УДК 330.101.54

А.Л. Сараев*

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

В публикуемой статье предложено обобщение математической модели динамики экономического развития модернизируемого предприятия, представленной в работе [1], согласно которому изменения во времени объемов факторов производства прямо пропорциональны объему выпуска продукции и ограничены предельными возможностями предприятия.

Ключевые слова и фразы: предприятие, технологии, факторы производства, производственная функция, логистической динамики, ресурсы.

Выпуск производственным предприятием готовой продукции обусловлен затратами определенного набора ресурсов − объемов факторов производства $\mathbf{Q}=(Q_1,Q_2,\ldots,Q_n)$. Компонентами такого n − мерного вектора пространства R^n как правило являются основной капитал (производственные фонды), привлекаемые в производство трудовые ресурсы, используемые в производстве материалы, применяемые технологии, различного рода инновации и т.д. [1 −6]

Объемы факторов производства являются функциями времени $Q_i=Q_i(t)$, и представляют собой способные накапливаться и образовать определенные фонды кумулятивные величины. Переменная времени t предполагается непрерывной, единицей ее измерения служит так называемый производственный период (месяц, квартал, год). Функции $Q_i=Q_i(t)$ предполагаются непрерывными, непрерывно дифференцируемыми и ограниченными на всей числовой оси $(-\infty<t<\infty)$.

$$0<Q_i(t)<Q_i^{\infty},\ Q_i^{\infty}=\lim_{t\to\infty}Q_i(t),\ \lim_{t\to-\infty}Q_i(t)=0.$$

Выпуск продукции предприятия V обеспечивается некоторой многофакторной производственной функцией Кобба-Дугласа [7]

$$V=P\cdot\prod_{s=1}^{n}Q_s^{a_s}\ . \tag{1}$$

Здесь степенные показатели производственной функции $a_s,\ (0<a_s<1)$ представляют собой эластичности выпуска по соответствующему ресурсу, P − стоимость продукции произведенной на единичные объемы ресурсов.

Предельное значение производственной функции V^{∞}

$$V^{\infty}=P\cdot\prod_{s=1}^{n}\left(Q_s^{\infty}\right)^{a_s}\ , \tag{2}$$

Сараев Александр Леонидович (alex.saraev@gmail.com), кафедра математики и бизнес−информатики, Самарский государственный университет, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

позволяет записать производственную функцию (1) в виде

$$V = V^{\infty} \cdot \prod_{s=1}^{n} q_s^{a_s}, \quad q_s = \frac{Q_s}{Q_s^{\infty}}. \tag{3}$$

Динамика изменения объема фактора производства Q_i определяется его скоростью $\frac{dQ_i}{dt}$. С одной стороны эта скорость роста фактора производства зависит от его объема. Такая зависимость может быть как линейной, так и нелинейной. В достаточно общем случае такая ее целесообразно описать степенной функцией $Q_i^{b_i}$. Показатель нелинейности $b_i, (0 < b_i < 1)$ характеризует степень влияния текущего значения фактора на его рост.

С другой стороны, рост величин ограничен предельными возможностями предприятия. Поэтому временные изменения величин факторов производства могут быть описаны системой дифференциальных уравнений

$$\frac{d\,Q_i(t)}{d\,t} = \lambda_i(t) \cdot Q_i^{b_i}(t) \cdot \left(V^{\infty} - V(t)\right). \tag{4}$$

Здесь $\lambda_i(t) = \alpha_i \cdot \theta(t)$ – удельные скорости роста факторов производства $Q_i(t)$. Коэффициенты α_i задают интенсивность роста каждого ресурса, а функция $\theta(t)$ определяет длительность периодов смены технологий производства, его цикличность [8; 9].

Подставляя в систему (4) производственную функцию (3), получаем

$$\frac{d\,Q_i(t)}{d\,t} = \alpha_i \cdot V^{\infty} \cdot \theta(t) \cdot Q_i^{b_i} \cdot \left(1 - \prod_{s=1}^{n} q_s^{a_s}(t)\right), \tag{5}$$

или

$$\frac{d\,q_i(t)}{d\,t} = \mu_i \cdot \theta(t) \cdot q_i^{b_i} \cdot \left(1 - \prod_{s=1}^{n} q_s^{a_s}(t)\right). \tag{6}$$

Здесь $\mu_i = \dfrac{\alpha_i \cdot V^{\infty}}{\left(Q_i^{\infty}\right)^{1-b_i}}$.

Решениями систем уравнений (5) или (6) являются интегральные логистические кривые. Система уравнений (5) должна быть дополнена начальными условиями

$$Q_i\big|_{t=0} = Q_i(0) = Q_i^0. \tag{7}$$

Соответственно начальные условия для системы уравнений (6) имеют вид

$$q_i\big|_{t=0} = q_i(0) = q_i^0 = \frac{Q_i^0}{Q_i^{\infty}}. \tag{8}$$

В случае однофакторной модели динамики выпуска продукции предприятия $(n=1)$ система дифференциальных уравнений (6) сводится к одному уравнению первого порядка

$$\frac{d\,q(t)}{d\,t} = \mu \cdot \theta(t) \cdot q^b(t) \cdot \left(1 - q^a(t)\right), \quad \mu = \frac{\alpha \cdot V^{\infty}}{\left(Q^{\infty}\right)^{1-b}}. \tag{9}$$

с начальными условиями

$$q\big|_{t=0} = q(0) = q^0 = \frac{Q^0}{Q^\infty}. \qquad (10)$$

Уравнение с разделяющимися переменными (9) является обобщенным логистическим уравнением Ю.М Свирежева [10]. В частном случае при $b=1$ это уравнение сводится к уравнению М. Розенцвейга, а при $a=b=1$ оно сводится к уравнению П. Ферхюльста. Уравнение (9) в отличие от уравнений М. Розенцвейга и П. Ферхюльста не имеет аналитического решения и его можно решать только численно.

Формы логистических кривых для функций определяются видом функции $\lambda(t)=\alpha\cdot\theta(t)$ –удельной скорости роста фактора производства Q, задающей длительность периодов смены технологий производства и его цикличность. Если эта скорость постоянна, то стандартный график логистической кривой на рис. 1 имеет точку перегиба в некоторый момент времени $t=t^*$.

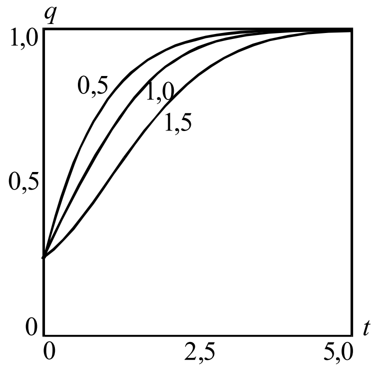

Рис. 1. Цифры у кривых – значения показателя нелинейности b. Расчетные значения параметров: $a=0{,}25;\mu=5;t^*=2;q_0=0{,}25$

В жизненном цикле любого предприятия может наступить момент времени $t=t^*$, когда применяемые в производстве технологии морально устаревают и фактически останавливают рост выпуска продукции. При этом удельная скорость $\lambda(t)=\alpha\cdot\theta(t)$ роста падает до нуля. Внедрение новых и обновление прежних производственных технологий, перевооружение и модернизация производства могут привести к росту этой функции.

Такой процесс замедления и восстановления экономического роста выпуска продукции может быть описан уравнением

$$\frac{d\theta}{dt} = 2p\cdot\frac{\theta}{t-t^*}, \qquad (11)$$

с начальным условием $\theta\left(t^*\right)=0$. Решением уравнения (11) с таким начальным условием является функция

$$\theta(t) = (t-t_i)^{2p}\ . \qquad (12)$$

В этом случае соответствующие логистические кривые для фактора производства Q будут иметь в момент времени $t = t^*$ не только точку перегиба, но и, как показано на рис. 2, точку так называемого минимакса [7].

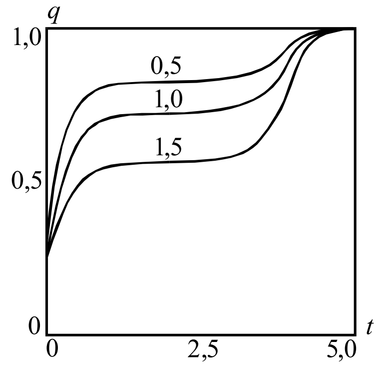

Рис. 2. Цифры у кривых – значения показателя нелинейности b. Расчетные значения параметров: $a = 0{,}25$; $\mu = 2$; $p = 2$; $t^* = 2$; $q_0 = 0{,}25$

Если смена технологий производства предприятия происходит циклично с определенным периодом, то функцию удельной скорости удобно описывать с помощью косинусоиды $\theta(t) = 1 + \cos\left(\pi \cdot \dfrac{t - t^*}{k}\right)$. Логистические кривые, как показано на рис. 3, будут иметь несколько точек минимакса, число которых определяется значением параметра k.

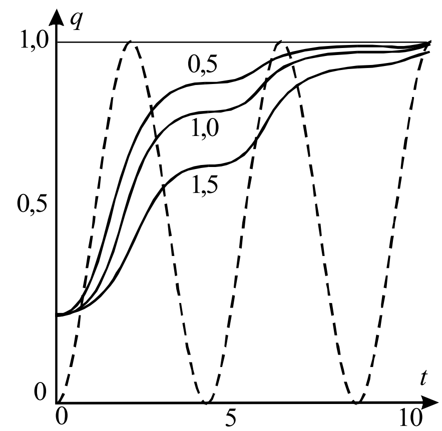

Рис. 3. Цифры у кривых – значения показателя нелинейности b. Расчетные значения параметров: $a = 0{,}25$; $\mu = 2$; $k = 2$; $t^* = 2$; $q_0 = 0{,}25$. Штриховая линия – график функции $\dfrac{\theta(t)}{2}$

Для двухфакторной модели динамики выпуска продукции предприятия $(n = 2)$ система дифференциальных уравнений (6) запишется в виде

$$\begin{cases} \dfrac{d\,k(t)}{d\,t} = \mu_1 \cdot \theta(t) \cdot k^{b_1}(t) \cdot \left(1 - k^{a_1}(t) \cdot l^{a_2}(t)\right) \\ \dfrac{d\,l(t)}{d\,t} = \mu_2 \cdot \theta(t) \cdot l^{b_2}(t) \cdot \left(1 - k^{a_1}(t) \cdot l^{a_2}(t)\right) \end{cases} \tag{13}$$

Начальные условия (8) для системы (13) принимают вид

$$\begin{cases} k\big|_{t=0} = k(0) = k_0 \\ l\,\big|_{t=0} = l\,(0) = l_0 \end{cases}. \tag{14}$$

Здесь в качестве первого фактора фигурируют производственные фонды основного капитала $Q_1 = K$, в качестве второго фактора − привлекаемые в производство трудовые ресурсы $Q_2 = L$, $k = \dfrac{K}{K^{\infty}}$, $l = \dfrac{L}{L^{\infty}}$.

Систему уравнений (13) с начальными условиями (14) можно решать только численно.

Для трехфакторной модели динамики выпуска продукции предприятия $(n = 3)$ система дифференциальных уравнений (6) принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{d\,k(t)}{d\,t} = \mu_1 \cdot \theta(t) \cdot k^{b_1}(t) \cdot \left(1 - k^{a_1}(t) \cdot l^{a_2}(t) \cdot m^{a_3}(t)\right) \\ \dfrac{d\,l(t)}{d\,t} = \mu_2 \cdot \theta(t) \cdot l^{b_2}(t) \cdot \left(1 - k^{a_1}(t) \cdot l^{a_2}(t) \cdot m^{a_3}(t)\right) \\ \dfrac{d\,m(t)}{d\,t} = \mu_3 \cdot \theta(t) \cdot m^{b_3}(t) \cdot \left(1 - k^{a_1}(t) \cdot l^{a_2}(t) \cdot m^{a_3}(t)\right) \end{cases} \tag{15}$$

Начальные условия (8) для системы (15) имеют вид

$$\begin{cases} k\big|_{t=0} = k(0) = k_0 \\ l\,\big|_{t=0} = l\,(0) = l_0 \\ m\,\big|_{t=0} = m\,(0) = m_0 \end{cases}. \tag{16}$$

Здесь в качестве первого фактора фигурируют производственные фонды основного капитала $Q_1 = K$, в качестве второго фактора − привлекаемые в производство трудовые ресурсы $Q_2 = L$, а в качестве третьего фактора − используемые в производстве материалы и технологии $Q_3 = M$, $k = \dfrac{K}{K^{\infty}}$, $l = \dfrac{L}{L^{\infty}}$, $m = \dfrac{M}{M^{\infty}}$.

Система уравнений (15) с начальными условиями (16) допускает только численные решения.

Библиографический список

1. Сараев А.Л., Сараев Л.А. К расчету эффективных параметров оптимизации производства с микроструктурой // Вестник Самарского государственного университета. 2012. № 1 (92). С. 231–236.

2. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Модель оптимизации прибыли предприятия, учитывающая сверхпропорциональные производственные и трансакционные затраты // Вестник Самарского государственного университета. 2013. № 10 (111). С. 230–237.

3. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Прогнозирование эффективных характеристик затрат неоднородного производства // Вестник Самарского государственного университета. 2012. № 4(95). С. 109–114.

4. Дубровина Н.А., Сараев А.Л. , Сараев Л.А. К теории нелинейной динамики многофакторных экономических систем // Вестник Самарского государственного университета. 2014. № 2(113). С. 186–191.

5. Дубровина Н.А., Сараев Л.А. Модель экономического развития машиностроения, учитывающая кумулятивную динамику факторов производства // Вестник Самарского государственного университета. 2014. № 4(115). С. 177–183.

6. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Особенности динамики выпуска продукции и производственных факторов модернизируемых предприятий // Вестник Самарского государственного университета. 2014. № 6(117). С. 251–260.

7. Черемных Ю. Н. Микроэкономика. Продвинутый уровень: учебник. М.: Инфра-М, 2013. 844 с.

8. Сараев А. Л. Уравнения динамики экономического развития предприятия, модернизирующего производственные технологии // Основы экономики, управления и права. 2014. № 3(15). С. 93–100.

9. Нижегородцев Р. М. Модели логистической динамики как инструмент экономического анализа и прогнозирования // Моделирование экономической динамики: риск, оптимизация, прогнозирование. М., 1997. С. 34–51.

10. Свирежев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука-М, 1987, 368 с.

References

1. Saraev A.L. Saraev L.A. To the calculation of effective parameters of optimization of production with microstructure. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [*Vestnik of Samara State University*], 2012, no. 1(92), pp. 231–236 [in Russian]

2. Saraev A.L., Saraev L.A. Model of optimization of profit of an enterprise that takes into consideration superproportional production and transactional expenses. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [*Vestnik of Samara State University*], 2013, no.10 (111), pp. 230–237 [in Russian]

3. Saraev A.L., Saraev L.A. Prognostication of effective characteristics of expenses of heterogeneous production. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [*Vestnik of Samara State University*], 2012, no. 4(95), pp. 109–114 [in Russian]

4. Dubrovina N.A., Saraev A.L., Saraev L.A. On the theory of nonlinear dynamics of multifactor economic systems. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [*Vestnik of Samara State University*], 2014, no. 2(113), pp. 186–191 [in Russian]

5. Dubrovina N.A., Saraev L.A. Model of economic development of mechanical engineering that takes into consideration cumulative dynamics of factors of production. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [*Vestnik of Samara State University*], 2014, no. 4(115), pp. 177–183 [in Russian]

6. Saraev L.A., Saraev L.A. Peculiarities of dynamics of production output and production factors of modernized enterprises. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [*Vestnik of Samara State University*], 2014, no. 6(117), pp. 251–260 [in Russian]

7. Cheremnykh Yu.N. Microeconomics. Advanced level. M., Infra–M, 2013, 844 p. [in Russian]

8. Saraev A.L. Equation of dynamics of economic development of an enterprise modernizing production technologies. *Osnovy ekonomiki, upravleniia i prava* [*Foundations of Economics, Management and Law*], 2014, no. 3(15), pp. 93–100 [in Russian]

9. Nizhegorodtsev R.M. Models of logistic dynamics as an instrument of economic analysis and prognostication in *Modeling of economic dynamics: risks, optimization, prognostication*. M., 1997, pp. 34–51 [in Russian]

10. Svirezhev Yu.M. Nonlinear waves, dissipative structures and disasters in ecology. M., Nauka, 1987, 368 p. [in Russian]

A.L. Saraev*

EQUATIONS OF DYNAMICS OF ECONOMIC DEVELOPMENT OF INDUSTRIAL ENTERPRISES

In the published article, generalization of a mathematical model of dynamics of economic development of the modernized enterprise, presented in [1], according to which changes in time of volumes of production factors are directly proportional to the volume of production and are limited by the frontiers of enterprises is suggested.

Key words: enterprise, technologies, factors of production, production function, logistic dynamics, resources

* *Saraev Alexander Leonidovich* (alex.saraev@gmail.com), Department of Mathematics and Business-Informatics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.