Сараев А.Л.
Математическая модель структурной модернизации производства для многофакторной экономической системы // Вестник Самарского государственного университета. Серия «Экономика и управление». 2015. № 9/1 (131). С. 284–292

УДК 330.101.54

А.Л. Сараев *

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТРУКТУРНОЙ МОДЕРНИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА ДЛЯ МНОГОФАКТОРНОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В статье разработана модель динамики прибыли и затрат многофакторной производственной экономической системы, находящейся в условиях структурной модернизации производства. Предложен вариант структурно-феноменологического подхода к описанию взаимодействия производственных компонентов этой системы. Получены уравнения динамики процесса модернизации системы в виде замены старого технологического уклада производства на новый технологический уклад. Вычислены макроскопические параметры производственной функции, функции затрат и функции прибыли экономической системы в целом.

Ключевые слова: затраты, макроскопические свойства, модернизация, предприятие, прибыль, производственная функция, ресурсы, структура, усреднение, факторы производства, экономическая система.

Пусть для производства и выпуска продукции некоторой экономической системы (предприятия, холдинга, отрасли) требуется конечное множество ресурсов, представимых в виде n-мерного вектора пространства R^n объемов факторов производства

$$\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_n).$$

Компонентами этого вектора Q_i могут быть основной капитал (производственные фонды), трудовые ресурсы, используемые в производстве материалы, технологии и т. д. Каждому радиус-вектору $\mathbf{Q}$ n-мерного евклидова пространства, представляющему собой конфигурацию ресурсов, ставится в соответствие некоторая точка $N = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$ в декартовой системе координат. Совокупность всех таких точек пространства образует некоторую область, трактуемую как математический континуум однопродуктового распределенного производства.

Выпуск продукции производства TR обеспечивается многофакторной производственной функцией Кобба-Дугласа

$$TR = R \cdot \prod_{i=1}^{n} Q_i^{a_i}. \qquad (1)$$

Здесь a_i представляют собой эластичности выпуска по соответствующему ресурсу, R – стоимость продукции произведенной на единичные объемы ресурсов.

---

* © Сараев А.Л., 2015

Сараев Александр Леонидович (alex.saraev@gmail.com), кафедра математики и бизнес-информатики, Самарский государственный университет, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Переменные пропорциональные затраты производства TVC выражаются в виде линейной комбинации

$$TVC = \sum_{i=1}^{n} TV_i = \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot Q_i \,. \tag{2}$$

Величины $TV_i = P_i \cdot Q_i$ представляют собой затраты, связанные с использованием фактора производства Q_i, а величина P_i означает стоимость затрат на единичные объемы этого ресурса.

Переменные сверхпропорциональные затраты производства TSC выражаются в виде суммы

$$TSC = \sum_{i=1}^{n} TS_i = \sum_{i=1}^{n} \left(S_i \cdot Q_i\right)^{b_i} \,. \tag{3}$$

Здесь сверхпропорциональные затраты $TS_i = \left(S_i \cdot Q_i\right)^{b_i}$ связаны с использованием фактора производства Q_i, а величина S_i есть стоимость затрат на единичные сверхпропорциональные объемы этого ресурса, b_i − показатели нелинейности для сверхпропорциональных затрат.

Прибыль $PR = TR - TVC - TSC - TFC$, представляющая собой разность между стоимостью выпуска продукции и стоимостью затрат на его производство, выражается соотношением

$$PR = R \cdot \prod_{i=1}^{n} Q_i^{a_i} - \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot Q_i - \sum_{i=1}^{n} S_i \cdot Q_i^{b_i} - TFC \,. \tag{4}$$

Здесь TFC − постоянные затраты предприятия.

Предположим, что рассматриваемая экономическая система подвергается некоторой модернизации с полной или частичной сменой технологических укладов. При этом в ее структуре возникает и развивается новый компонент производства, как правило, с более высоким уровнем выпуска продукции производства и более низким уровнем производственных затрат. Такой ситуации соответствует внедрение новых технологий, использование современных материалов, рациональное использование основных фондов и квалифицированных трудовых ресурсов.

Очевидно, что макроскопическое поведение экономической системы в целом и ее характеристики будут определяться как числовыми параметрами производственных функций и функций затрат каждого компонента, так и способом взаимодействия этих компонентов производства между собой.

В евклидовом n-мерном пространстве распределенного производства общему объему продукции производства можно поставить в соответствие геометрический объем $V = \prod_{i=1}^{n} Q_{1i}$, а объему продукции модернизированного производства можно поставить в соответствие геометрический объем $V_2 = \prod_{s=1}^{n} Q_{2i}$, объему продукции старого производства будет соответствовать объем $V_1 = V - V_2$.

Тогда формула (2) для переменных пропорциональных затрат принимает вид

$$TVC_s = \sum_{i=1}^{n} P_{si} \cdot Q_{si} \,, \tag{5}$$

формула (3) для переменных сверхпропорциональных затрат записывается в виде

$$TSC_s = \sum_{i=1}^{n} \left(S_{si} \cdot Q_{si}\right)^{b_{si}} \ . \tag{6}$$

Формулы для производственных функций компонентов производства имеют вид

$$TR_s = R_s \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(Q_{si}\right)^{a_{si}} \ . \tag{7}$$

Здесь Q_{si} − объемы факторов компонентов производства и линейные размеры объемов V и V_2, $(s = 1, 2)$.

Стоимость продукции произведенной на единицы объемов ресурсов R_s представляются в виде произведения единиц объемов ресурсов каждого фактора производства в отдельности

$$R_s = \prod_{i=1}^{n} \left(R_{si}\right)^{a_{si}} \ , \tag{8}$$

а многофакторная производственная функция записывается в виде произведения

$$TR_s = \prod_{i=1}^{n} TR_{si} \ , \tag{9}$$

Здесь $TR_{si} = \left(P_{si} \cdot Q_{si}\right)^{a_{si}}$.

Для установления макроскопических характеристик всего неоднородного производства в целом необходимо установить связь между средними значениями величин выпуска продукции $\langle TR \rangle$, пропорциональных затрат $\langle TVC \rangle$, сверхпропорциональных затрат $\langle TSC \rangle$ и факторов производства $\langle Q_i \rangle$.

Вычисление всех этих величин выполняется в соответствии с алгоритмами процедуры усреднения локальных соотношений для затрат и локальных производственных функций, описанных в работах [1−5].

Макроскопическая величина $\langle TV_i \rangle$, представляющая собой усредненные пропорциональные затраты, связанные с использованием среднего фактора производства $\langle Q_i \rangle$, находится по формуле

$$\langle TV_i \rangle = P_i^* \cdot \langle Q_i \rangle . \tag{10}$$

Здесь

$$P_i^* = P_{1i} \cdot \frac{q_i + \omega_2 \cdot (p_i - 1)}{q_i - \omega_2 \cdot (p_i - 1) \cdot (q_i - 1)}, \quad p_i = \frac{P_{2i}}{P_{1i}}, q_i = \frac{Q_{2i}}{Q_{1i}}, \omega_2 = \prod_{i=1}^{n} q_i . \tag{11}$$

звездочкой обозначены эффективные значения величин.

Макроскопическая величина $\langle TS_i \rangle$, представляющая собой усредненные сверхпропорциональные затраты, связанные с использованием среднего фактора производства $\langle Q_i \rangle$, находится из уравнения

$$\langle TS_i \rangle^{b_{1i}^{-1}} \cdot \frac{q_i^2 \cdot \langle TS_i \rangle^{\left(b_{2i}^{-1} - b_{1i}^{-1}\right)\omega_2 \cdot q_i^{-1}} - (q_i - 1) \cdot \left(q_i + (s_i - 1) \cdot \omega_2\right)}{q_i + \omega_2 \cdot (s_i - 1)} = \langle Q_i \rangle. \tag{12}$$

Здесь $s_i = \dfrac{S_{2i}}{S_{1i}}$.

Если показатели нелинейности для сверхпропорциональных затрат одинаковы для обоих компонентов производства $b_{1i} = b_{2i} = b_i$, то уравнение (12) принимают вид

$$\langle TS_i \rangle = \left(S_i^* \cdot \langle Q_i \rangle\right)^{b_i}. \tag{13}$$

Здесь

$$S_i^* = S_{1i} \cdot \frac{q_i + \omega_2 \cdot (s_i - 1)}{q_i - \omega_2 \cdot (s_i - 1) \cdot (q_i - 1)}. \tag{14}$$

Макроскопические постоянные затраты неоднородного производства представляют собой среднее значение постоянных затрат компонентов производства и вычисляются по правилу смесей

$$\langle TFC \rangle = (1 - \omega_2) \cdot TFC_1 + \omega_2 \cdot TFC_2. \tag{15}$$

Средняя величина $\langle TR_i \rangle$, представляющая собой усредненный выпуск продукции, связанный с использованием среднего фактора производства $\langle Q_i \rangle$, находится из уравнения

$$\langle TR_i \rangle^{a_{1i}^{-1}} \cdot \frac{q_i^2 \cdot \langle TR_i \rangle^{\left(a_{2i}^{-1} - a_{1i}^{-1}\right)\omega_2 \cdot q_i^{-1}} - (q_i - 1) \cdot \left(q_i + (r_i - 1) \cdot \omega_2\right)}{q_i + \omega_2 \cdot (r_i - 1)} = \langle Q_i \rangle. \tag{16}$$

Здесь $r_i = \dfrac{R_{2i}}{R_{1i}}$.

Если показатели нелинейности для сверхпропорциональных затрат одинаковы для обоих компонентов производства $a_{1i} = a_{2i} = a_i$, то уравнение (16) принимает вид

$$\langle TR_i \rangle = \left(R_i^* \cdot \langle Q_i \rangle\right)^{a_i}. \tag{17}$$

Здесь

$$R_i^* = R_{1i} \cdot \frac{q_i + \omega_2 \cdot (r_i - 1)}{q_i - \omega_2 \cdot (r_i - 1) \cdot (q_i - 1)}. \tag{18}$$

Макроскопическая функция прибыли модернизируемого предприятия вычисляется по формуле

$$\langle PR \rangle = \langle TR \rangle - \langle TVC \rangle - \langle TSC \rangle - \langle TFC \rangle \tag{19}$$

При полной или частичной модернизации производства, сопровождающейся заменой и вытеснением старого производства новым производством, его объемное содержание ω_2 и соответствующие относительные размеры q_i будут меняться от нуля до единицы. В общем случае зависимости скоростей изменений этих размеров от изменения объемного содержания будут не постоянными. Процесс модернизации предприятия допускает условное разделение на несколько этапов.

В начале процесса для сравнительно небольших значений ω_2 происходит относительно медленное формирование организации нового производства. Этот начальный этап характеризуется плавным ростом величин объемного содержания ω_2 и относительных размеров q_i. Далее для средних значений ω_2 развитие нового производства ускоряется, а для значений ω_2 сравнимых с единицей рост нового производства замедляется и сопровождается асимптотическим полным вытеснением старого производства.

Деление процесса модернизации на два этапа достаточно условно, так как на практике оба процесса наблюдаются параллельно с преобладанием одного из них в разных стадиях развития. Поскольку объемное содержание нового производства удовлетворяет неравенству $0 \le \omega_2 \le 1$, то целесообразно ввести вспомогательную переменную

$$\xi = \frac{\omega_2}{1-\omega_2}, \tag{20}$$

описывающую протяженность процесса модернизации предприятия, и изменяющейся на полу бесконечном интервале $(0 \le \xi \le +\infty)$. Значение параметра $\xi = 0$ соответствует началу процесса модернизации и отсутствию новой нового производства, а неограниченное увеличение параметра $\xi \to \infty$ соответствует асимптотическое приближение к концу процесса модернизации и исчезновению старого производства.

Процесс возникновения и развития нового производства может быть описан кинетическими уравнениями роста относительных размеров q_i нового производства. Легко видеть, что в общем случае приращение величины Δq_i на малом отрезке $\Delta\xi$ можно считать пропорциональным произведению трех функций – $\theta_i(t)\cdot\varphi_i(q_i)\cdot\psi_i(q_i)$. Функции $\varphi_i(q_i)$ обеспечивают рост размеров q_i, функции $\psi_i(q_i), (0 \le \psi_i(q_i) \le 1)$ ограничивают их рост до единичного предельного значения, а функции $\theta_i(\xi), (0 \le \theta_i(\xi) \le 1)$ представляют собой удельные скорости изменения величин q_i, и описывает либо эволюционное развитие экономической системы, либо смену ее технологических укладов, либо ее кризисные явления. Таким образом, соотношение для баланса изменения величины q_i имеет вид

$$\Delta q_i = \theta_i(\xi)\cdot\varphi_i(q_i)\cdot\psi_i(q_i)\cdot\Delta\xi$$

Предельный переход при $\Delta\xi \to 0$ приводит к нелинейному дифференциальному уравнению

$$\frac{dq_i}{d\xi} = \theta_i(\xi)\cdot\varphi_i(q_i)\cdot\psi_i(q_i). \tag{21}$$

Начальное условие для уравнения (21) имеет вид

$$q_i\big|_{\xi=0} = 0. \tag{22}$$

Функции $\varphi_i(q_i)$ в общем случае могут быть представлены в виде степенного ряда

$$\varphi(q_i) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{in}\cdot q_i^n, \tag{23}$$

а в качестве функции $\psi(q_i)$ можно выбрать либо степенную функцию

$$\psi(q_i) = 1 - q_i^{\lambda_i}, \tag{24}$$

либо выбрать экспоненциальную функцию

$$\psi(q_i) = \exp\left(\frac{-\lambda_i \cdot q_i}{1 - q_i}\right). \tag{25}$$

Здесь параметры λ_i описывает интенсивность стремления функции $\psi(q_i)$ к своему предельному нулевому значению.

На рис. 1 показаны кривые функции (23) в зависимости от размера q_i.

На рис. 2 показаны кривые функции (25) в зависимости от размера q_i.

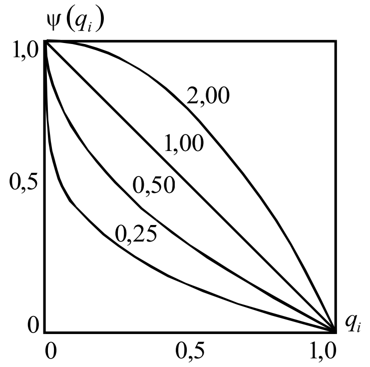

Рис. 1. Графики функции $\psi(q_i) = 1 - q_i^{\lambda_i}$.

Цифры у кривых – значения параметра λ_i

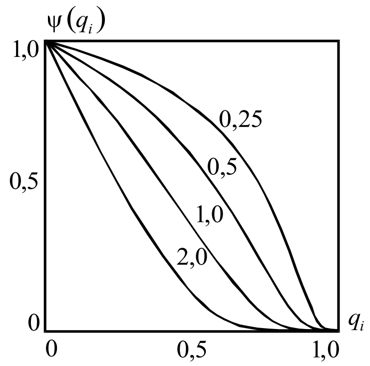

Рис. 2. Графики функции

$$\psi(q_i) = \exp\left(\frac{-\lambda_i \cdot q_i}{1 - q_i}\right).$$

Цифры у кривых – значения параметра λ_i

Если в формуле (23) ограничиться первыми двумя слагаемыми, а в функции (24) положить все параметры $\lambda_i = 1$, то уравнение (21) принимает вид

$$\frac{dq_i}{d\xi} = \theta_i(\xi) \cdot (u_i + v_i \cdot q_i) \cdot (1 - q_i). \tag{26}$$

Здесь $u_i = a_{i0}, v_i = a_{i1}$. Аналитическое решение задачи Коши (26), (22) имеет вид

$$q_i = \frac{\eta_i - 1}{\eta_i + v_i},$$
$$\eta_i = \exp\left((u_i + v_i) \cdot \int_0^{\xi} \theta_i(x) \cdot dx\right). \tag{27}$$

Если процесс возникновения и развития нового производства является однородным и равномерным, то функции удельной скорости роста объемного содержания нового производства тождественно равны единице $(\theta_i(\xi) \equiv 1)$, и соотношение (23) принимают вид

$$q_i = \frac{\eta_i - 1}{\eta_i + v_i},$$
$$\eta_i = \exp\left(\left(u_i + v_i\right)\cdot \xi\right). \tag{28}$$

Возвращаясь в соответствии с формулой (20) к величине объемного содержания ω_2, находим

$$q_i = \frac{\eta_i - 1}{\eta_i + v_i},$$
$$\eta_i = \exp\left(\left(u_i + v_i\right)\cdot \frac{\omega_2}{1-\omega_2}\right). \tag{29}$$

Форма интегральных кривых уравнений (21) определяются уровнем отклонения функций $\theta_i = \theta_i(\xi)$ от единицы, который задает варианты развития процесса развития экономической системы [6–8].

Для значений этих функций, близких к единице, кривые, построенные в соответствии с решениями уравнений (21), описывают монотонный эволюционный процесс работы экономической системы. Для близких к нулю и для отрицательных значений функции $\theta_i = \theta_i(\xi)$ интегральные кривые уравнений (21) описывают процессы смены технологических укладов экономической системы и кризисные явления ее динамики.

Если полная или частичная замена технологического уклада экономической системы происходит в некоторой окрестности точки $\xi = \xi^*$, то процесс замедления, провала и последующего восстановления экономического роста выпуска продукции может быть достаточно точно описан функциями [9]

$$\theta_i(\xi) = 1 - \omega_i \cdot \exp\left(-\frac{\left(\xi - \xi^*\right)^2}{2\cdot \sigma_i^2}\right). \tag{30}$$

Здесь ω_i – максимальные значения глубин падений удельных скоростей роста, σ_i – размеры ширины интервалов перестройки технологий производства или кризиса экономической системы.

Если экономическая система претерпевает несколько смен кризисных технологических укладов производства в различных точках ξ_s^*, то в качестве функций относительной удельной скорости роста целесообразно выбрать произведение функций вида (29)

$$\Theta_i = \prod_{s=1}^{n} \theta_{is}(t) = \prod_{s=1}^{n}\left(1 - \omega_{is}\cdot \exp\left(-\frac{\left(\xi - \xi_s^*\right)^2}{2\cdot \sigma_{is}^2}\right)\right). \tag{31}$$

В частном случае при $n = 3$ полученные результаты совпадают с трехфакторной моделью, построенной в работе автора [10].

Библиографический список

1. Сараев А.Л., Сараев Л.А. К расчету эффективных параметров оптимизации производства с микроструктурой // Вестник Самарского государственного университета. 2012. № 1 (92). С. 231–236.

2. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Прогнозирование эффективных характеристик затрат неоднородного производства // Вестник Самарского государственного университета. 2012. № 4 (95). С. 109–114.

3. Сараев А.Л., Сараев Л.А. К теории структурной модернизации производственных предприятий // Вестник Самарского государственного университета. 2012. № 10 (101). С. 160–169.

4. Сараев А.Л., Сараев Л.А. К оценке прибыли и затрат предприятий, модернизирующих структуру производства // Вестник Самарского государственного университета. 2013. № 1 (102). С. 186–195.

5. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Прогнозирование прибыли и затрат предприятия в условиях структурной модернизации // Вестник Самарского государственного университета. 2014. № 4 (115). С. 184–192.

6. Дубровина Н.А., Сараев А.Л., Сараев Л.А. К теории нелинейной динамики многофакторных экономических систем // Вестник Самарского государственного университета. 2014. № 2(113). С. 186–191.

7. Дубровина Н.А., Сараев Л.А. Модель экономического развития машиностроения, учитывающая кумулятивную динамику факторов производства // Вестник Самарского государственного университета. 2014. № 4(115). С. 177–183.

8. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Особенности динамики выпуска продукции и производственных факторов модернизируемых предприятий // Вестник Самарского государственного университета. 2014. № 6(117). С. 251–260.

9. Сараев А.Л. Динамическая многофакторная модель модернизации производственного предприятия // Вестник Самарского государственного университета. 2015. № 5(127). С. 224–232.

10. Сараев А.Л. Модель формирования прибыли и затрат производственного предприятия в условиях структурной модернизации // Вестник Самарского государственного университета. 2015. № 8(130). С. 192–199.

References

1. Saraev A.L., Saraev L.A. On the calculation of effective parameters of optimization of production with microstructure. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2012, no. 1(92), pp. 231–236 [in Russian].

2. Saraev A.L., Saraev L.A. Prognostication of effective characteristics of costs of inhomogeneous production. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University]. Samara, 2012, no. 4(95), pp. 109–114 [in Russian].

3. Saraev A.L., Saraev L.A. On the theory of structural modernization of industrial enterprises. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University]. Samara, 2012, no. 10(101), pp. 160–169 [in Russian].

4. Saraev A.L., Saraev L.A. On the estimate of profit and costs of enterprises modernizing the structure of production. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University]. Samara, 2013, no. 1(102), pp. 186–195 [in Russian].

5. Saraev A.L., Saraev L.A. Prognostication of profits and costs of an enterprise in conditions of a structural modernization. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University]. Samara, 2014, no. 4(115), pp. 184–192 [in Russian].

6. Dubrovina N.A., Saraev A.L., Saraev L.A. On the theory of nonlinear dynamics of multifactor economic systems. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2014, no. 2(113), pp. 186–191 [in Russian].

7. Dubrovina N.A., Saraev L.A. Model of economic development of machine building industry taking into consideration cumulative dynamics of factors of production. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2014, no. 4(115), pp. 177–183 [in Russian].

8. Saraev A.L., Saraev L.A. Peculiarities of dynamics of production output and production factors of modernized enterprises. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2014, no. 6(117), pp. 251–260 [in Russian]

9. Saraev A.L. Dynamic multifactor model of modernization of an industrial enterprise. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2015, no. 5(127), pp. 224–232 [in Russian].

10. Saraev A.L. Model of formation of profit and costs of an industrial enterprise in conditions of structural modernizations. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2015, no. 8(130), pp. 192–199 [in Russian].

A.L. Saraev*

MATHEMATICAL MODEL OF STRUCTURAL MODERNIZATION OF PRODUCTION FOR MULTIFACTOR ECONOMIC SYSTEM

In the published article, the model of dynamics of income and expenses of multifactor productive economic system that is in the conditions of structural modernization of production is developed. A variant of structural and phenomenological approach to the description of interaction of the components of the production system is suggested. The equations of dynamics of the process of modernization of the system as a replacement of the old technological order of production on a new technological order are received. We calculate macroscopic parameters of the production function, cost functions and profit function of the economic system as a whole.

Key words: costs, macroscopic properties, modernization, enterprise, profit, production function, resources, structure, averaging, factors of production, economic system.

Статья поступила в редакцию 10/VII/2015.
The article received 10/VII/2015.

* *Saraev Alexander Leonidovich* (alex.saraev@gmail.com), Department of Mathematics and Business Informatics, Samara State University, 1, Acad. Pavlov Street, Samara, 443011, Russian Federation.