Сараев А.Л., Сараев Л.А.
Модель распределенного освоения капиталовложений в предприятия аэрокосмического кластера // Вестник Самарского государственного университета. Серия «Экономика и управление». 2015. № 9/2 (131). С. 301–308

УДК 330.101.54

А.Л. Сараев, Л.А. Сараев*

МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ОСВОЕНИЯ КАПИТАЛОВЛОЖЕНИЙ В ПРЕДПРИЯТИЯ АЭРОКОСМИЧЕСКОГО КЛАСТЕРА**

В публикуемой статье предложена математическая модель динамики распределенного освоения капиталовложений в предприятия аэрокосмического кластера. Построены связанные нелинейные дифференциальные уравнения баланса для предприятий кластера, которые учитывают эффекты непрерывного распределенного ввода в производство внутренних и внешних инвестиций.

Ключевые слова: кластер, предприятие, технологии, факторы производства, производственная функция, производственные фонды, ресурсы.

Пусть m производственных предприятий образуют кластер, выпускающий готовую продукцию. Каждое такое предприятие затрачивает n определенных типов ресурсов в виде некоторых объемов факторов производства Q_{ij}. Эти объемы представляют собой основные производственные фонды и являются функциями времени $Q_{ij} = Q_{ij}(t)$. Переменная времени t предполагается непрерывной, единицей ее измерения служит так называемый производственный период (месяц, квартал, год), а сами функции $Q_{ij} = Q_{ij}(t)$ – непрерывными, непрерывно дифференцируемыми и ограниченными на числовой полуоси $(0 < t < \infty)$ [1–3].

$$Q_{ij}^0 < Q_{ij}(t) < Q_{ij}^\infty ,$$

$$\lim_{t\to 0} Q_{ij}(t) = Q_{ij}^0 ,$$

$$\lim_{t\to \infty} Q_{ij}(t) = Q_{ij}^\infty .$$

Объемы факторов производства Q_{ij} представляют собой компоненты тензора второго ранга $\mathbf{Q}$, первый индекс i соответствует номеру предприятия кластера, второй индекс j – номеру ресурса этого предприятия.

Сараев Александр Леонидович (alex.saraev@gmail.com), *Сараев Леонид Александрович* (saraev_leo@mail.ru), кафедра математики и бизнес-информатики, Самарский государственный университет, 443011, Российская Федерация, г.Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

** *Работа выполнена в рамках реализации программы повышения конкурентоспособности федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет)» среди ведущих мировых научно-образовательных центров.*

Грант на научно-исследовательскую работу по теме: «Моделирование и оценка динамики факторов и показателей производства структурно-модернизируемых промышленных предприятий (на примере аэрокосмического кластера)».

Части выпуска продукции производств предприятий кластера TR_{is}, соответствующие объемам факторов производства Q_{is}, обеспечиваются производственными функциями Кобба-Дугласа [4]

$$TR_{is} = P_{is} \cdot \left(Q_{is}\right)^{a_{is}}. \tag{1}$$

Здесь степенные показатели производственных функций a_{is}, $\left(0 < a_{is} < 1\right)$ представляют собой эластичности выпуска, P_{is} – стоимости продукций, произведенных на единичные объемы ресурсов.

С помощью значений величин TR_{is} в начальной точке $t = 0$

$$TR_{is}^0 = P_{is} \cdot \left(Q_{is}^0\right)^{a_{is}} \tag{2}$$

можно записать производственные функции (1) в виде

$$TR_{is} = TR_{is}^0 \cdot \left(\frac{Q_{is}}{Q_{is}^0}\right)^{a_{is}}. \tag{3}$$

В целом выпуск продукции предприятия TR_i определяется выражением

$$TR_i = \prod_{s=1}^{n} TR_{is} = \prod_{s=1}^{n} TR_{is}^0 \cdot \left(\frac{Q_{is}}{Q_{is}^0}\right)^{a_{is}} = TR_i^0 \cdot \prod_{s=1}^{n} \left(\frac{Q_{is}}{Q_{is}^0}\right)^{a_{is}}. \tag{4}$$

Здесь $TR_i^0 = \prod_{s=1}^{n} TR_{is}^0$.

Значения изменений объемов факторов производств ΔQ_{ij} за некоторый малый промежуток времени Δt определяются их частичными амортизациями в процессе производства

$$A_{ij}\left(t\right) = -\alpha_{ij} \cdot Q_{ij}\left(t\right) \cdot \Delta t, \tag{5}$$

их частичными восстановлениями за счет внутренних эндогенных инвестиций

$$U_{ij}\left(t\right) = \int_{-\infty}^{t} R_{ij}\left(t, \tau\right) \cdot I_{ij}\left(\tau\right) \cdot d\tau, \tag{6}$$

и их частичными восстановлениями за счет внешней экзогенной поддержки в виде либо государственных инвестиций, либо инвестиций частных инвесторов в производства предприятий

$$V_{ij}\left(t\right) = \int_{-\infty}^{t} S_{ij}\left(t, \tau\right) \cdot J_{ij}\left(\tau\right) \cdot d\tau, \tag{7}$$

Здесь α_{ij} – доли выбывших за единицу времени объемов факторов производства Q_{ij}; $U_{ij}(t)$ – объемы эндогенных инвестиций, накопленных предприятиями в моменту времени t; $R_{ij}(t,\tau)$ – функции распределений постепенных и непрерывных вводов эндогенных инвестиций за весь период работы предприятий, $I_{ij}(\tau)$ – эндогенные инвестиции, сделанные в момент времени τ; $V_{ij}(t)$ – объемы экзогенных инвестиций, накопленных предприятиями в моменту времени t; $S_{ij}(t,\tau)$ – функции распределения постепенного и непрерывного ввода экзогенных инвестиций за весь период работы предприятий; $J_{ij}(\tau)$ – экзогенные инвестиции, сделанные в момент времени τ.

При запаздывании капиталовложений поток инвестиций во времени перераспределяется, но при этом сумма инвестиций за весь период остается постоянной. Таким образом, функции распределения ввода инвестиций $R_{ij}(t,\tau)$ и $S_{ij}(t,\tau)$ удовлетворяют условиям нормировки

$$\int_{\tau}^{\infty} R_{ij}(t,\tau)\cdot d\tau = 1, \quad \int_{\tau}^{\infty} S_{ij}(t,\tau)\cdot d\tau = 1 \tag{8}$$

Будем считать, что запаздывание в освоении капиталовложений не меняется со временем. В этом случае процессы инвестирования и ввода инвестиций являются стационарным и формулы (6) и (7) принимают вид

$$U_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{t} R_{ij}(t-\tau)\cdot I_{ij}(\tau)\cdot d\tau, \tag{9}$$

$$V_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{t} S_{ij}(t-\tau)\cdot J_{ij}(\tau)\cdot d\tau.$$

Для экспоненциальных распределений ввода инвестиций $R_{ij}(t-\tau) = \lambda_{ij}\cdot e^{-\lambda_{ij}\cdot(t-\tau)}$ и $S_{ij}(t-\tau) = \eta_{ij}\cdot e^{-\eta_{ij}\cdot(t-\tau)}$ соотношения (9) принимают вид

$$U_{ij}(t) = \lambda_{ij}\cdot\int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda_{ij}\cdot(t-\tau)}\cdot I_{ij}(\tau)\cdot d\tau, \tag{10}$$

$$V_{ij}(t) = \eta_{ij}\cdot\int_{-\infty}^{t} e^{-\eta_{ij}\cdot(t-\tau)}\cdot J_{ij}(\tau)\cdot d\tau$$

Здесь λ_{ij} и η_{ij} – параметры распределения, которые описывают степень влияния ранее сделанных инвестиций на капиталовложения текущего момента. Чем больше величины λ_{ij} и η_{ij}, тем меньше это влияние и наоборот.

С помощью дифференцирования обеих частей интегральных уравнений (10) по времени t легко убедиться, что они эквивалентны дифференциальным уравнениям

$$\frac{dU_{ij}(t)}{dt}=\lambda_{ij}\cdot I_{ij}(t)-\lambda_{ij}\cdot U_{ij}(t), \tag{11}$$

$$\frac{dV_{ij}(t)}{dt}=\eta_{ij}\cdot J_{ij}(t)-\eta_{ij}\cdot V_{ij}(t),$$

или

$$\frac{dU_{ij}(t)}{dt}=\lambda_{ij}\cdot\mu_{ij}\cdot TR_{ij}(t)-\lambda_{ij}\cdot U_{ij}(t), \tag{12}$$

$$\frac{dV_{ij}(t)}{dt}=\eta_{ij}\cdot\nu_{ij}\cdot TR_{ij}(t)-\eta_{ij}\cdot V_{ij}(t),$$

Здесь μ_{ij} – нормы накоплений эндогенных инвестиций; ν_{ij} – нормы бюджетных обеспеченностей от экзогенных инвестиций.

Теперь соотношение для баланса изменений объема фактора производства Q_{ij} можно записать в виде [5; 6]

$$\Delta Q_{ij}(t)=\theta_{ij}(t)\cdot\left(A_{ij}(t)+U_{ij}(t)+V_{ij}(t)\right)\cdot\psi_{ij}\left(\xi_{ij}\right)\cdot\Delta t\,. \tag{13}$$

Здесь $\xi_{ij}=\dfrac{TR_{ij}(t)}{TR_{ij}^{\infty}}=\left(\dfrac{Q_{ij}(t)}{Q_{ij}^{\infty}}\right)^{a_{ij}}$, $TR_{ij}^{\infty}=TR_{ij}^{0}\cdot\left(\dfrac{Q_{ij}^{\infty}}{Q_{ij}^{0}}\right)^{a_{ij}}$ – предельное значение выпуска продукции производства. Следует отметить, что предельные величины TR_{ij}^{∞} представляют собой в конечном счете ресурсы и производственные факторы для головного предприятия кластера. Они не являются произвольными, а задаются и контролируются руководством всего кластера.

Функции $\psi_{ij}\left(\xi_{ij}\right)$ изменяются на единичном отрезке $\left(0\le\psi_{ij}\left(\xi_{ij}\right)\le 1\right)$ и ограничивают рост фактора производства Q_{ij} до своего предельного значения. Функции $\theta_{ij}(t)$ изменяются на единичном отрезке $\left(0\le\theta_{ij}(t)\le 1\right)$ и представляют собой удельные скорости изменения ресурсов Q_{ij}. Эти функции описывают либо эволюционное развитие предприятий, либо смену их технологических укладов, либо их кризисных явлений.

В качестве функций $\psi\left(\xi_{ij}\right)$ можно выбрать либо степенные функции

$$\psi\left(\xi_{ij}\right)=1-\xi_{ij}^{\,h_{ij}}, \tag{14}$$

либо экспоненциальные функции

$$\psi\left(\xi_{ij}\right)=\exp\left(\frac{-h_{ij}\cdot\xi_{ij}}{1-\xi_{ij}}\right). \qquad (15)$$

Здесь параметры h_{ij} описывают интенсивности стремления функций $\psi_{ij}\left(\xi_{ij}\right)$ к своему предельному нулевому значению.

Предельный переход в соотношении (13) при $\Delta t \to 0$ приводит к нелинейному дифференциальному уравнению

$$\frac{dQ_{ij}(t)}{dt}=\theta_{ij}(t)\cdot\left(-\alpha_{ij}\cdot Q_{ij}(t)+U_{ij}(t)+V_{ij}(t)\right)\cdot\psi_{ij}\left(\xi_{ij}\right). \qquad (16)$$

Уравнения (12) и (16) образуют систему нормальных нелинейных связанных уравнений первого порядка

$$\begin{cases}\dfrac{dQ_{ij}(t)}{dt}=\theta_{ij}(t)\cdot\left(-\alpha_{ij}\cdot Q_{ij}(t)+U_{ij}(t)+V_{ij}(t)\right)\cdot\psi_{ij}\left(\xi_{ij}\right),\\ \dfrac{dU_{ij}(t)}{dt}=\lambda_{ij}\cdot\mu_{ij}\cdot TR_{ij}(t)-\lambda_{ij}\cdot U_{ij}(t),\\ \dfrac{dV_{ij}(t)}{dt}=\eta_{ij}\cdot\nu_{ij}\cdot TR_{ij}(t)-\eta_{ij}\cdot V_{ij}(t).\end{cases} \qquad (17)$$

Подставляя в уравнения (17) формулу (3), находим

$$\begin{cases}\dfrac{dQ_{ij}(t)}{dt}=\theta_{ij}(t)\cdot\left(-\alpha_{ij}\cdot Q_{ij}(t)+U_{ij}(t)+V_{ij}(t)\right)\cdot\psi_{ij}\left(\xi_{ij}\right),\\ \dfrac{dU_{ij}(t)}{dt}=\lambda_{ij}\cdot\mu_{ij}\cdot TR_{ij}^{0}\cdot\left(\dfrac{Q_{ij}(t)}{Q_{ij}^{0}}\right)^{a_{ij}}-\lambda_{ij}\cdot U_{ij}(t),\\ \dfrac{dV_{ij}(t)}{dt}=\eta_{ij}\cdot\nu_{ij}\cdot TR_{ij}^{0}\cdot\left(\dfrac{Q_{ij}(t)}{Q_{ij}^{0}}\right)^{a_{ij}}-\eta_{ij}\cdot V_{ij}(t).\end{cases} \qquad (18)$$

Начальные условия для системы (18) имеют вид

$$\begin{cases}Q_{ij}(0)=Q_{ij}\big|_{t=0}=Q_{ij}^{0},\\ U_{ij}(0)=U_{ij}\big|_{t=0}=U_{ij}^{0},\\ V_{ij}(0)=V_{ij}\big|_{t=0}=V_{ij}^{0}.\end{cases}. \qquad (19)$$

Стационарным решением задачи Коши (18) и (19) являются значения

$$\begin{cases} Q_{ij} = Q_{ij}^{\infty}, \\ U_{ij} = U_{ij}^{\infty}, \\ V_{ij} = V_{ij}^{\infty}. \end{cases}$$

Здесь

$$\begin{cases} U_{ij}^{\infty} = \mu_{ij} \cdot TR_{ij}^{0} \cdot \left(\dfrac{Q_{ij}^{\infty}}{Q_{ij}^{0}} \right)^{a_{ij}}, \\ V_{ij}^{\infty} = \nu_{ij} \cdot TR_{ij}^{0} \cdot \left(\dfrac{Q_{ij}^{\infty}}{Q_{ij}^{0}} \right)^{a_{ij}}. \end{cases} \qquad (20)$$

В общем случае нелинейная задача Коши (18) и (19) не имеет аналитического решения и может быть решена только численно.

Формы интегральных кривых уравнений (18) определяются уровнем отклонения функций относительной удельной скорости роста факторов производства $\theta_{ij}(t)$ от единицы. Размеры такого отклонения задают варианты развития процессов динамики рассматриваемых предприятий. Для значений функций $\theta_{ij}(t)$, близких к единице, кривые, построенные в соответствии с решениями уравнений (18), описывают монотонные эволюционные процессы работы предприятий. Для близких к нулю и для отрицательных значений функций $\theta_{ij}(t)$ интегральные кривые уравнений (18) описывают процессы смены технологий производства и кризисные явления динамики предприятий. Для описания процессов смены технологий производства и кризисные явления динамики предприятия в некоторой окрестности моментов времени t_{ij}^{*} могут быть с использованы функции [6]

$$\theta_{ij}(t) = 1 - \omega_{ij} \cdot \exp\left(-\frac{\left(t - t_{ij}^{*}\right)^{2}}{2 \cdot \sigma_{ij}^{2}} \right). \qquad (21)$$

Здесь ω_{ij} – максимальные значения глубин падений удельных скоростей роста; σ_{ij} – размеры ширины временного интервала перестройки технологий производств или кризисов предприятий.

Выпуск конечной продукции рассматриваемого кластера TR, в свою очередь, тоже обеспечиваются определенной производственной функцией Кобба-Дугласа

$$TR = TR^0 \cdot \prod_{s=1}^{m} \left(\frac{TR_s}{TR_s^0} \right)^{b_s} . \qquad (22)$$

Издержки головного предприятия кластера задаются линейной комбинацией

$$TC = \sum_{s=1}^{m} \sum_{p=1}^{n} A_{sp} \cdot Q_{sp} + TFC . \qquad (23)$$

Таким образом, общая прибыль $PR = TR - TC$ выражается соотношением

$$PR = TR^0 \cdot \prod_{s=1}^{m} \left(\frac{TR_s}{TR_s^0} \right)^{b_s} - \sum_{s=1}^{m} \sum_{p=1}^{n} A_{sp} \cdot Q_{sp} - TFC . \qquad (24)$$

Библиографический список

1. Дубровина Н.А., Сараев А. Л., Сараев Л.А. К теории нелинейной динамики многофакторных экономических систем // Вестник Самарского государственного университета. 2014. № 2(113). С. 186–191.

2. Дубровина Н. А., Сараев Л. А. Модель экономического развития машиностроения, учитывающая кумулятивную динамику факторов производства // Вестник Самарского государственного университета. 2014. № 4(115). С. 177–183.

3. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Особенности динамики выпуска продукции и производственных факторов модернизируемых предприятий // Вестник Самарского государственного университета. 2014. № 6(117). С. 251–260.

4. Сараев А.Л. Динамическая многофакторная модель модернизации производственного предприятия // Вестник Самарского государственного университета. 2015. № 5(127). С. 224–232.

5. Сараев А.Л. Уравнения нелинейной динамики кризисных явлений для многофакторных экономических систем // Вестник Самарского государственного университета. 2015. № 2(124). С. 262–272.

6. Егорова А.Ю., Сараев А.Л., Сараев Л.А. Вариант динамической модели переоборудования производственного предприятия, учитывающей эффект запаздывания внутренних инвестиций // Вестник Самарского государственного университета. 2015. № 5(127). С. 210–216.

References

1. Dubrovina N.A., Saraev A.L., Saraev L.A. On the theory of nonlinear dynamics of multifactor economic systems. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2014, no. 2(113), pp. 186–191 [in Russian].

2. Dubrovina N.A., Saraev L.A. Model of economic development of mechanical engineering that takes into consideration cumulative dynamics of factors of production. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2014, no. 4(115), pp. 177–183 [in Russian]