Сараев А.Л.
Динамическая многофакторная модель модернизации производственного предприятия // Вестник Самарского государственного университета. 2015. № 5 (127). С. 224–232

УДК 330.101.54

А.Л. Сараев*

ДИНАМИЧЕСКАЯ МНОГОФАКТОРНАЯ МОДЕЛЬ МОДЕРНИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

В публикуемой статье предложена математическая многофакторная модель динамики экономического развития предприятия, образованного двумя производствами, согласно которой в результате модернизации производственных факторов новое производство вытесняет старое. Уравнения баланса такой двухкомпонентной системы описываются связанными нелинейными дифференциальными уравнениями. Показано, что максимальная эффективность работы такого предприятия проявляется при неполном вытеснении старого производства.

Ключевые слова: предприятие, технологии, факторы производства, производственная функция, производственные фонды, ресурсы.

Пусть производственное предприятие выпускает готовую продукцию посредством двух производств, одно из которых подлежит полной замене на новое производство путем модернизации. Старое производство предприятия затрачивает определенный набор ресурсов в виде объемов факторов производства $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$, новое производство предприятия затрачивает свой набор ресурсов в виде объемов факторов производства $\mathbf{P} = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$. Компоненты этих векторов пространства R^n могут представлять собой элементы основного капитала, производственные фонды, трудовые ресурсы, расходные производственные материалы, технологии, различного рода инновации и т. д. [1–4].

Объемы факторов производства $Q_i = Q_i(t)$ и $P_i = P_i(t)$ являются функциями времени. Они представляют собой способные накапливаться и образовывать определенные фонды кумулятивные величины. Переменная времени t предполагается непрерывной, единицей ее измерения служит так называемый производственный период (месяц, квартал, год). Эти функции предполагаются непрерывными, непрерывно дифференцируемыми и ограниченными на числовой полуоси $(0 < t < \infty)$.

$$0 < Q_i(t) < Q_i^{\infty}, 0 < P_i(t) < P_i^{\infty},$$

$$Q_i^{\infty} = \lim_{t\to\infty} Q_i(t), \lim_{t\to 0} Q_i(t) = Q_i^0,$$

$$P_i^{\infty} = \lim_{t\to\infty} P_i(t), \lim_{t\to 0} P_i(t) = P_i^0,$$

Выпуски продукции старым производством предприятия U и новым производством предприятия V обеспечиваются двумя производственными функциями Кобба-Дугласа [7]

Сараев Александр Леонидович (alex.saraev@gmail.com), кафедра математики и бизнес-информатики, Самарский государственный университет, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

$$U = M \cdot \prod_{s=1}^{n} Q_s^{a_s}\ ,\ V = N \cdot \prod_{s=1}^{n} P_s^{b_s}\ . \tag{1}$$

Здесь степенные показатели производственных функций $a_s, (0 < a_s < 1)$ и $b_s, (0 < b_s < 1)$ представляют собой эластичности выпуска по соответствующим ресурсам, M, N – стоимости продукций произведенных на единичные объемы ресурсов.

Вычислив значения производственных функций в начальной точке $(t = 0)$

$$U^0 = M \cdot \prod_{s=1}^{n} \left(Q_s^0\right)^{a_s}\ ,\ V^0 = N \cdot \prod_{s=1}^{n} \left(P_s^0\right)^{b_s}, \tag{2}$$

запишем производственные функции (1) в виде

$$U = U^0 \cdot \prod_{s=1}^{n} q_s^{a_s}\ ,\ V = V^0 \cdot \prod_{s=1}^{n} p_s^{b_s}\ . \tag{3}$$

Здесь $q_s = \dfrac{Q_s}{Q_s^0}$ и $p_s = \dfrac{P_s}{P_s^0}$ – безразмерные факторы производств.

Приращения объемов факторов производства ΔQ_i на некотором малом промежутке времени Δt складываются из частичных амортизаций в процессе производства

$$A_i^q(t) = -\alpha_i^q \cdot \theta_i^q(t) \cdot Q_i(t) \cdot \Delta t, \tag{4}$$

из частичных восстановлений за счет внутренних эндогенных инвестиций

$$I_i^q(t) = \theta_i^q(t) \cdot \left(\beta_i^q \cdot U(t) + \beta_i^p \cdot V(t)\right) \cdot \Delta t, \tag{5}$$

и из частичных восстановлений за счет внешней экзогенной поддержки в виде государственных и других инвестиций в производства предприятия

$$G_i^q(t) = \eta_i^q \cdot \theta_i^q(t) \cdot G^q(t) \cdot \Delta t\,. \tag{6}$$

Здесь α_i^q – доля выбывшего за единицу времени объема фактора производства Q_i, β_i^q, β_i^p – нормы накопления внутренних эндогенных инвестиций, приходящаяся на объемы факторов производства Q_i, P_i, η_i^q – доля объема государственных инвестиций $G^q(t)$, приходящаяся на объемы факторов производства Q_i, $\theta_i^q(t)$ – функции относительной удельной скорости изменения объемов факторов производства $\left(0 \le \theta_i^q(t) \le 1\right)$. Следует отметить, что величины η_i^q не являются независимыми, а удовлетворяют условию $\sum_{s=1}^{n} \eta_s^q = 1$.

Поскольку рост объемов факторов старого производства $Q_i = Q_i(t)$ всегда ограничен предельными возможностями выпуска продукции производства, то скорость их изменений должна быть пропорциональна величине, характеризующей замедление роста выпуска продукции.

Таким образом, соотношения для баланса изменений объемов факторов производства Q_i имеют вид

$$\Delta Q_i = \theta_i^q \cdot \left(-\alpha_i^q \cdot Q_i + \beta_i^q \cdot U + \beta_i^p \cdot V + \eta_i^q \cdot G^q\right) \cdot \left(1 - \frac{U}{U^\infty}\right) \cdot \Delta t \ .$$

Здесь

$$U^\infty = U^0 \cdot \prod_{s=1}^{n} \left(q_s^\infty\right)^{a_s}$$

– предельное значение выпуска продукции старого производства экономической системы, $q_s^\infty = \dfrac{Q_s^\infty}{Q_s^0}$.

Предельный переход при $\Delta t \to 0$ дает систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dQ_i}{dt} = \theta_i^q \cdot \left(-\alpha_i^q \cdot Q_i + \beta_i^q \cdot U + \beta_i^p \cdot V + \eta_i^q \cdot G^q\right) \cdot \left(1 - \frac{U}{U^\infty}\right). \qquad (7)$$

С помощью функций (3) система нелинейных дифференциальных уравнений (7) может быть записана в безразмерной форме относительно величин q_i

$$\frac{dq_i}{dt} = \theta_i^q \cdot \left(-\alpha_i^q \cdot q_i + \mu_i^q \cdot u + \mu_i^p \cdot v + \eta_i^q \cdot g_i^q\right) \cdot \left(1 - \frac{u}{u^\infty}\right). \qquad (8)$$

Здесь

$$u = \prod_{s=1}^{n} q_s^{a_s}\ ,\ u^\infty = \prod_{s=1}^{n} \left(q_s^\infty\right)^{a_s}\ ,\ \mu_i^q = \beta_i^q \cdot \frac{U_0}{Q_i^0}\ ,\ \mu_i^p = \beta_i^p \cdot \frac{V_0}{Q_i^0}\ ,\ g_i^q = \frac{G^q}{Q_i^0}.$$

Совершенно аналогично приращения объемов факторов нового производства ΔP_k на некотором малом промежутке времени Δt складываются из частичных амортизаций в процессе производства

$$A_k^p(t) = -\alpha_k^p \cdot \theta_k^p(t) \cdot P_k(t) \cdot \Delta t\ , \qquad (9)$$

из частичных восстановлений за счет внутренних эндогенных инвестиций

$$I_k^p(t) = \theta_k^p(t) \cdot \left(\beta_k^q \cdot U(t) + \beta_k^p \cdot V(t)\right) \cdot \Delta t\ , \qquad (10)$$

и из частичных восстановлений за счет внешней экзогенной поддержки в виде государственных и других инвестиций в производства предприятия

$$G_k^p(t) = \eta_k^p \cdot \theta_k^p(t) \cdot G^p(t) \cdot \Delta t\ . \qquad (11)$$

Здесь α_k^p – доля выбывшего за единицу времени объема фактора производства P_k, β_k^q, β_k^p – нормы накопления внутренних эндогенных инвестиций, приходящаяся на объемы факторов производства Q_k, P_k, η_k^p –доля объема государственных инвестиций $G^p(t)$, приходящаяся на объемы факторов производства P_k, $\theta_k^p(t)$ –

функции относительной удельной скорости изменения объемов факторов производства $\left(0 \le \theta_k^p(t) \le 1\right)$. Следует отметить, что величины η_k^p не являются независимыми, а удовлетворяют условию $\sum_{s=1}^{n} \eta_s^p = 1$.

Точно так же рост объемов факторов нового производства $P_k = P_k(t)$ всегда ограничен предельными возможностями выпуска его продукции, и скорость их изменений будет пропорциональна величине, характеризующей замедление роста выпуска продукции. Таким образом, соотношения для баланса изменений объемов факторов производства P_k имеют вид

$$\Delta P_k = \theta_k^p \cdot \left(-\alpha_k^p \cdot P_k + \beta_k^q \cdot U + \beta_k^p \cdot V + \eta_k^p \cdot G^p\right) \cdot \left(1 - \frac{V}{V^{\infty}}\right) \cdot \Delta t .$$

Здесь

$$V^{\infty} = V^0 \cdot \prod_{s=1}^{n} \left(p_s^{\infty}\right)^{b_s}$$

– предельное значение выпуска продукции нового производства экономической системы, $p_s^{\infty} = \dfrac{P_s^{\infty}}{P_s^0}$.

Предельный переход при $\Delta t \to 0$ дает систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dP_k}{dt} = \theta_k^p \cdot \left(-\alpha_k^p \cdot P_k + \beta_k^q \cdot U + \beta_k^p \cdot V + \eta_k^p \cdot G^p\right) \cdot \left(1 - \frac{V}{V^{\infty}}\right). \tag{12}$$

С помощью функций (3) система нелинейных дифференциальных уравнений (12) может быть записана в безразмерной форме относительно величин p_k

$$\frac{dp_k}{dt} = \theta_k^p \cdot \left(-\alpha_k^p \cdot p_k + \omega_k^q \cdot u + \omega_k^p \cdot v + \eta_k^p \cdot g_k^p\right) \cdot \left(1 - \frac{v}{v^{\infty}}\right). \tag{13}$$

Здесь

$$v = \prod_{s=1}^{n} p_s^{b_s}, \quad v^{\infty} = \prod_{s=1}^{n} \left(p_s^{\infty}\right)^{b_s}, \quad \omega_k^q = \beta_k^q \cdot \frac{U_0}{P_k^0}, \quad \omega_k^p = \beta_k^p \cdot \frac{V_0}{P_k^0}, \quad g_k^p = \frac{G^p}{P_k^0}.$$

Уравнения (8) и (13), представляющие собой обобщенную модель нелинейной динамики развития предприятия, образуют систему нормальных нелинейных связанных уравнений первого порядка, а ее начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned} &q_i(0) = q_i^0 = 1, (i = 1,2,\ldots,n) \\ &p_k(0) = p_k^0 = 1, (k = 1,2,\ldots,n) \end{aligned} . \tag{14}$$

В общем случае нелинейная задача Коши (8), (13), (14) может быть решена только численно. Очевидно, что формы для интегральных кривых уравнений этой задачи зависят от уровня изменений функций относительных удельных скоростей роста факторов производства $\theta_i^q(t)$ и $\theta_k^p(t)$. Глубина этих изменений определяет варианты развития процесса модернизации рассматриваемого предприятия. Для значений этих функций близких к единице кривые, построенные в соответствии с решениями задача Коши (8), (13), (14), описывают эволюционный процесс модернизации предприятия. Для значений этих функций близких к нулю и для отрицательных значений интегральные кривые модели описывают процессы смены технологий производства и кризисные явления динамики экономической системы.

В качестве примера рассмотрим частный случай предложенной модели, в котором каждое из двух производств предприятия является однофакторным. Кроме того, ограничимся случаем одинаковых удельных скоростей роста $\theta^q(t)=\theta^p(t)=\theta(t)$. Тогда задача Коши (8), (13), (14) принимает вид

$$\frac{dq}{dt}=\theta\cdot\left(-\alpha^q\cdot q+\mu^q\cdot q^a+\mu^p\cdot p^b+\eta^q\cdot g^q\right)\cdot\left(1-\left(\frac{q}{q^\infty}\right)^a\right), \tag{15}$$

$$\frac{dp}{dt}=\theta\cdot\left(-\alpha^p\cdot p+\omega^q\cdot q^a+\omega^p\cdot p^b+\eta^p\cdot g^p\right)\cdot\left(1-\left(\frac{p}{p^\infty}\right)^b\right) \tag{16}$$

$$\begin{aligned} &q(0)=q^0=1,\\ &p(0)=p^0=1. \end{aligned} \tag{17}$$

В жизненном цикле любого предприятия может наступить момент времени $t=t^*$, когда применяемые в производстве технологии морально устаревают и фактически останавливают рост выпуска продукции. При этом удельные скорости $\theta(t)$ роста падают до нуля. Внедрение новых и обновление прежних производственных технологий, перевооружение и модернизация производства могут привести к росту этой функции. Если же удельные скорости $\theta(t)$ роста принимают отрицательные значения, то наступает кризис системы, описываемый уравнениями (15−17).

Такой процесс замедления, провала и последующего восстановления экономического роста выпуска продукции может быть описан уравнением

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{\sigma^2}\cdot\left(t-t^*\right)\cdot(1-\theta), \tag{18}$$

с начальным условием $\theta\left(t^*\right)=1-\omega$. Решением уравнения (18) с таким начальным условием является функция

$$\theta(t)=1-\omega\cdot e^{-\frac{\left(t-t^*\right)^2}{2\cdot\sigma^2}}. \tag{19}$$

Здесь ω −максимальное значение глубины падения удельной скорости роста, σ − значение ширины временного интервала перестройки технологий производства или кризиса экономической системы.

На рис. 1 построены кривые функции (19) для различных значений параметров ω. Цифры у кривых − значения параметра ω. Расчетные значения: $\sigma=3{,}5$ и $t^*=5$.

На рис. 2 построены кривые функции (10) для различных значений параметров σ. Цифры у кривых − значения параметра σ. Расчетные значения: $\omega=1{,}0$ и $t^*=5$.

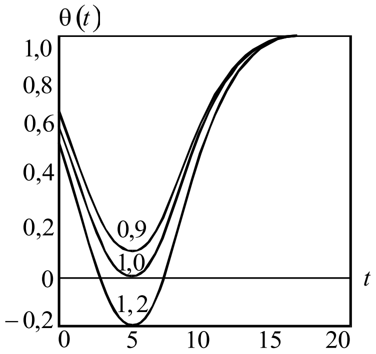

Рис. 1

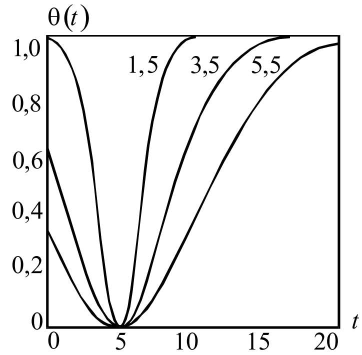

Рис. 2

Динамика замены старого производства новым заключается в том, что новый фактор производства P постепенно заменяет старый фактор производства Q. Математически это выражается в том, что функция предельного значения выпуска продукции первого производства U^{∞} уменьшается до нуля, а функция предельного значения выпуска продукции второго производства V^{∞} неуклонно увеличивается.

Кинетические уравнения такой замены могут в достаточно общем случае иметь вид

$$\frac{dU^{\infty}(t)}{dt} = -\lambda \cdot h \cdot t^{h-1} \cdot U^{\infty}(t) \tag{20}$$

Начальное условие для уравнения (20) имеет вид

$$U^{\infty}(0) = \overline{U} \tag{21}$$

Здесь $\overline{U}$ – предельное значение выпуска продукции первого производства в точке отсчета $(t = 0)$. Очевидно, что функция предельного значения выпуска продукции второго производства $V^{\infty}(t)$ удовлетворяет соотношению

$$V^{\infty}(t) = \overline{W} - U^{\infty}(t) \tag{22}$$

Здесь $\overline{W} = \overline{U} + \overline{V}$, $\overline{V}$ –предельное значение выпуска продукции второго производства в точке отсчета $(t = 0)$. Решение уравнения (20) с начальными условиями (21) дает

$$U^{\infty}(t) = \overline{U} \cdot e^{-\lambda \cdot t^{h}}. \tag{23}$$

Соотношение (22) принимает вид

$$V^{\infty}(t) = \overline{W} - \overline{U} \cdot e^{-\lambda \cdot t^{h}}. \tag{24}$$

На рис. 3 построены кривые функций предельных значений выпуска продукции первого и второго производств по формулам (23) и (24). Расчетные значения приведены в таблице.

Очевидно, что процесс модернизации производств предприятия должен сопровождаться неуклонной передачей всех государственных инвестиций от старого производства к новому производству. Аналогичное кинетическое уравнение имеет вид

$$\frac{d\eta^{q}(t)}{dt} = -\rho \cdot r \cdot t^{r-1} \cdot \eta^{q}(t) \tag{25}$$

Начальное условие для уравнения (25) имеет вид

$$\eta^q(0)=\eta_0^q \tag{26}$$

Здесь η_0^q –относительный объем государственных инвестиций в старое производство в точке отсчета $(t=0)$. Функция относительного объема государственных инвестиций в новое производство $\eta^p(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\eta^p(t)=1-\eta^q(t). \tag{27}$$

Решение задачи Коши (25), (26) имеет вид

$$\eta^q(t)=\eta_0^q\cdot e^{-\rho\cdot t^r}. \tag{28}$$

Соотношение (27) принимает вид

$$\eta^p(t)=1-\eta_0^q\cdot e^{-\rho\cdot t^r}. \tag{29}$$

На рис. 4 построены кривые функций относительного объема государственных инвестиций в новое и старое производства по формулам (19) и (20). Расчетные значения приведены в таблице.

На рис. 5 представлены графики производственных функций каждого производственного компонента и предприятия в целом, построенных по результатам численного решения задачи Коши (15), (16), (17), описывающие процесс замещения одного производства предприятия другим в условиях эволюционного процесса модернизации $\omega=0$. Расчетные значения приведены в таблице.

Таблица

Расчетные значения показателей

$Q^0=1000$	$P^0=500$
$\overline{U}=1500$	$\overline{V}=700$
$a=0{,}5$	$b=0{,}6$
$\mu^q=0{,}15$	$\mu^p=0{,}25$
$\lambda=0{,}05$	$h=1{,}8$
$U^0=500$	$V^0=300$
$G=1000$	$\eta_0^q=0{,}8$
$\alpha^q=0{,}15$	$\alpha^p=0{,}2$
$\omega^q=0{,}35$	$\omega^p=0{,}25$
$\rho=0{,}05$	$r=1{,}8$
$\eta_0^p=0{,}2$	$\sigma=1{,}5$

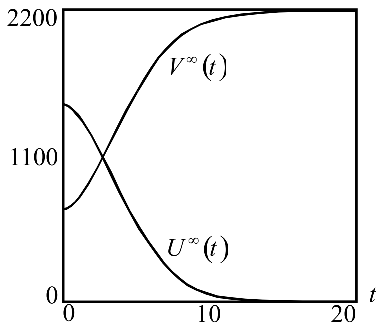

Рис. 3

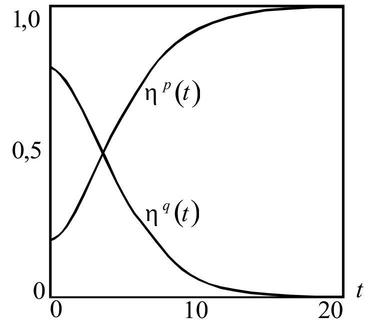

Рис. 4

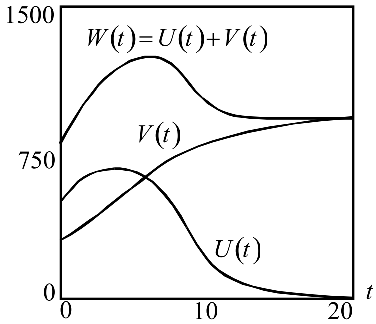

Рис. 5

Численный анализ модели показывает, что в случае эволюционного процесса модернизации максимальный выпуск продукции предприятия происходит в тот ограниченный период времени, когда оба производства работают эффективно параллельно. Затем старое производство демонтируется и предприятие в целом переходит на стабильный выпуск продукции в новых условиях.

На рис. 6 представлены графики производственных функций каждого производственного компонента и предприятия в целом, построенных по результатам численного решения задачи Коши (15), (16), (17), описывающие процесс вытеснения одного производства предприятия другим производством, которое сопровождается сменой технологических укладов с полной временной остановкой работы предприятия $\omega = 1$, $t^* = 5$. Расчетные значения приведены в таблице.

Численный анализ модели в этом случае показывает, что в случае смены технологического уклада предприятия его максимальный выпуск продукции происходит после периода стагнации в ограниченный период времени, когда старое производство еще интенсивно эксплуатируется. Далее осуществляется его вытеснение и предприятие в целом снова переходит на стабильный выпуск продукции в новых условиях.

На рис. 7 представлены графики производственных функций каждого производственного компонента и предприятия в целом, построенных по результатам численного решения задачи Коши (15), (16), (17), описывающие процесс вытеснения одного производства предприятия другим производством, которое помимо смены технологических укладов сопровождается временными кризисными явлениями и элементами временной деградации предприятия $\omega = 1{,}2$; $t^* = 5$. Расчетные значения приведены в таблице.

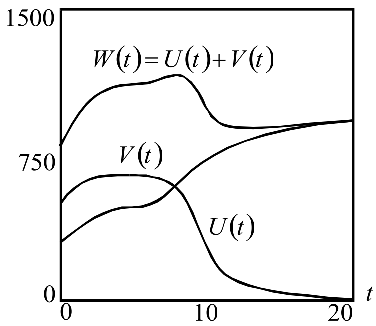

Рис. 6

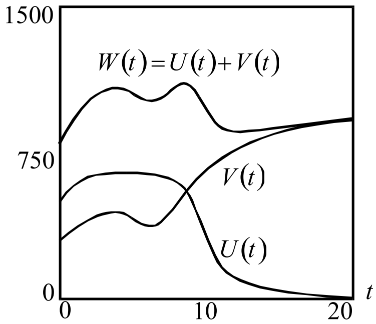

Рис. 7

Здесь численный анализ модели показывает, что в случае смены технологического уклада предприятия, сопровождаемого временными кризисными явлениями и элементами деградации, его максимальный выпуск продукции происходит в весьма ограниченный период времени, после которого предприятие в целом выходит на стабильный выпуск продукции в новых условиях.

Библиографический список

1. Дубровина Н.А., Сараев А.Л. , Сараев Л.А. К теории нелинейной динамики многофакторных экономических систем // Вестник Самарского государственного университета. 2014. № 2(113). С. 186–191.

2. Дубровина Н.А., Сараев Л.А. Модель экономического развития машиностроения, учитывающая кумулятивную динамику факторов производства // Вестник Самарского государственного университета. 2014. № 4(115). С. 177–183.

3. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Особенности динамики выпуска продукции и производственных факторов модернизируемых предприятий // Вестник Самарского государственного университета. 2014. № 6(117). С. 251–260.

4. Сараев А. Л. Уравнения динамики экономического развития предприятия, модернизирующего производственные технологии // Основы экономики, управления и права. 2014. № 3(15). С. 93–100.

References

1. Dubrovina N.A., Saraev A.L., Saraev L.A. On the theory of nonlinear dynamics of multifactor economic systems. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2014, no. 2(113), pp. 186–191 [in Russian].

2. Dubrovina N.A., Saraev L.A. Model of economic development of mechanical engineering that takes into consideration cumulative dynamics of factors of production. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2014, no. 4(115), pp. 177–183 [in Russian].

3. Saraev A.L., Saraev L.A. Peculiarities of dynamics of production output and production factors of modernized enterprises. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2014, no. 6(117), pp. 251–260 [in Russian].

4. Saraev A.L. Equations of dynamics of economic development of enterprises that modernize production technologies. *Osnovy ekonomiki, upravleniia i prava* [Foundations of Economics, Management and Law], 2014, no. 3 (15), pp. 93–100 [in Russian].

A.L. Saraev *

DYNAMIC MULTIFACTOR MODEL OF MODERNIZATION OF PRODUCTION ENTERPRISE

In the published article the mathematical model of dynamics of multifactor economic development of the company formed by two industries, according to which as a result of modernization of production factors, the new production displaces the old. The balance equations of such two-component system are described by coupled nonlinear differential equations. It is shown that the maximum efficiency of such an enterprise is shown in incomplete expulsion of the old production.

Key words: enterprise, technology, production factors, production function, production assets, resources.

* *Saraev Alexander Leonidovich* (alex.saraev@gmail.com), Department of Mathematics and Business-Informatics, Samara State University, 1, Acad. Pavlov Street, Samara, 443011, Russian Federation.