

— МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ —
МЕТОДЫ ЭКОНОМИКИ

УДК 330.101.54

Н.А. Дубровина, Л.А. Сараев*

МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ МАШИНОСТРОЕНИЯ,
УЧИТЫВАЮЩАЯ КУМУЛЯТИВНУЮ ДИНАМИКУ
ФАКТОРОВ ПРОИЗВОДСТВА

В статье предложен вариант математической модели экономического развития отрасли машиностроения на основе динамики кумулятивных факторов производства. Изменения во времени этих факторов описываются дифференциальными уравнениями логистических кривых, адекватно отражающих важнейшие макроэкономические аспекты процесса воспроизводства. Динамика выпуска продукции отрасли задается многофакторной производственной функцией с постоянной эластичностью замены ресурсов. Рассмотрены эволюционный и инновационный сценарии экономического развития отрасли машиностроения. Численный анализ полученной модели показал хорошее соответствие известным статистическим данным.

Ключевые слова: машиностроение, структура, факторы производства, производственная функция, выпуск продукции, ресурсы.

Производственная деятельность машиностроения в целом может быть описана производственной функцией, аргументами которой являются объемы определенных производственных ресурсов (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) . Эти величины могут представлять основной капитал (производственные фонды), привлекаемые в производство трудовые ресурсы, используемые в производстве материалы, технологии различного рода инновации, элементы маркетинга и т. д. Совокупность объемов Q_i образует, так называемую, конфигурацию производственных ресурсов, которая представляется, как правило, в виде n -мерного вектора пространства R^n объемов факторов производства [1–4]

$$\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n).$$

* © Дубровина Н.А., Сараев Л.А., 2014

Дубровина Наталья Александровна (nadubrovina@yandex.ru), Сараев Леонид Александрович (saraev_leo@mail.ru), кафедра математики и бизнес-информатики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Компоненты вектора объемов факторов производства \mathbf{Q} изменяются во времени и представляют собой некоторые функции $Q_i = Q_i(t)$. Эти кумулятивные величины способны накапливаться, образуя определенные фонды, объемы которых определяют скорости их роста или убывания во времени. Переменная времени t предполагается непрерывной, единицей ее измерения служит один год, функции $Q_i = Q_i(t)$ предполагаются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми нужное число раз.

Каждый компонент вектора объемов факторов производства $Q_i = Q_i(t)$ ограничен сверху и снизу своими предельными значениями:

$$Q_i^{\min} \leq Q_i(t) \leq Q_i^{\max}, (i = 1..n),$$

поэтому изменения во времени компонентов вектора конфигурации используемых ресурсов целесообразно описывать дифференциальными уравнениями вида [5]

$$\frac{dQ_i}{dt} = \lambda_i \cdot (Q_i - Q_i^{\min}) \cdot (Q_i^{\max} - Q_i), (i = 1..n). \quad (1)$$

Уравнения (1) описывают так называемые логистические кривые, для которых характерно монотонное возрастание от нижней границы до верхней границы, параметр λ_i представляет собой удельную скорость роста фактора Q_i вблизи своего нижнего предельного значения Q_i^{\min} .

Начальные условия для уравнений (1) задаются значениями компонентов вектора \mathbf{Q} в некоторый начальный момент времени $t = t_0$.

$$Q_i|_{t=t_0} = Q_i(0) = Q_i^0. \quad (2)$$

Уравнение с разделяющимися переменными (1) может быть записано в виде

$$\frac{dQ_i}{(Q_i - Q_i^{\min}) \cdot (Q_i^{\max} - Q_i)} = \lambda_i \cdot dt,$$

или

$$\frac{1}{Q_i^{\max} - Q_i^{\min}} \cdot \left(\frac{1}{Q_i - Q_i^{\min}} - \frac{1}{Q_i - Q_i^{\max}} \right) \cdot dQ_i = \lambda_i \cdot dt. \quad (3)$$

Интегрируя соотношения (3), находим:

$$\frac{Q_i - Q_i^{\min}}{Q_i^{\max} - Q_i} = C \cdot e^{\lambda_i \cdot (Q_i^{\max} - Q_i^{\min}) \cdot t}. \quad (4)$$

Подставляя уравнение (4) в начальные условия (2), вычисляем произвольную константу интегрирования:

$$C = \frac{Q_i^0 - Q_i^{\min}}{Q_i^{\max} - Q_i^0} \cdot e^{-\lambda_i \cdot (Q_i^{\max} - Q_i^{\min}) \cdot t_0}.$$

Уравнение (4) принимает вид

$$\frac{Q_i - Q_i^{\min}}{Q_i^{\max} - Q_i} = \frac{Q_i^0 - Q_i^{\min}}{Q_i^{\max} - Q_i^0} \cdot e^{\lambda_i \cdot (Q_i^{\max} - Q_i^{\min}) \cdot (t - t_0)}. \quad (5)$$

Решая уравнение (5) относительно фактора производства Q_i , получаем:

$$Q_i = \frac{Q_i^{\min}(Q_i^{\max} - Q_i^0) + Q_i^{\max}(Q_i^0 - Q_i^{\min}) \cdot e^{\lambda_i \cdot (Q_i^{\max} - Q_i^{\min}) (t - t_0)}}{(Q_i^{\max} - Q_i^0) + (Q_i^0 - Q_i^{\min}) \cdot e^{\lambda_i \cdot (Q_i^{\max} - Q_i^{\min}) (t - t_0)}}. \quad (6)$$

На рис. 1. показан график логистической кривой для одного из факторов производства Q_i . Расчетные значения $Q_i^{\min} = 1$, $Q_i^0 = 3$, $Q_i^{\max} = 6$, $\lambda_i = 0,15$, $t_0 = 2010$.

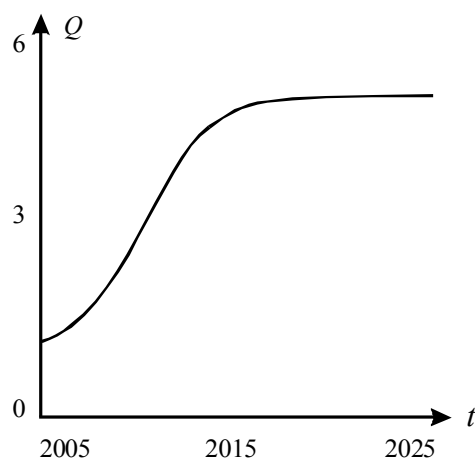


Рис. 1

Выпуск продукции производства всей отрасли V обеспечивается некоторой многофакторной производственной функцией, в качестве которой здесь выбрана классическая производственная CES-функция с постоянной эластичностью замены ресурсов [6]:

$$V = P \cdot \left(\sum_{s=1}^n a_s \cdot Q_s^{-\nu} \right)^{-\frac{u}{\nu}}. \quad (7)$$

Здесь $P > 0$, $\nu \geq -1$; $u > 0$ – степень однородности; коэффициенты $0 < a_s < 1$ удовлетворяют условию $\sum_{s=1}^n a_s = 1$. Параметр ν характеризует эластичность замены од-

ного ресурса другим, которая равна $(1 + \nu)^{-1}$. Такой выбор вида производственной функции наиболее общий, поскольку другие известные производственные функции являются лишь частными случаями CES-функции. Так, например, при $\nu = -1$ получается линейная производственная функция, при $\nu \rightarrow 0$ – производственная функция Кобба–Дугласа, при $\nu \rightarrow \infty$ – производственная функция Леонтьева [7].

Применим теперь полученные формулы для расчета текущей динамики экономических показателей отрасли машиностроения и прогнозирования оценки эффективности работы отрасли в целом. Для этого воспользуемся приведенными в таблице 1 известными статистическими данными изменений основных показателей работы отрасли машиностроения за период с 2006 по 2011 годы.

Таблица 1

Показатели работы отрасли машиностроения в 2006–2011 гг.

№	ГОД	КАПИТАЛ МЛРД РУБ.	ЧИСЛЕННОСТЬ ПЕРСОНАЛА ТЫС. ЧЕЛ.	МАТЕРИАЛЫ МЛРД РУБ.	МАРКЕТИНГ МЛРД РУБ.	ИННОВАЦИИ МЛРД РУБ.	ГОСПОДДЕРЖКА МЛРД РУБ.	ОБЩИЙ ОБЪЕМ МЛРД РУБ.	ВЫПУСК МЛРД РУБ.
t	T	K	L	M	R	N	G	Q	V
0	2005	0,872573	2,751	0,393305	0,000350	0,034480	0,003262	1,303970	1,603549
1	2006	0,900716	2,695	0,495647	0,000470	0,053198	0,004103	1,454134	1,994189
2	2007	1,019076	2,705	0,637109	0,000575	0,053504	0,005089	1,715353	2,643692
3	2008	1,166854	2,683	0,835716	0,000279	0,057517	0,004377	2,064743	3,094371
4	2009	1,309704	2,361	0,863129	0,000129	0,060078	0,006499	2,239539	2,458268
5	2010	1,488088	2,244	0,850528	0,001906	0,066269	0,011062	2,417853	3,393446
6	2011	1,667165	2,270	0,860111	0,000193	0,080328	0,012498	2,620294	4,476026

Ограничимся здесь случаем двухфакторной производственной CES-функции $n = 2$. В качестве производственных факторов выберем из таблицы 1 величины общего объема капитальных, материальных и финансовых вложений в машиностроение Q и численность персонала отрасли L . Тогда формула (6) принимает вид

$$Q = \frac{Q^{\min}(Q^{\max} - Q^0) + Q^{\max}(Q^0 - Q^{\min}) \cdot e^{\lambda_Q(Q^{\max} - Q^{\min}) \cdot t}}{(Q^{\max} - Q^{\min}) + (Q^0 - Q^{\min}) \cdot e^{\lambda_Q(Q^{\max} - Q^{\min}) \cdot t}}, \quad (8)$$

$$L = \frac{L^{\min}(L^{\max} - L^0) + L^{\max}(L^0 - L^{\min}) \cdot e^{\lambda_L(L^{\max} - L^{\min}) \cdot t}}{(L^{\max} - L^{\min}) + (L^0 - L^{\min}) \cdot e^{\lambda_L(L^{\max} - L^{\min}) \cdot t}}. \quad (9)$$

Здесь, согласно табл. 1, принимается $t_0 = 0$. Формула (7) для случая двухфакторной производственной CES-функции записывается в виде

$$V = P \cdot (a \cdot Q^{-v} + (1-a) \cdot L^{-v})^{\frac{1}{v}}. \quad (10)$$

Здесь $a_1 = a$, $a_2 = 1 - a$.

На рис. 2 приведено сравнение статистических данных общего объема вложений в машиностроение Q за период 2005–2011 гг., представленных в табл. 1, с расчетами, выполненными по формуле (8). Точками обозначены статистические данные из табл. 1.

На рис. 3 показано два варианта дальнейшего развития материальной базы отрасли.

В первом случае максимальный общий объем вложений в машиностроение Q_1^{\max} остается соответствующим постепенному развитию материальной и финансовой базы отрасли характерным для периода 2005–2011 гг. и составляет около 2,7 млрд руб. Такому варианту развития событий соответствует на рис. 3 сплошная линия. Во втором случае предполагается начиная с 2015 г. увеличить максимальный общий объем вложений в машиностроение до значения 3,370295 млрд руб. и повысить их удельную

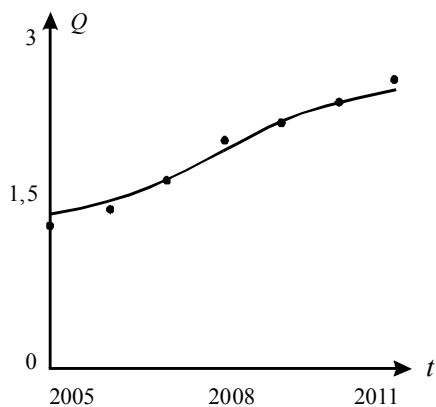


Рис. 2

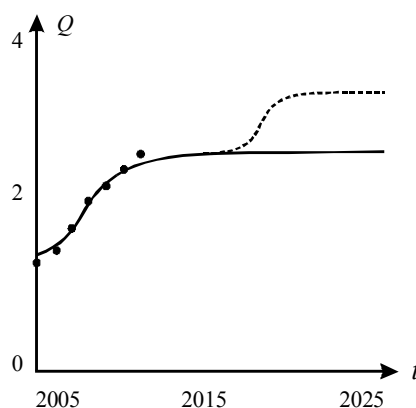


Рис. 3

скорость роста. Такому варианту развития событий соответствует на рис. 3 штриховая линия. Расчетные значения параметров: $Q_1^{\min} = 1,403970$ млрд руб.; $Q_1^{\max} = 2,7$ млрд руб.; $Q_2^{\min} = 2,71$ млрд руб.; $Q_2^{\max} = 3,370295$ млрд руб.; $\lambda_{Q_1} = 0,65$; $\lambda_{Q_2} = 2,15$.

На рис. 4. отражено сравнение статистических данных численности персонала отрасли машиностроения L за период 2005–2011 гг., представленных в табл. 1, с расчетами, выполненными по формуле (9). Точками обозначены статистические данные из табл. 1.

На рис. 5 графики прогнозируют два варианта дальнейшего развития численности персонала отрасли.

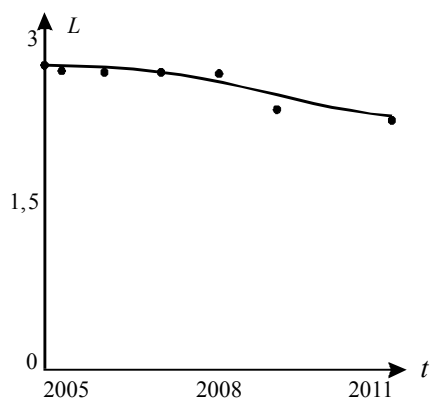


Рис. 4

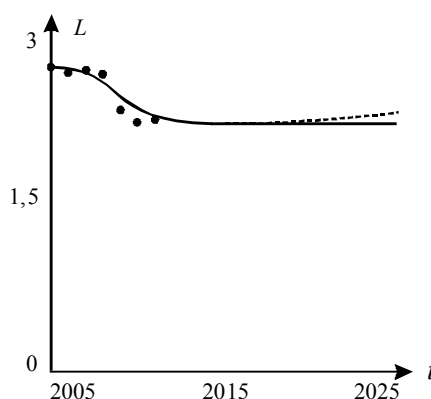


Рис. 5

В первом случае численность персонала отрасли машиностроения асимптотически снижается от своего максимального значения 2,751 тыс. чел. до минимального, характерного для периода 2005–2011 гг. значения 2,244 тыс. чел. Такому варианту развития событий соответствует на рис. 5 сплошная линия. Во втором случае предполагается, что начиная с 2015 г. численность персонала отрасли машиностроения будет незначительно увеличиваться до значения 2,544 тыс. чел. Такому варианту развития событий соответствует на рис. 5 штриховая линия. Расчетные значения параметров: $L_1^{\min} = 2,244$ тыс. чел.; $L_1^{\max} = 2,751$ тыс. чел.; $L_2^{\min} = 2,244$ тыс. чел.; $L_2^{\max} = 2,544$ тыс. чел.; $\lambda_{L_1} = -2$; $\lambda_{L_2} = 1,15$.

На рис. 6 приведено сравнение статистических данных общего объема выпуска продукции отрасли машиностроения V за период 2005–2011 гг., представленных в табл. 1, с расчетами, выполненными по формуле (10). Точками обозначены статистические данные из табл. 1.

На рис. 7 представлено два варианта прогнозирования дальнейшего развития выпуска отраслевой продукции.

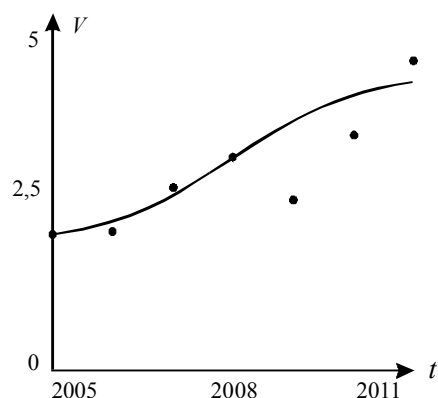


Рис. 6

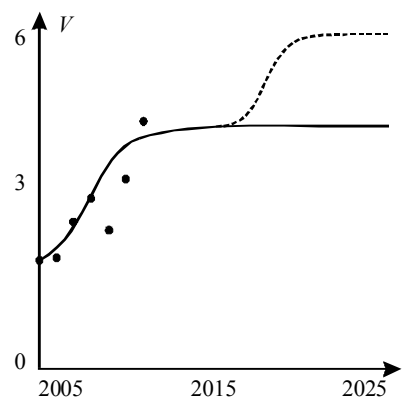


Рис. 7

Первому прогнозу на рис. 7 соответствует сплошная линия, построенная по формулам (8)–(10) с исходными данными первого варианта развития событий для величин Q и L . Второму прогнозу на рис. 7 соответствует штриховая линия, построенная по формулам (8)–(10) с исходными данными второго варианта развития событий для величин Q и L . Расчетные значения параметров: $P = 1,1$ млрд руб.; $a = 0,9$; $u = 1,45$; $v = 0,95$.

Библиографический список

1. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Континуальная теория производственного процесса и производительности факторов производства промышленных предприятий // Вестник Самарского государственного университета. 2012. № 7 (98). С. 196–203.
2. Сараев А.Л., Сараев Л.А. К теории структурной модернизации производственных предприятий // Вестник Самарского государственного университета. 2012. № 10 (101). С. 160–169.
3. Сараев А.Л., Сараев Л.А. К оценке прибыли и затрат предприятий, модернизирующих структуру производства // Вестник Самарского государственного университета. 2013. № 1 (102). С. 186–196.
4. Мантуленко А.В., Сараев А.Л., Сараев Л.А. К теории оптимального распределения факторов производства, производственных и транзакционных издержек // Вестник Самарского государственного университета. 2013. № 7 (108). С. 177–126.
5. Нижегородцев Р.М. Модели логистической динамики как инструмент экономического анализа и прогнозирования // Моделирование экономической динамики: риск, оптимизация, прогнозирование. М., 1997. С. 34–51.
6. Черемных Ю.Н. Микроэкономика. Продвинутый уровень: учебник. М.: Инфра-М, 2013, 844 с.
7. Грачева М.В., Фадеева Л.Н., Черемных Ю.Н. Моделирование экономических процессов: учебник. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. 351 с.

References

1. Saraev A.L., Saraev L.A. Continual theory of operating process and factor productivity of industrial enterprises // *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta*. 2012. № 7 (98). P. 196–203.
2. Saraev A.L., Saraev L.A. To the theory of structural modernization of industrial enterprises // *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta*. 2012. № 10 (101). P. 160–169.
3. Saraev A.L., Saraev L.A. To the estimate of profits and expenses of enterprises that modernize production structure // *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta*. 2013. № 1 (102). P. 186–196.
4. Mantulenko A.V., Saraev A.L., Saraev L.A. To the theory of optimal distribution of factors of production, operating and transaction expenses // *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta*. 2013. № 7 (108). P. 177–126.
5. Nizhegorodtsev R.M. Models of logistic dynamics as an instrument of economic analysis and prognostication // *Modelirovanie ekonomicheskoi dinamiki: risk, optimizatsiia, prognozirovanie*. M., 1997. P. 34–51.
6. Cheremnykh Yu.N. *Microeconomics. Advanced level: textbook*. M.: Infra-M, 2013. 844 p.
7. Gracheva M.V., Fadeeva L.N., Cheremnykh Yu. N. *Modelling of economic processes: textbook*. M.: YUNITI-DANA, 2005. 351 p.

*N.A. Dubrovina, L.A. Saraev**

MODEL OF ECONOMIC DEVELOPMENT OF MECHANICAL ENGINEERING, CONSIDERING CUMULATIVE DYNAMICS OF FACTORS OF PRODUCTION

In this paper a variant of mathematical model of economic development of mechanical engineering on the basis of dynamics of cumulative factors of production is suggested. Changes over time of these factors are described by differential equations of logistic curves that adequately reflect underlying macroeconomic aspects of the process of reproduction. Dynamics of industry output is given by multifactor production function with constant elasticity of substitution of resources. Evolutionary and innovative scenarios of economic development of mechanical engineering are viewed. Numerical analysis of resulting model showed good agreement with known statistics.

Key words: mechanical engineering, structure, factors of production, production function, production output, resources.

* *Dubrovina Natalya Alexandrovna* (mantulenko83@mail.ru), *Saraev Leonid Alexandrovich* (saraev_leo@mail.ru), the Dept. of Mathematics and Business-Informatics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.