УДК 330.101.54

*А.Л. Сараев, Л.А. Сараев**

ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ ВЫПУСКА ПРОДУКЦИИ И ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФАКТОРОВ МОДЕРНИЗИРУЕМЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

В статье предложена многофакторная математическая модель логистической динамики экономического развития модернизируемого предприятия. Рассмотрены случаи однократной и периодической смены производственных технологий на предприятии.

Ключевые слова: предприятие, технологии, факторы производства, производственная функция, логистическая динамика, ресурсы.

Производственное предприятие как элемент хозяйственной системы реального сектора экономики, выпуская готовую продукцию, затрачивает определенный набор ресурсов. В самом общем случае такой набор ресурсов целесообразно представлять в виде n-мерного вектора пространства R^n объемов факторов производства [1–4]

$$\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_n).$$

В качестве компонентов этого вектора Q_i могут выступать основной капитал (производственные фонды), привлекаемые в производство трудовые ресурсы, используемые в производстве материалы, применяемые технологии, различного рода инновации и т. д.

Изменяемые во времени объемы факторов производства и являются функциями времени $Q_i = Q_i(t)$. Кроме того, они представляют собой способные накапливаться и образовать определенные фонды кумулятивные величины, объемы которых определяют скорости их роста или убывания во времени. Переменная времени t предполагается непрерывной, единицей ее измерения служит так называемый производственный период, в качестве которого может быть выбран один год, один квартал, один месяц и т. д. Функции $Q_i = Q_i(t)$ предполагаются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми на всей числовой оси $(-\infty < t < \infty)$, при этом каждый компонент вектора объемов факторов производства $Q_i = Q_i(t)$ ограничен сверху и снизу своими предельными значениями

$$0 < Q_i(t) < \overline{\overline{Q}}_i, (i = 1..n).$$

Здесь $\overline{\overline{Q}}_i = \lim_{t\to\infty} Q_i(t)$, $\lim_{t\to-\infty} Q_i(t) = 0$.

Сараев Александр Леонидович (alex.saraev@gmail.com), *Сараев Леонид Александрович* (saraev_leo@mail.ru), кафедра математики и бизнес-информатики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Выпуск продукции предприятия V обеспечивается некоторой многофакторной производственной функцией Кобба-Дугласа [5; 6]

$$V = P \cdot \prod_{s=1}^{n} Q_s^{a_s} . \qquad (1)$$

Здесь степенные показатели производственной функции a_s представляют собой эластичности выпуска по соответствующему ресурсу; P – стоимость продукции произведенной на единичные объемы ресурсов.

Предельное значение производственной функции $\overline{\overline{V}}$ вычисляется по формуле

$$\overline{\overline{V}} = P \cdot \prod_{s=1}^{n} \overline{\overline{Q}}_s^{a_s} , \qquad (2)$$

и, таким образом, выражение (1) принимает вид

$$V = \overline{\overline{V}} \cdot \prod_{s=1}^{n} q_s^{a_s} , \; q_s = \frac{Q_s}{\overline{\overline{Q}}_s} . \qquad (3)$$

Изменения во времени компонентов вектора конфигурации используемых ресурсов Q_i обусловлены двумя обстоятельствами. С одной стороны, скорости роста объемов факторов производства прямо пропорциональны их количеству, а с другой стороны, рост этих величин ограничен предельными возможностями предприятия. Поэтому временные изменения величин факторов производства могут быть описаны системой дифференциальных уравнений

$$\frac{d\,Q_i(t)}{d\,t} = \xi_i(t) \cdot Q_i(t) \cdot \left(\overline{\overline{V}} - V(t)\right). \qquad (4)$$

Здесь $\xi_i(t) = \alpha_i \cdot \theta(t)$ – удельные скорости роста факторов производства $Q_i(t)$. Коэффициенты α_i задают интенсивность роста каждого ресурса, а функция $\theta(t)$ определяет длительность периодов смены технологий производства, его цикличность [7; 8].

Подставляя в систему (4) производственную функцию (3), получаем

$$\frac{d\,Q_i(t)}{d\,t} = \alpha_i \cdot \theta(t) \cdot Q_i(t) \cdot \overline{\overline{V}} \cdot \left(1 - \prod_{s=1}^{n} q_s^{a_s}(t)\right), \qquad (5)$$

или в безразмерной форме

$$\frac{d\,q_i(t)}{d\,t} = \alpha_i \cdot \overline{\overline{V}} \cdot \theta(t) \cdot q_i(t) \cdot \left(1 - \prod_{s=1}^{n} q_s^{a_s}(t)\right). \qquad (6)$$

Решениями систем уравнений (5) или (6) являются так называемые интегральные логистические кривые, монотонно возрастающие от нижних границ до верхних границ. В качестве начальных условий для системы уравнений (5) целесообразно выбирать значения компонентов вектора Q_i, соответствующие уровню производственного фактора $\overline{Q_i}$ в момент времени смены технологии производства $t = \overline{t_i}$.

$$Q_i\big|_{t=\overline{t_i}} = Q_i\left(\overline{t_i}\right) = \overline{Q_i} . \qquad (7)$$

Начальные условия для системы уравнений (6) принимают вид

$$q_i\big|_{t=\bar{t}_i} = q_i\left(\bar{t}_i\right) = \bar{q}_i = \frac{\overline{Q_i}}{Q_i}. \tag{8}$$

Рассмотрим сначала однофакторную модель динамики выпуска продукции предприятия $(n=1)$. Тогда система дифференциальных уравнений (6) сводится к одному уравнению первого порядка

$$\frac{d\,q(t)}{d\,t} = \alpha \cdot \overline{\overline{V}} \cdot \theta(t) \cdot q(t) \cdot \left(1 - q^a(t)\right) \tag{9}$$

с начальными условиями

$$q\big|_{t=\bar{t}} = q\left(\bar{t}\right) = \bar{q} = \frac{\overline{Q}}{Q}. \tag{10}$$

Уравнение с разделяющимися переменными (9) является обобщением уравнения П. Ферхюльста и носит название уравнения М. Розенцвейга [9]. Его решение для начального условия (10) имеет вид

$$q = \frac{\bar{q} \cdot e^{\alpha \cdot T}}{\left(1 + \left(e^{\alpha \cdot a \cdot T} - 1\right) \cdot \bar{q}^{\,a}\right)^{\frac{1}{a}}}. \tag{11}$$

Здесь $T(t) = \overline{\overline{V}} \cdot \int\limits_{\bar{t}}^{t} \theta(\tau) \cdot d\,\tau$. Из соотношения (11) находим функцию фактора производства Q

$$Q = \frac{\overline{Q} \cdot \overline{\overline{Q}} \cdot e^{\alpha \cdot T}}{\left(\overline{\overline{Q}}^{\,a} + \left(e^{\alpha \cdot a \cdot T} - 1\right) \cdot \overline{Q}^{\,a}\right)^{\frac{1}{a}}}. \tag{12}$$

Подставляя формулу (12) в производственную функцию (1), получаем динамическую производственную функцию выпуска продукции предприятием:

$$V = \frac{\overline{Q}^{\,a} \cdot \overline{\overline{Q}}^{\,a} \cdot e^{\alpha \cdot a \cdot T}}{\overline{\overline{Q}}^{\,a} + \left(e^{\alpha \cdot a \cdot T} - 1\right) \cdot \overline{Q}^{\,a}}. \tag{13}$$

Формы логистических кривых для функций (12) и (13) определяются видом функции $\xi(t) = \alpha \cdot \theta(t)$ − удельной скорости роста фактора производства Q, задающей длительность периодов смены технологий производства и его цикличность. Если эта скорость постоянна, то стандартный график логистической кривой на рис. 1 имеет точку перегиба в момент времени $t = \bar{t}$.

Если применяемые в производстве технологии к моменту времени $t = \bar{t}$ морально устаревают, фактически останавливают экономический рост предприятия, то функция удельной скорости роста уменьшается к этому моменту времени до нуля. Если же последующее, после момента времени $t = \bar{t}$, обновление производственных технологий, перевооружение и модернизация производства приведут к росту функции $\xi(t) = \alpha \cdot \theta(t)$, то соответствующие логистические кривые для фактора производства Q будут иметь в момент времени $t = \bar{t}$ не только точку перегиба, но и, как показано на рис. 2, точку так называемого минимакса. Подобные изменения функции $\theta(t)$ удобно описывать с помощью функции параболы четной степени $\theta(t) = (t - t_i)^{2p}$ [7].

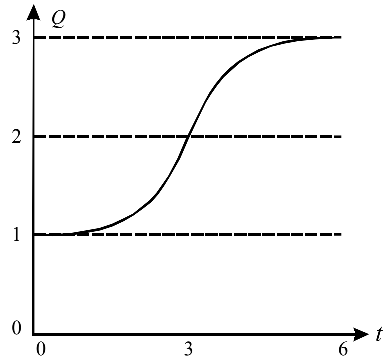

Рис. 1

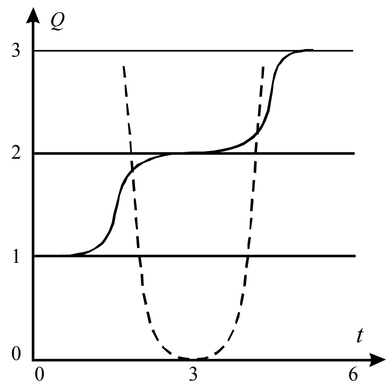

Рис. 2

При циклической смене технологий производства предприятия логистическая кривая будет иметь несколько точек минимакса. Здесь функцию $\theta(t)$ уместно описывать в виде косинусоиды $\theta(t) = 1 + \cos\left(\pi \cdot \dfrac{t - \bar{t}}{k}\right)$. Параметр k описывает периодичность точек минимакса логистической кривой. На рис. 3 и рис. 4 представлены графики логистических кривых для значения параметра $k = 1$ и $k = 2$ соответственно.

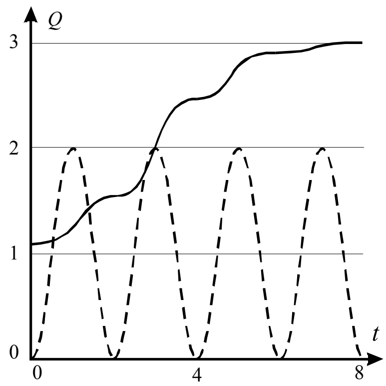

Рис. 3. Параметр $k = 1$

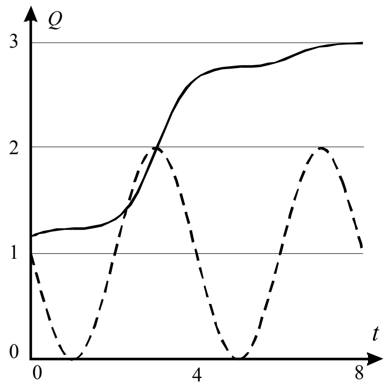

Рис. 4. Параметр $k = 2$

Рассмотрим теперь двухфакторную модель динамики выпуска продукции предприятия $(n = 2)$. В качестве первого фактора выберем основной капитал (производственные фонды) $Q_1 = K$, в качестве второго фактора – привлекаемые в производство трудовые ресурсы $Q_2 = L$. В этом случае система дифференциальных уравнений (6) запишется в виде

$$\begin{cases} \dfrac{d\,k(t)}{d\,t} = \alpha \cdot \overline{\overline{V}} \cdot \theta(t) \cdot k(t) \cdot \left(1 - k^a(t) \cdot l^b(t)\right) \\ \dfrac{d\,l(t)}{d\,t} = \beta \cdot \overline{\overline{V}} \cdot \theta(t) \cdot l(t) \cdot \left(1 - k^a(t) \cdot l^b(t)\right) \end{cases} \quad (14)$$

Начальные условия (8) для системы (14) принимают вид

$$\begin{cases} k\big|_{t=\overline{t_k}} = k\left(\overline{t_k}\right) = \overline{k} \\ l\;\big|_{t=\overline{t_l}} = \; l\;\left(\overline{t_l}\right) = \overline{l}\;. \end{cases} \quad (15)$$

Здесь

$a = a_1$, $b = a_2$, $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \alpha_2$,

$k = \dfrac{K}{\overline{\overline{K}}}$, $l = \dfrac{L}{\overline{\overline{L}}}$, $\overline{k} = \dfrac{\overline{K}}{\overline{\overline{K}}}$, $l = \dfrac{\overline{L}}{\overline{\overline{L}}}$.

Установим связь между безразмерными факторами производства k и l. Разделив первое из уравнений (14) на второе, получим

$$\frac{dk}{k} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{dl}{l}.$$

Общее решение этого уравнения представляет собой функцию $k = C \cdot l^{\frac{\alpha}{\beta}}$. Поскольку предельные значения безразмерных факторов производства k и l равны единице $\lim\limits_{t \to \infty} k(t) = \lim\limits_{t \to -\infty} l(t) = 1$, то константа тоже равна единице $C = 1$. Таким образом, величины и связаны соотношением

$$k = l^{\frac{\alpha}{\beta}}. \quad (16)$$

Подставляя формулу (16) в систему уравнений (14), находим

$$\begin{cases} \dfrac{d\,k}{d\,t} = \alpha \cdot \overline{\overline{V}} \cdot \theta \cdot k \cdot \left(1 - k^u\right) \\ \dfrac{d\,l}{d\,t} = \beta \cdot \overline{\overline{V}} \cdot \theta \cdot l \cdot \left(1 - l^v\right) \;. \end{cases} \quad (17)$$

Здесь $u = \dfrac{a \cdot \alpha + b \cdot \beta}{\alpha}$, $v = \dfrac{a \cdot \alpha + b \cdot \beta}{\beta}$.

Решения уравнений (17) при начальных условиях (15) имеют вид

$$\begin{cases} k = \dfrac{\overline{k} \cdot e^{\alpha \cdot T}}{\left(1 + \left(e^{\alpha \cdot u \cdot T} - 1\right) \cdot \overline{k}^u\right)^{\frac{1}{u}}}, \\ l = \dfrac{\overline{l} \cdot e^{\beta \cdot T}}{\left(1 + \left(e^{\beta \cdot v \cdot T} - 1\right) \cdot \overline{l}^v\right)^{\frac{1}{v}}}. \end{cases} \quad (18)$$

Функции факторов производства K и L определяются выражениями

$$\begin{cases} K = \dfrac{\overline{K} \cdot \overline{\overline{K}} \cdot e^{\alpha \cdot T}}{\left(\overline{\overline{K}}^{u} + \left(e^{\alpha \cdot u \cdot T} - 1 \right) \cdot \overline{K}^{u} \right)^{\frac{1}{u}}}, \\ L = \dfrac{\overline{L} \cdot \overline{\overline{L}} \cdot e^{\beta \cdot T}}{\left(\overline{\overline{L}}^{v} + \left(e^{\beta \cdot v \cdot T} - 1 \right) \cdot \overline{L}^{v} \right)^{\frac{1}{v}}}. \end{cases} \tag{19}$$

Подставляя формулы (19) в производственную функцию (1), получаем динамическую производственную функцию выпуска продукции предприятием

$$V = P \cdot \frac{\overline{K}^{u} \cdot \overline{\overline{K}}^{u} \cdot e^{\alpha \cdot u \cdot T}}{\overline{\overline{K}}^{u} + \left(e^{\alpha \cdot u \cdot T} - 1 \right) \cdot \overline{K}^{u}} \cdot \frac{\overline{L}^{v} \cdot \overline{\overline{L}}^{v} \cdot e^{\beta \cdot v \cdot T}}{\overline{\overline{L}}^{u} + \left(e^{\beta \cdot v \cdot T} - 1 \right) \cdot \overline{L}^{v}}. \tag{20}$$

Для трехфакторной модели динамики выпуска продукции предприятия $(n = 3)$ первым фактором выберем основной капитал (производственные фонды) $Q_1 = K$, вторым фактором – привлекаемые в производство трудовые ресурсы $Q_2 = L$, третьим фактором – используемые в производстве материалы и технологии $Q_3 = M$. Здесь система дифференциальных уравнений (6) принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{d\,k(t)}{d\,t} = \alpha \cdot \overline{\overline{V}} \cdot \theta(t) \cdot k(t) \cdot \left(1 - k^{a}(t) \cdot l^{b}(t) \cdot m^{c}(t) \right) \\ \dfrac{d\,l(t)}{d\,t} = \beta \cdot \overline{\overline{V}} \cdot \theta(t) \cdot l(t) \cdot \left(1 - k^{a}(t) \cdot l^{b}(t) \cdot m^{c}(t) \right) \\ \dfrac{d\,m(t)}{d\,t} = \gamma \cdot \overline{\overline{V}} \cdot \theta(t) \cdot m(t) \cdot \left(1 - k^{a}(t) \cdot l^{b}(t) \cdot m^{c}(t) \right). \end{cases} \tag{21}$$

Начальные условия (8) для системы (21) преобразуются в соотношения

$$\begin{cases} k\big|_{t=\overline{t_k}} = k\left(\overline{t_k}\right) = \overline{k} \\ l\,\big|_{t=\overline{t_l}} = l\left(\overline{t_l}\right) = \overline{l} \\ m\,\big|_{t=\overline{t_m}} = m\left(\overline{t_m}\right) = \overline{m}. \end{cases} \tag{22}$$

Здесь

$a = a_1$, $b = a_2$, $c = a_3$, $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \alpha_2$, $\gamma = \alpha_3$,

$k = \dfrac{K}{\overline{\overline{K}}}$, $l = \dfrac{L}{\overline{\overline{L}}}$, $m = \dfrac{M}{\overline{\overline{M}}}$, $\overline{k} = \dfrac{\overline{K}}{\overline{\overline{K}}}$, $\overline{l} = \dfrac{\overline{L}}{\overline{\overline{L}}}$, $m = \dfrac{\overline{M}}{\overline{\overline{M}}}$.

Система (21) позволяет установить связь между безразмерными факторами производства k, l, m

$$\begin{cases} \dfrac{dk}{k} = \dfrac{\alpha}{\beta} \cdot \dfrac{dl}{l} \\ \dfrac{dk}{k} = \dfrac{\alpha}{\gamma} \cdot \dfrac{dm}{m} \\ \dfrac{dl}{l} = \dfrac{\beta}{\gamma} \cdot \dfrac{dm}{m} \end{cases} . \tag{23}$$

Решение этих уравнений с учетом предельных значений безразмерных факторов производства $\lim\limits_{t\to\infty} k(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} l(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} m(t) = 1$, дает

$$k = l^{\frac{\alpha}{\beta}},\ l = m^{\frac{\beta}{\gamma}},\ m = k^{\frac{\gamma}{\alpha}}. \tag{24}$$

Подставляя соотношения (24) в систему уравнений (21), находим

$$\begin{cases} \dfrac{d\,k}{d\,t} = \alpha \cdot \overline{\overline{V}} \cdot \theta \cdot k \cdot \left(1 - k^{u}\right) \\ \dfrac{d\,l}{d\,t} = \beta \cdot \overline{\overline{V}} \cdot \theta \cdot l \cdot \left(1 - l^{v}\right) \\ \dfrac{dm}{d\,t} = \gamma \cdot \overline{\overline{V}} \cdot \theta \cdot m \cdot \left(1 - m^{w}\right) \end{cases} . \tag{25}$$

Здесь

$$u = \frac{a \cdot \alpha + b \cdot \beta + c \cdot \gamma}{\alpha},\ v = \frac{a \cdot \alpha + b \cdot \beta + c \cdot \gamma}{\beta},\ w = \frac{a \cdot \alpha + b \cdot \beta + c \cdot \gamma}{\gamma}.$$

Решая уравнения (24) при начальных условиях (22), находим

$$\begin{cases} k = \dfrac{\overline{k} \cdot e^{\alpha \cdot T}}{\left(1 + \left(e^{\alpha \cdot u \cdot T} - 1\right) \cdot \overline{k}^{u}\right)^{\frac{1}{u}}}, \\ l = \dfrac{\overline{l} \cdot e^{\beta \cdot T}}{\left(1 + \left(e^{\beta \cdot v \cdot T} - 1\right) \cdot \overline{l}^{v}\right)^{\frac{1}{v}}}, \\ m = \dfrac{\overline{m} \cdot e^{\gamma \cdot T}}{\left(1 + \left(e^{\gamma \cdot w \cdot T} - 1\right) \cdot \overline{m}^{w}\right)^{\frac{1}{w}}}. \end{cases} \tag{26}$$

Выражения для функций факторов производства K, L, M принимают вид

$$\begin{cases} K = \dfrac{\overline{K} \cdot \overline{\overline{K}} \cdot e^{\alpha \cdot T}}{\left(\overline{\overline{K}}^{u} + \left(e^{\alpha \cdot u \cdot T} - 1\right) \cdot \overline{K}^{u}\right)^{\frac{1}{u}}}, \\ L = \dfrac{\overline{L} \cdot \overline{\overline{L}} \cdot e^{\beta \cdot T}}{\left(\overline{\overline{L}}^{v} + \left(e^{\beta \cdot v \cdot T} - 1\right) \cdot \overline{L}^{v}\right)^{\frac{1}{v}}}, \\ M = \dfrac{\overline{M} \cdot \overline{\overline{M}} \cdot e^{\gamma \cdot T}}{\left(\overline{\overline{M}}^{w} + \left(e^{\gamma \cdot w \cdot T} - 1\right) \cdot \overline{M}^{w}\right)^{\frac{1}{w}}}. \end{cases} \qquad (27)$$

Подставляя формулы (26) в производственную функцию (1), получаем динамическую производственную функцию выпуска продукции предприятием

$$V = P \cdot \frac{\overline{K}^{u} \cdot \overline{\overline{K}}^{u} \cdot e^{\alpha \cdot u \cdot T}}{\overline{\overline{K}}^{u} + \left(e^{\alpha \cdot u \cdot T} - 1\right) \cdot \overline{K}^{u}} \cdot \frac{\overline{L}^{v} \cdot \overline{\overline{L}}^{v} \cdot e^{\beta \cdot v \cdot T}}{\overline{\overline{L}}^{u} + \left(e^{\beta \cdot v \cdot T} - 1\right) \cdot \overline{L}^{v}} \cdot \frac{\overline{M}^{w} \cdot \overline{\overline{M}}^{w} \cdot e^{\gamma \cdot w \cdot T}}{\overline{\overline{M}}^{w} + \left(e^{\gamma \cdot w \cdot T} - 1\right) \cdot \overline{M}^{w}}. \qquad (28)$$

Совершенно аналогично для многофакторной модели динамики выпуска продукции предприятия при произвольном n для системы дифференциальных уравнений (6) с начальными условиями (8) устанавливается связь между безразмерными факторами производства q_i

$$\frac{dq_i}{q_i} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \cdot \frac{dq_j}{q_j}. \qquad (29)$$

Решение этих уравнений с учетом предельных значений безразмерных факторов производства $\lim\limits_{t \to \infty} q_i(t) = 1$, дает

$$q_i = q_j^{\frac{\alpha_i}{\alpha_j}}. \qquad (30)$$

Подставляя в систему уравнений (6) соотношения (30), находим

$$\frac{d\,q_i}{d\,t} = \alpha_i \cdot \overline{\overline{V}} \cdot \theta \cdot q_i \cdot \left(1 - q_i^{u_i}\right), \; (i = 1..n). \qquad (31)$$

Здесь $u_i = \dfrac{1}{\alpha_i} \cdot \sum\limits_{s=1}^{n} a_s \cdot \alpha_s$.

Решая уравнения (31) при начальных условиях (8), находим

$$q_i = \frac{\overline{q_i} \cdot e^{\alpha_i \cdot T}}{\left(1 + \left(e^{\alpha_i \cdot u_i \cdot T} - 1\right) \cdot \overline{q_i}^{u_i}\right)^{\frac{1}{u_i}}}. \qquad (32)$$

Выражения для функций факторов производства Q_i принимают вид

$$Q_i = \frac{\overline{Q_i} \cdot \overline{\overline{Q_i}} \cdot e^{\alpha_i \cdot T}}{\left(\overline{\overline{Q_i}}^{u_i} + \left(e^{\alpha_i \cdot u_i \cdot T} - 1 \right) \cdot \overline{Q_i}^{u_i} \right)^{\frac{1}{u_i}}} . \qquad (33)$$

Подставляя формулы (26) в производственную функцию (1), получаем динамическую производственную функцию выпуска продукции предприятием

$$V = P \cdot \prod_{s=1}^{n} \frac{\overline{Q_i}^{u_i} \cdot \overline{\overline{Q_i}}^{u_i} \cdot e^{\alpha_i \cdot u_i \cdot T}}{\overline{\overline{Q_i}}^{u_i} + \left(e^{\alpha_i \cdot u_i \cdot T} - 1 \right) \cdot \overline{Q_i}^{u_i}} . \qquad (34)$$

Библиографический список

1. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Континуальная теория производственного процесса и производительности факторов производства промышленных предприятий // Вестник Самарского государственного университета. 2012. № 7 (98). С. 196–203.

2. Сараев А.Л., Сараев Л.А. К теории структурной модернизации производственных предприятий // Вестник Самарского государственного университета. 2012. № 10 (101). С. 160–169.

3. Сараев А.Л., Сараев Л.А. К оценке прибыли и затрат предприятий, модернизирующих структуру производства // Вестник Самарского государственного университета. 2013. № 1(102). С. 186–196.

4. Мантуленко А.В., Сараев А.Л. , Сараев Л.А. К теории оптимального распределения факторов производства, производственных и трансакционных издержек // Вестник Самарского государственного университета. 2013. № 7(108). С. 117–126.

5. Ю.Н. Черемных Микроэкономика. Продвинутый уровень: учебник. М.: Инфра-М, 2013. 844 с.

6. Грачева М.В., Фадеева Л.Н., Черемных Ю.Н. Моделирование экономических процессов: учебник. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. 351 с.

7. Сараев А.Л. Уравнения динамики экономического развития предприятия, модернизирующего производственные технологии // Основы экономики, управления и права. 2014. № 3(15). С. 93–100.

8. Нижегородцев Р.М. Модели логистической динамики как инструмент экономического анализа и прогнозирования // Моделирование экономической динамики: риск, оптимизация, прогнозирование. М., 1997. С. 34–51.

References

1. Saraev A.L., Saraev L.A. Continual theory of industrial process and factor productivity of industrial enterprises. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [*Vestnik of Samara State University*], 2012, no. 7 (98), pp. 196–203. [in Russian]

2. Saraev A.L., Saraev L.A. To the theory of structural modernization of industrial enterprises. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [*Vestnik of Samara State University*], 2012, no. 10 (101), pp. 160–169. [in Russian]

3. Saraev A.L., Saraev L.A. To the estimate of profits and expenses of enterprises modernizing structure of production. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [*Vestnik of Samara State University*], 2013, no. 1 (102), pp. 186–196. [in Russian]

4. Mantulenko A.V., Saraev A.L., Saraev L.A. To the theory of optimal distribution of factors of production, operating and transaction expenses. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [*Vestnik of Samara State University*], 2013, no. 7(108), pp. 117–126. [in Russian]

5. Cheremnykh Yu.N. Microeconomics. Advanced level. Textbook. M., Infra-M, 2013, 844 p. [in Russian]
6. Gracheva M.V., Fadeeva L.N., Cheremnykh Yu.N. Modeling of economic processes. Textbook. M., Yuniti-Dana, 2005, 351 p. [in Russian]
7. Saraev A.L. Equations of dynamics of economic development of enterprises that modernize production technologies. *Osnovy ekonomiki, upravleniia i prava* [*Foundations of Economics, Management and Law*], 2014, no. 3 (15), pp. 93–100. [In Russian]
8. Nizhegorodtsev R.M. Models of logistic dynamics as an instrument of economic analysis and forecasting in *Modelirovanie ekonomicheskoi dinamiki: risk, optimizatsiia, prognozirovanie* [*Modelling of economic dynamics: risk, optimization, forecasting*]. M., 1997, pp. 34–51. [in Russian]

A.L. Saraev, L.A. Saraev*

SPECIFIC CHARACTER OF DYNAMICS OF PRODUCT RELEASE AND INDUSTRIAL FACTORS OF MODERNIZED ENTERPRISES

In the published article multi-factor mathematical model of logistic dynamics of economic development of modernized enterprise is suggested. Cases of single and periodic change of production technology on the enterprise are viewed.

Key words: enterprise, technology, factors of production, production function, logistic dynamics, resources.

* *Saraev Alexander Leonidovich* (alex.saraev@gmail.com), *Saraev Leonid Alexandrovich* (saraev_leo@mail.ru), the Dept. of Mathematics and Business-Informatics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.