

ВЛИЯНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ИЗДЕРЖЕК ПРЕДПРИЯТИЯ НА ДИНАМИКУ ЕГО ПРИБЫЛИ

В статье представлена однофакторная математическая динамическая модель экономического развития предприятия, модернизирующего технологии производства. Нелинейные связанные дифференциальные уравнения баланса функционирования предприятия учитывают непрерывный распределенный ввод в производство внутренних инвестиций. Эти инвестиции определяются не только уровнем общего объема выпуска продукции, но и уровнем производственных издержек и напрямую связаны с уровнем прибыли предприятия.

Ключевые слова: предприятие, технологии, факторы производства, производственная функция, производственные фонды, ресурсы.

Пусть выпуск готовой продукции некоторого производственного предприятия обеспечивается единственным ресурсом в виде некоторого объема фактора производства Q . На практике он складывается из основного капитала, производственных фондов, привлекаемых в производство трудовых ресурсов, используемых в производстве материалы, применяемых технологий, различного рода инновации и т. д. [1–4]

Способная накапливаться и образовывать определенный фонд кумулятивная величина $Q = Q(t)$ является функцией времени. Переменная времени t предполагается непрерывной, единицей ее измерения служит некоторый производственный период (месяц, квартал, год), а сама функция $Q = Q(t)$ предполагается непрерывной, непрерывно дифференцируемой и ограниченной на числовой полуоси ($0 < t < \infty$).

$$Q_0 < Q(t) < Q_\infty,$$

$$Q_0 = \lim_{t \rightarrow 0} Q(t),$$

$$Q_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t).$$

Выпуск продукции предприятия V обеспечивается степенной производственной функцией Кобба–Дугласа [5]

$$TR = P \cdot Q^a. \quad (1)$$

Здесь a – представляет собой эластичность выпуска ($0 < a < 1$), P – стоимость продукции произведенной на единичный объем ресурса.

Значение производственной функции в начальной точке ($t = 0$) имеет вид

$$TR_0 = P \cdot Q_0^a. \quad (2)$$

* © Сараев А.Л., 2015

Сараев Александр Леонидович (alex.saraev@gmail.com), кафедра математики и бизнес-информатики, Самарский государственный университет, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Это позволяет записать производственную функцию (1) в виде

$$TR = TR_0 \cdot \left(\frac{Q}{Q_0} \right)^a. \quad (3)$$

Общие издержки производства выражаются соотношением

$$TC = H \cdot Q + TFC. \quad (4)$$

Здесь H – коэффициент пропорциональных издержек, TFC – постоянные издержки.

Прибыль предприятия $PR = TR - TC$ определится формулой

$$PR = TR_0 \cdot \left(\frac{Q}{Q_0} \right)^a - H \cdot Q - TFC. \quad (5)$$

Вычислим значение изменений объема фактора производства ΔQ за некоторый малый промежуток времени Δt .

Приращение ΔQ будет включать в себя частичную амортизацию ресурса в процессе производства

$$A(t) = -\alpha \cdot Q(t) \cdot \Delta t, \quad (6)$$

частичное восстановление ресурса за счет внешней экзогенной поддержки в виде государственных инвестиций в производство предприятия

$$B(t) = G(t) \cdot \Delta t, \quad (7)$$

и частичное восстановление фактора производства за счет внутренних эндогенных инвестиций

$$W(t) = \int_{-\infty}^t R(t, \tau) \cdot I(\tau) \cdot d\tau. \quad (8)$$

Здесь α – доля выбывшего за единицу времени объема фактора производства Q , $W(t)$ – объем инвестиций, накопленный предприятием в моменту времени t , $R(t, \tau)$ – функция распределения постепенного и непрерывного ввода инвестиций за весь период работы предприятия, $I(\tau)$ – инвестиции, сделанные в момент времени τ . При этом функция распределения ввода инвестиций $R(t, \tau)$ удовлетворяет условию [6]

$$\int_{\tau}^{\infty} R(t, \tau) \cdot d\tau = 1. \quad (9)$$

В случае реализации стационарного процесса инвестирования формула (8) принимает вид

$$W(t) = \int_{-\infty}^t R(t - \tau) \cdot I(\tau) \cdot d\tau, \quad (10)$$

Для широко применяемого на практике экспоненциального распределения ввода инвестиций $R(t - \tau) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot (t - \tau)}$ объем инвестиций (10) выражается соотношением

$$W(t) = \lambda \cdot \int_{-\infty}^t e^{-\lambda \cdot (t - \tau)} \cdot I(\tau) \cdot d\tau, \quad (11)$$

Легко видеть, что интегральное уравнение (11) эквивалентно дифференциальному уравнению

$$\frac{dW(t)}{dt} = \lambda \cdot I(t) - \lambda \cdot W(t). \tag{12}$$

Размер вводимых в производство эндогенных инвестиций определяется уровнем прибыли предприятия и выражается соотношением

$$I(t) = \mu \cdot PR(t) = \mu \cdot (TR(t) - TC(t)).$$

Таким образом уравнение (12) принимает вид

$$\frac{dW(t)}{dt} = \lambda \cdot \mu \cdot (TR(t) - TC(t)) - \lambda \cdot W(t), \tag{13}$$

Здесь μ – норма накопления внутренних эндогенных инвестиций.

Таким образом, соотношения для баланса изменений объемов факторов производства Q имеют вид [6]

$$\Delta Q(t) = \theta(t) \cdot (A(t) + B(t) + W(t)) \cdot \psi(\xi) \cdot \Delta t. \tag{14}$$

Здесь $\xi = \frac{TR(t)}{TR_\infty}$, $TR_\infty = TR_0 \cdot \left(\frac{Q_\infty}{Q_0}\right)^a$ – предельное значение выпуска продукции

производства. Функция $\psi(\xi)$ изменяется на единичном отрезке ($0 \leq \psi(\xi) \leq 1$) и ограничивает рост фактора производства Q до своего предельного значения, а функция $\theta(t)$ так же изменяется на единичном отрезке ($0 \leq \theta(t) \leq 1$), представляет собой удельную скорость изменения ресурса Q и описывает либо эволюционное развитие предприятия, либо смену его технологического уклада, либо его кризисные явления.

В качестве функции $\psi(\xi)$ можно выбрать либо степенную функцию

$$\psi(\xi) = 1 - \xi^\lambda, \tag{15}$$

либо экспоненциальную функцию

$$\psi(\xi) = \exp\left(\frac{-\lambda \cdot \xi}{1 - \xi}\right). \tag{16}$$

Здесь параметр λ описывает интенсивность стремления функции $\psi(\xi)$ к своему предельному нулевому значению.

На рис. 1 и рис. 2 показаны графики функций (15) и (16) в зависимости от параметра ξ . Цифры у кривых – значения параметра λ .

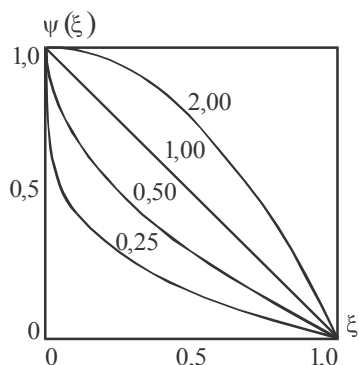


Рис. 1

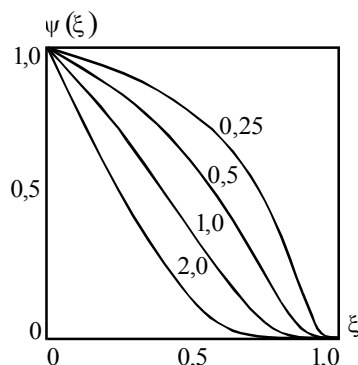


Рис. 2

Предельный переход в соотношении (14) при $\Delta t \rightarrow 0$ приводит к нелинейному дифференциальному уравнению

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \theta(t) \cdot (-\alpha \cdot Q(t) + W(t) + G(t)) \cdot \psi(\xi). \quad (17)$$

Уравнения (13) и (17) образуют систему нормальных нелинейных связанных уравнений первого порядка. Исключая из них величину $TR(t)$, находим

$$\begin{cases} \frac{dQ(t)}{dt} = \theta(t) \cdot (-\alpha \cdot Q(t) + W(t) + G(t)) \cdot \psi(\xi), \quad \xi = \left(\frac{Q(t)}{Q_\infty}\right)^a \\ \frac{dW(t)}{dt} + \lambda \cdot W(t) = \lambda \cdot \mu \cdot \left(TR_0 \cdot \left(\frac{Q}{Q_0}\right)^a - H \cdot Q - TFC \right) \end{cases} \quad (18)$$

Начальные условия для системы (11) имеют вид

$$\begin{cases} Q(0) = Q|_{t=0} = Q_0, \\ W(0) = W|_{t=0} = W_0. \end{cases} \quad (19)$$

Стационарным решением задачи Коши (18) и (19) являются значения

$$\begin{cases} Q = Q_\infty, \\ W = W_\infty. \end{cases}$$

Здесь

$$W_\infty = TR_0 \cdot \left(\frac{Q_\infty}{Q_0}\right)^a - H \cdot Q_\infty - TFC. \quad (20)$$

В общем случае нелинейная задача Коши (18) и (19) не имеет аналитического решения и может быть решена только численно.

Формы интегральных кривых системы (18) зависят от уровня отклонения функции относительной удельной скорости роста фактора производства $\theta = \theta(t)$ от единицы и ширины этого уровня. Размер такого отклонения определяет варианты развития процесса переоборудования рассматриваемого предприятия. Для значений функций $\theta = \theta(t)$ близких к единице система (18), описывает монотонный эволюционный процесс работы предприятия. Для близких к нулю и для отрицательных значений функции $\theta = \theta(t)$ уравнения (18) описывают процессы смены технологий производства и кризисные явления динамики предприятия. Для детального описания этих процессов в некоторой окрестности момента времени $t = t^*$ может быть с успехом использована функция [6]

$$\theta(t) = 1 - \omega \cdot \exp\left(-\frac{(t-t_s)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right). \quad (21)$$

Здесь ω – максимальное значение глубины падений удельных скоростей роста, σ – размер ширины временного интервала перестройки технологий производства или кризиса предприятия.

Если на предприятии происходит несколько, разнесенных во времени, смен технологических укладов производства, то в качестве функции относительной удельной скорости роста фактора производства целесообразно выбрать произведение функции вида (21)

$$\Theta = \prod_{s=1}^n \theta_s(t) = \prod_{s=1}^n \left(1 - \omega_s \cdot \exp\left(-\frac{(t-t_s^*)^2}{2 \cdot \sigma_s^2}\right) \right). \quad (22)$$

На рис. 3 представлены графики функций выпуска продукции TR , затрат TC и прибыли PR , рассчитанные по формулам (18) – (21), для случая эволюционного экономического развития предприятия ($\omega = 0$).

На рис. 4 представлены графики функций выпуска продукции TR , затрат TC и прибыли PR , рассчитанные по формулам (18)– 21), для случая смены технологического уклада в рамках экономического развития предприятия ($\omega = 0$).

На рис. 5 представлены графики функций выпуска продукции TR , затрат TC и прибыли PR , рассчитанные по формулам (18)–(21), для случая кризисного экономического развития предприятия ($\omega = 0$).

Расчетные данные приведены в таблице.

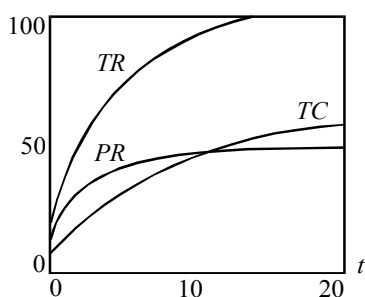


Рис. 3

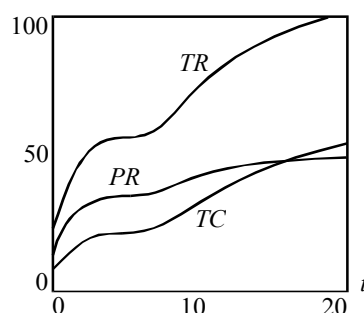


Рис. 4

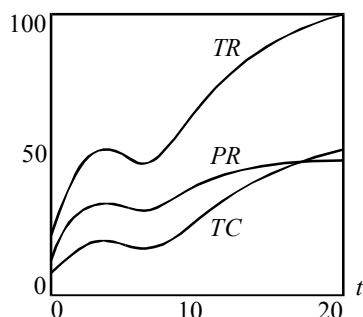


Рис. 5

Таблица

Расчетные данные

$\alpha = 0,1$	$\lambda = 2,0$	$\mu = 0,75$
$a = 0,55$	$Q_0 = 10$	$Q_\infty = 250$
$TR_0 = 10$	$G = 20$	$H = 0,25$
$TFC = 5$	$t_* = 5$	$\sigma = 2$

Графики функции прибыли предприятия PR на рис. 3–5 показывают, что во всех трех вариантах экономического развития, несмотря на смену технологического уклада предприятия или попадания предприятия в условия экономического кризиса, в дальнейшем происходит рост удельной скорости роста фактора производства, ситуация выправляется и предприятие снова переходит на стабильный выпуск продукции в новых условиях.

Библиографический список

1. Дубровина Н. А., Сараев А. Л., Сараев Л. А. К теории нелинейной динамики многофакторных экономических систем // Вестник Самарского государственного университета. 2014. № 2(113). С. 186–191.
2. Дубровина Н. А., Сараев Л. А. Модель экономического развития машиностроения, учитывающая кумулятивную динамику факторов производства // Вестник Самарского государственного университета. 2014. № 4(115). С. 177 – 183.
3. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Особенности динамики выпуска продукции и производственных факторов модернизируемых предприятий // Вестник Самарского государственного университета. 2014. № 6(117). С. 251–260.

4. Сараев А.Л. Динамическая многофакторная модель модернизации производственного предприятия / А. Л. Сараев // Вестник Самарского государственного университета. 2015. № 5(127). С. 224–232.
5. Сараев А.Л. Уравнения нелинейной динамики кризисных явлений для многофакторных экономических систем // Вестник Самарского государственного университета. 2015. № 2(124). С. 262–272.
6. Егорова А.Ю., Сараев А.Л., Сараев Л.А. Вариант динамической модели переоборудования производственного предприятия, учитывающей эффект запаздывания внутренних инвестиций // Вестник Самарского государственного университета. 2015. № 5(127). С. 210–216.

References

1. Dubrovina N.A., Saraev A.L., Saraev L.A. On the theory of nonlinear dynamics of multifactor economic systems. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2014, no. 2(113), pp. 186–191 [in Russian].
2. Dubrovina N.A., Saraev L.A. Model of economic development of machine building industry taking into consideration cumulative dynamics of factors of production. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2014, no. 4(115), pp. 177–183 [in Russian].
3. Saraev A.L., Saraev L.A. Peculiarities of dynamics of production output and production factors of modernized enterprises. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2014, no. 6(117), pp. 251–260 [in Russian].
4. Saraev A.L. Dynamic multifactor model of modernization of an industrial enterprise. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2015, no. 5(127), pp. 224–232 [in Russian].
5. Saraev A.L. Equations of non-linear dynamics of crisis phenomena for multifactor economic systems. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2015, no. 2(124), pp. 262–272 [in Russian].
6. Egorova A.Yu., Saraev A.L., Saraev L.A. Variant of dynamic model of reequipment of industrial enterprise taking into consideration lagged effect of domestic investments. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2015, no. 5(127), pp. 210–216 [in Russian].

*A.L. Saraev**

INFLUENCE OF PRODUCTION COSTS OF AN ENTERPRISE ON THE DYNAMICS OF ITS PROFIT

In the published article dynamic single-factor mathematical model of economic development of an enterprise, modernizing production technologies is presented. Non-linear differential equations related to the functioning of the company balance sheet account for continuous distribution of input into the production of domestic investment. These investments are determined not only by the level of total production, but also by the level of production costs and are directly related to the level of profits of the enterprise.

Key words: enterprise, technologies, production factors, production function, production assets, resources.

Статья поступила в редакцию 11/VIII/2015.
The article received 11/VIII/2015.

* *Saraev Alexander Leonidovich* (alex.saraev@gmail.com), Department of Mathematics and Business Informatics, Samara State University, 1, Acad. Pavlov Street, Samara, 443011, Russian Federation.