cases} 0, \text{ если } v \notin C \\ +1, v \in \text{C, направление дуги совпадает с направлением обхода цикла,} \\ -1, v \in C, \text{ направление дуги проитвоположно направлению обхода цикла.} \end{cases}$$

Пусть x_v, $v \in V$удовлетворяют соотношения (1). Возьмем произвольное число *q*, для всех $v \in V$ положим ‘$\overline{x_v} = x_v + sign_C^u(v)\theta$, т. е. для дуг цикла, направление которых совпадает с направлением обхода, к величине потока x_v добавляется *q*, для дуг цикла, направление которых противоположно направлению обхода, от величины потока x_v вычитается *q*. Тогда $\overline{x_v}, v \in V$ удовлетворяют соотношению (1).

4.3. Второе правило Кирхгофа для дорожных потоков

Рассмотрим один слой транспорта потока из источника с номером i_0 в сток с номером j_0. Пусть при этом движении потоки расходятся в вершине *i* и сходятся в вершине *j*. Пусть по дугам уже идут какие-то потоки, удовлетворяющие Первому правилу Кирхгофа. Путей доставки этого потока из *i* в *j* как минимум 2, обозначим их P1 и *P*2. Предположим, что время *t*1 движения по 1-му пути оказалось больше времени *t*2 движения по 2-му пути. Тогда часть потока переключится на 2-й путь. Будет происходить увеличение потока по 2 пути и, соответственно, увеличиваться время по 2-му пути. Одновременно уменьшаться величина потока по первому пути и соответственно уменьшаться время движения по первому пути. Переключение прекратится, когда выполнится равенство *t1* = *t2*, или *t1* - *t2* = 0. В общем виде должно выполняться равенство $\sum_{v \in V} sign_C^u(v)(\tau_v(x_v)) = 0$, в теории гидравлических сетей оно именуется как **Второе правило Кирхгофа**. Его словесная формулировка: в состоянии равновесия сумма изменения времени движения потока по циклу равна нулю.

При произвольных потоках это равенство не выполняется. Используя инвариантное преобразование потоков, его можно записать как $NB_u(\theta) = \sum_{v \in V} sign_C^u(v)(\tau_v(x_v + sign_C^u(v)\theta))$.

Задача увязки цикла заключается в определении такого *q*, что $NB_u(\theta) = 0$.

4.4. Построение остова, система фундаментальных циклов

Известно, что если правило Кирхгофа выполняется на системе фундаментальных циклов, то оно выполняется на любом цикле графа. Система фундаментальных циклов строится на основе остова – произвольное дерево, вершины которого совпадают с вершинами исходного графа *G*. Дерево можно строить любым алгоритмом, например, построение дерева кратчайших путей алгоритмом Дейкстры. Кратчайшие пути можно брать в смысле длин путей в корень. Дуги вне дерева назовем хордами. Фундаментальный цикл образуется хордой и дугами дерева. С(*u*) – цикл, образованный хордой *u*. Каждому циклу задаем направление обхода, совпадающее с хордой. Построение для цикла функции $sign_u(v)$ не представляет сложности.

4.5. Расчет границ изменения аргумента функции $NB_u(\theta)$

Разобьем $NB_u(\theta)$ на три части: $NB_u(\theta) = NB_u^0(\theta) + NB_u^+(\theta) + NB_u^-(\theta)$, В первую часть $NB_u^0(\theta)$ входят слагаемые с *v*, для которых $sign_u(v) = 0$. Во вторую часть $NB_u^+(\theta)$ входят слагаемые с v, для которых $sign_u(v) = 1$, в третью часть $NB_u^-(\theta)$ входят слагаемые с v, для которых $sign_u(v) = -1$.

1. Очевидно, что $NB_u^0(\theta) = 0$.

2. $NB_u^+(\theta) = \sum_{v \in V,\, sign_u(v)=1} \tau_v(x_v + \theta)$. Так как $\tau_v(x) > 0$ и возрастающая по *x* (см. рис. 4), то $NB_u^+(\theta) > 0$ возрастающая по *q*. Для всех $v \in V, sign_u(v) = 1$ выполняется $0 \le (x_v + \theta) \le x_{\max}$, или $-x_v \le \theta \le x_{\max} - x_v$. Таким образом, получаем, что

$$\theta \in [\underline{\theta^+}, \overline{\theta^+}], \tag{4}$$

где $\underline{\theta^+} = \max_{v \in V,\, sign_u(v)=1}(-x_v)$, $\overline{\theta^+} = \min_{v \in V,\, sign_u(v)=1}(x_{\max} - x_v)$

3. Аналогично п. 2 получаем, что $NB_u^-(\theta)$ возрастающая.

$$\theta \in [\underline{\theta^-}, \overline{\theta^-}], \tag{5}$$

где $$\underline{\theta^-} = \max_{v\in V,\ sign_u(v)=-1}\left(x_v - x_{\max}\right), \quad \overline{\theta^-} = \min_{v\in V,\ sign_u(v)=-1} x_v$$

Из рассмотренных случаев 1–3 и формул (4), (5) получаем, что функция $NB_u(\theta)$ возрастающая и определена на отрезке $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$, где $\underline{\theta} = \max(\underline{\theta^-}, \underline{\theta^+})$,

5. Алгоритмы поиска состояния равновесия городской транспортной системы

Приведенные построения позволяют для отыскания состояния равновесия одного слоя применять алгоритмы типа последовательной увязки циклов. Например, ищем дугу, для которой $NB_u(0) > \varepsilon$ (достаточно малое число), если такой дуги не нашлось, то увязку слоя прекращаем, для этой дуги решаем задачу $NB_u(\theta) = 0$ и переходим к выполнению алгоритма заново. Для многослойных систем поиск дуги надо осуществлять по всем слоям и, соответственно, внутри слоя.

Большой опыт решения задач теории гидравлических сетей дает основание предполагать эффективность предложенного подхода. Так, например, решение задач потокораспределения городских сетей водоснабжения, теплоснабжения размерностью около 1000 вершин и около 1500 дуг за время порядка 15–30 секунд на бытовых персональных компьютерах дает основание предполагать, что потокораспределение в дорожно-транспортных сетях сможет быть выполнено за приемлемое время. Предлагаемые алгоритмы позволяют применять методы их распараллеливания, что дает широкие возможности использования современных многопроцессорных компьютерных систем.

Библиографический список

1. Коваленко А.Г., Хачатуров В.Р., Раимжанов Ж.Д. Методология разработки технико-экономического обоснования формирования систем инженерного обеспечения урбанизированных территорий // III международная научно-практическая конференция «Экологическая безопасность урбанизированных территорий в условиях устойчивого развития»: науч. тр. Астана, 2008.

2. Швецов В.И. Математическое моделирование транспортных потоков // Автоматика и телемеханика. 2003. № 11.

3. Математическое моделирование автотранспортных потоков / Н.Н. Смирнов [и др.] // Мехмат МГУ, 1999.

4. Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики: учебное пособие. М.: МАКС Пресс, 2005. 272 с.

5. Меренков А.П., Хасилев В.Я. Теория гидравлических цепей. М.: Наука, 1985, 278 с.

A.G. Kovalenko*

GAME-THEORY APPROACH AND HYDRAULIC NETWORK THEORY IN THE PROBLEM OF MODELING OF MOVEMENT OF URBAN TRAFFIC TORRENT

The task of distribution of traffic steams on urbanized territories is viewed. Using game-theory approach and mathematical methods of hydraulic network theory, the problem of finding equilibrium, for the solving of which the methods of cyclic equilibration are used is posed.

***Key words*:** urbanized territory, distribution of traffic torrents, game theory, hydraulic network theory, Nash equilibrium.

* *Kovalenko Alexey Gavrilovich* (alexey.gavrilovich.kovalenko@rambler.ru), the Dept. of Mathematics and Business-Informatics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.