Барышева Е.Н., Сараев А.Л., Тюкавкин Н.М.
Динамическая модель запаздывания эндогенных и экзогенных инвестиций в освоение капиталовложений в производственное предприятие // Вестник Самарского государственного университета. Серия «Экономика и управление». 2015. № 9/1 (131). С. 245–251

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ЭКОНОМИКИ

УДК 330.101.54

*Е.Н. Барышева, А.Л. Сараев, Н.М. Тюкавкин**

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАПАЗДЫВАНИЯ ЭНДОГЕННЫХ И ЭКЗОГЕННЫХ ИНВЕСТИЦИЙ В ОСВОЕНИЕ КАПИТАЛОВЛОЖЕНИЙ В ПРОИЗВОДСТВЕННОЕ ПРЕДПРИЯТИЕ

В статье предложена математическая модель динамики освоения капиталовложений в производственное предприятие, находящееся в условиях смены технологий производства. Построены связанные нелинейные дифференциальные уравнения баланса для такого предприятия, которые учитывают эффекты непрерывного распределенного ввода в производство внутренних и внешних инвестиций.

Ключевые слова: предприятие, технологии, факторы производства, производственная функция, производственные фонды, ресурсы.

Рассмотрим однофакторное производственное предприятие, которое выпускает готовую продукцию затрачивая определенный ресурс в виде некоторого объема фактора производства Q. Этот объем представляет собой основные производственные фонды и является функцией времени $Q = Q(t)$. Переменная времени t предполагается непрерывной, единицей ее измерения служит так называемый производственный период (месяц, квартал, год), а сама функция $Q = Q(t)$ предполагается непрерывной, непрерывно дифференцируемой и ограниченной на числовой полуоси $(0 < t < \infty)$ [1–3].

$$Q_0 < Q(t) < Q_\infty,$$

$$Q_\infty = \lim_{t\to\infty} Q(t),\ \lim_{t\to 0} Q(t) = Q_0.$$

Выпуск продукции производством предприятия TR обеспечивается степенной производственной функцией Кобба-Дугласа [4]

* © Барышева Е.Н., Сараев А.Л., Тюкавкин Н.М., 2015
Барышева Евгения Николаевна (barisheva_zh@hotmail.com), *Сараев Александр Леонидович* (alex.saraev@gmail.com), кафедра математики и бизнес-информатики, *Тюкавкин Николай Михайлович* (tnm-samara@mail.ru), кафедра экономики инноваций, Самарский государственный университет, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

$$TR = P \cdot Q^a \cdot \tag{1}$$

Здесь степенной показатель производственной функции $a, (0 < a < 1)$ представляет собой эластичность выпуска, P – стоимость продукции, произведенной на единичный объем ресурса.

Значение производственной функции в начальной точке $(t = 0)$ имеет вид

$$TR_0 = P \cdot Q_0^a. \tag{2}$$

Это позволяет записать производственную функцию (1) в виде

$$TR = TR_0 \cdot \left(\frac{Q}{Q_0}\right)^a. \tag{3}$$

Значения изменений объема фактора производства ΔQ за некоторый малый промежуток времени Δt определяются их частичными амортизациями в процессе производства

$$A(t) = -\alpha \cdot Q(t) \cdot \Delta t, \tag{4}$$

и их частичными восстановлениями за счет внутренних эндогенных инвестиций

$$U(t) = \int_{-\infty}^{t} R(t,\tau) \cdot I(\tau) \cdot d\tau, \tag{5}$$

и их частичными восстановлениями за счет внешней экзогенной поддержки в виде либо государственных инвестиций, либо в виде инвестиций частных инвесторов в производство предприятия

$$V(t) = \int_{-\infty}^{t} S(t,\tau) \cdot J(\tau) \cdot d\tau, \tag{6}$$

Здесь α – доля выбывшего за единицу времени объема фактора производства Q; $U(t)$ – объем эндогенных инвестиций, накопленных предприятием в моменту времени t; $R(t,\tau)$ – функция распределения постепенного и непрерывного ввода эндогенных инвестиций за весь период работы предприятия; $I(\tau)$ – эндогенные инвестиции, сделанные в момент времени τ; $V(t)$ – объем экзогенных инвестиций, накопленных предприятием в моменту времени t; $S(t,\tau)$ – функция распределения постепенного и непрерывного ввода экзогенных инвестиций за весь период работы предприятия; $J(\tau)$ – экзогенные инвестиции, сделанные в момент времени τ.

При запаздывании капиталовложений поток инвестиций во времени перераспределяется, но при этом сумма инвестиций за весь период остается постоянной. Таким образом функции распределения ввода инвестиций $R(t,\tau)$ и $S(t,\tau)$ удовлетворяют условиям нормировки

$$\int_{\tau}^{\infty} R(t,\tau) \cdot d\tau = 1, \quad \int_{\tau}^{\infty} S(t,\tau) \cdot d\tau = 1. \tag{7}$$

Будем считать, что запаздывание в освоении капиталовложений не меняется со временем. В этом случае процесс инвестирования и ввода инвестиций является стационарным и формулы (5) и (6) принимают вид:

$$U(t)=\int_{-\infty}^{t} R(t-\tau)\cdot I(\tau)\cdot d\tau\,,$$
$$V(t)=\int_{-\infty}^{t} S(t-\tau)\cdot J(\tau)\cdot d\tau\,. \tag{8}$$

Для экспоненциальных распределений ввода инвестиций $R(t-\tau)=\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot(t-\tau)}$ и $S(t-\tau)=\eta\cdot e^{-\eta\cdot(t-\tau)}$ соотношения (8) принимают вид:

$$U(t)=\lambda\cdot\int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda\cdot(t-\tau)}\cdot I(\tau)\cdot d\tau\,,$$
$$V(t)=\eta\cdot\int_{-\infty}^{t} e^{-\eta\cdot(t-\tau)}\cdot I(\tau)\cdot d\tau\,. \tag{9}$$

Здесь λ и η – параметры распределения, которые описывают степень влияния ранее сделанных инвестиций на капиталовложения текущего момента. Чем больше величины λ и η, тем меньше это влияние и наоборот.

С помощью дифференцирования обеих частей интегральных уравнений (9) по времени t легко убедиться, что они эквивалентны дифференциальным уравнениям

$$\frac{dU(t)}{dt}=\lambda\cdot I(t)-\lambda\cdot U(t),$$
$$\frac{dV(t)}{dt}=\eta\cdot J(t)-\eta\cdot V(t), \tag{10}$$

или

$$\frac{dU(t)}{dt}=\lambda\cdot\mu\cdot TR(t)-\lambda\cdot U(t),$$
$$\frac{dV(t)}{dt}=\eta\cdot\nu\cdot TR(t)-\eta\cdot V(t), \tag{11}$$

Здесь μ – норма накопления эндогенных инвестиций; ν – норма бюджетной обеспеченности от экзогенных инвестиций.

Теперь соотношение для баланса изменений объема фактора производства Q можно записать в виде [5; 6]

$$\Delta Q(t)=\theta(t)\cdot\left(A(t)+U(t)+V(t)\right)\cdot\psi(\xi)\cdot\Delta t\,. \tag{12}$$

Здесь $\xi=\dfrac{TR(t)}{TR_\infty}=\left(\dfrac{Q(t)}{Q_\infty}\right)^a$, $TR_\infty=TR_0\cdot\left(\dfrac{Q_\infty}{Q_0}\right)^a$ – предельное значение выпуска продукции производства. Функция $\psi(\xi)$ изменяется на единичном отрезке $(0 \le \psi(\xi) \le 1)$ и ограничивает рост фактора производства Q до своего предельного значения. Функция $\theta(t)$ изменяется на единичном отрезке $(0 \le \theta(t) \le 1)$ и представляет собой удельную скорость изменения ресурса Q. Эта функция описывает либо эволюционное развитие предприятия, либо смену его технологического уклада, либо его кризисные явления.

В качестве функции $\psi(\xi)$ можно выбрать либо степенную функцию

$$\psi(\xi) = 1 - \xi^h, \tag{13}$$

либо экспоненциальную функцию

$$\psi(\xi) = \exp\left(\frac{-h \cdot \xi}{1-\xi}\right). \tag{14}$$

Здесь параметр h описывает интенсивность стремления функции $\psi(\xi)$ к своему предельному нулевому значению.

Предельный переход в соотношении (12) при $\Delta t \to 0$ приводит к нелинейному дифференциальному уравнению

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \theta(t) \cdot (-\alpha \cdot Q(t) + U(t) + V(t)) \cdot \psi(\xi). \tag{15}$$

Уравнения (11) и (15) образуют систему нормальных нелинейных связанных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{dQ(t)}{dt} = \theta(t) \cdot (-\alpha \cdot Q(t) + U(t) + V(t)) \cdot \psi(\xi), \\ \dfrac{dU(t)}{dt} = \lambda \cdot \mu \cdot TR(t) - \lambda \cdot U(t), \\ \dfrac{dV(t)}{dt} = \eta \cdot \nu \cdot TR(t) - \eta \cdot V(t). \end{cases} \tag{16}$$

Подставляя в уравнения (16) формулу (3), находим

$$\begin{cases} \dfrac{dQ(t)}{dt} = \theta(t) \cdot (-\alpha \cdot Q(t) + U(t) + V(t)) \cdot \psi(\xi), \\ \dfrac{dU(t)}{dt} = \lambda \cdot \mu \cdot TR_0 \cdot \left(\dfrac{Q(t)}{Q_0}\right)^a - \lambda \cdot U(t), \\ \dfrac{dV(t)}{dt} = \eta \cdot \nu \cdot TR_0 \cdot \left(\dfrac{Q(t)}{Q_0}\right)^a - \eta \cdot V(t). \end{cases} \tag{17}$$

Начальные условия для системы (17) имеют вид

$$\begin{cases} Q(0) = Q|_{t=0} = Q_0\,, \\ U(0) = U_{t=0} = U_0\,, \\ V(0) = V|_{t=0} = V_0\,. \end{cases} \tag{18}$$

Стационарным решением задачи Коши (17) и (18) являются значения

$$\begin{cases} Q = Q_\infty\,, \\ U = U_\infty\,, \\ V = V_\infty\,. \end{cases}$$

Здесь

$$\begin{cases} U_\infty = \mu \cdot TR_0 \cdot \left(\dfrac{Q_\infty}{Q_0} \right)^a, \\ V_\infty = \nu \cdot TR_0 \cdot \left(\dfrac{Q_\infty}{Q_0} \right)^a. \end{cases} \tag{19}$$

В общем случае нелинейная задача Коши (17) и (18) не имеет аналитического решения и может быть решена только численно.

Формы интегральных кривых уравнений (17) определяются уровнем отклонения функции относительной удельной скорости роста фактора производства $\theta = \theta(t)$ от единицы. Размер такого отклонения задает варианты развития процесса динамики рассматриваемого предприятия. Для значений функций $\theta = \theta(t)$, близких к единице, кривые, построенные в соответствии с решениями уравнений (17), описывают монотонный эволюционный процесс работы предприятия. Для близких к нулю и для отрицательных значений функции $\theta = \theta(t)$ интегральные кривые уравнений (17) описывают процессы смены технологий производства и кризисные явления динамики предприятия. Для описания процессов смены технологий производства и кризисных явлений динамики предприятия в некоторой окрестности момента времени $t = t^*$ может быть использована функция [6]

$$\theta(t) = 1 - \omega \cdot \exp\left(-\frac{(t - t_*)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right). \tag{20}$$

Здесь ω – максимальное значение глубины падений удельных скоростей роста, σ – размер ширины временного интервала перестройки технологий производства или кризиса предприятия.

Если на предприятии происходит несколько разнесенных во времени смен технологических укладов производства, то в качестве функции относительной удельной скорости роста фактора производства целесообразно выбрать произведение функция вида (20)

$$\Theta = \prod_{s=1}^{n} \theta_s(t) = \prod_{s=1}^{n} \left(1 - \omega_s \cdot \exp\left(-\frac{\left(t - t_s^*\right)^2}{2 \cdot \sigma_s^2} \right) \right). \tag{21}$$

На рис. 1 представлены интегральные кривые для функций $TR(t)$, $U(t)$ $V(t)$, построенные по результатам численного решения задачи Коши (17), (18) для случая монотонного эволюционного процесса работы предприятия $(\omega = 0)$.

На рис. 2 представлены интегральные кривые для функций $TR(t)$, $U(t)$ $V(t)$, построенные по результатам численного решения задачи Коши (17), (18) для случая смены технологий производства предприятия $(\omega = 1)$.

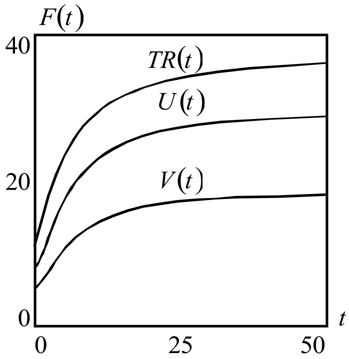

Рис. 1

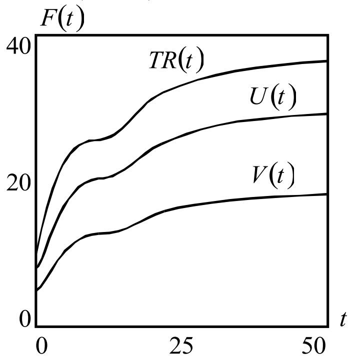

Рис. 2

На рис. 3 представлены интегральные кривые для функций $TR(t)$, $U(t)$ $V(t)$, построенные по результатам численного решения задачи Коши (17), (18) для случая кризиса производства предприятия $(\omega = 1,5)$. Расчетные данные приведены в таблице

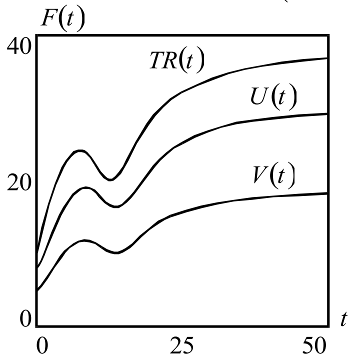

Рис. 3

Таблица

Расчетные данные

$\alpha = 0,05$	$a = 0,5$	$\lambda = 1,0$	$\eta = 1$
$\mu = 0,5$	$\nu = 0,8$	$t_* = 10$	$\sigma = 3$
$h = 1$	$Q_0 = 10$	$Q_\infty = 200$	$TR_0 = 10$

Графики функций выпуска продукции, внутренних и внешних инвестиций предприятия на рис. 1–3 показывают, что во всех трех вариантах экономического развития, несмотря на смену технологического уклада предприятия или попадания предприятия в условия экономического кризиса, в дальнейшем происходит увеличение удельной скорости роста фактора производства, ситуация выправляется и предприятие снова переходит на стабильный выпуск продукции в новых условиях.

Библиографический список

1. Дубровина Н.А., Сараев А.Л., Сараев Л.А. К теории нелинейной динамики многофакторных экономических систем // Вестник Самарского государственного университета. 2014. № 2(113). С. 186–191.

2. Дубровина Н. А., Сараев Л. А. Модель экономического развития машиностроения, учитывающая кумулятивную динамику факторов производства // Вестник Самарского государственного университета. 2014. № 4(115). С. 177–183.

3. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Особенности динамики выпуска продукции и производственных факторов модернизируемых предприятий // Вестник Самарского государственного университета. 2014. № 6(117). С. 251–260.

4. Сараев А.Л. Динамическая многофакторная модель модернизации производственного предприятия // Вестник Самарского государственного университета. 2015. № 5(127). С. 224–232.
5. Сараев А.Л. Уравнения нелинейной динамики кризисных явлений для многофакторных экономических систем // Вестник Самарского государственного университета. 2015. № 2(124). С. 262–272.
6. Егорова А.Ю., Сараев А.Л., Сараев Л.А. Вариант динамической модели переоборудования производственного предприятия, учитывающей эффект запаздывания внутренних инвестиций // Вестник Самарского государственного университета. 2015. № 5(127). С. 210–216.

References

1. Dubrovina N.A., Saraev A.L., Saraev L.A. On the theory of nonlinear dynamics of multifactor economic systems. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2014, no. 2(113), pp. 186–191 [in Russian].
2. Dubrovina N.A., Saraev A.L. Model of economic development of mechanical engineering, taking into account the cumulative dynamics of factors of production. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2014, no. 4(115), pp. 177–183 [in Russian].
3. Saraev A.L., Saraev L.A. Peculiarities of dynamics of production output and production factors of modernized enterprises. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2014, no. 6(117), pp. 251–260 [in Russian].
4. Saraev A.L. Dynamic multifactor model of modernization of an industrial enterprise. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2015, no. 5(127), pp. 224–232 [in Russian].
5. Saraev A.L. Equations of nonlinear dynamics of crisis phenomena for multifactor economic systems. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2015, no. 2(124), pp. 262–272 [in Russian].
6. Egorova A.Yu., Saraev A.L., Saraev L.A. Variant of dynamic model of reequipment of industrial enterprise taking into consideration lagged effect of domestic investments. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2015, no. 5(127), pp. 210–216 [in Russian].

E.N. Barysheva, A.L. Saraev, N.M. Tyukavkin*

DYNAMIC MODEL OF LAG OF ENDOGENOUS AND EXOGENOUS INVESTMENTS IN THE DEVELOPMENT OF INVESTMENTS IN MANUFACTURING COMPANY

In the published article the mathematical model of dynamics of development of investments in manufacturing company in the conditions of change of production technologies. Coupled nonlinear differential equations for the balance of such an enterprise, which takes into account the effects of continuous distribution of input in the production of domestic and foreign investments are built.

Key words: enterprise, technologies, production factors, production function, production assets, resources.

Статья поступила в редакцию 12/VII/2015.
The article received 12/VII/2015.

* *Barysheva Evgeniya Nikolaevna* (barisheva_zh@hotmail.com), *Saraev Alexander Leonidovich* (alex.saraev@gmail.com), Department of Mathematics and Business-Informatics, *Tyukavkin Nikolay Mikhailovich* (tnm-samara@mail.ru), Department of Economics of Innovations, Samara State University, 1, Acad. Pavlov Street, Samara, 443011, Russian Federation.