УДК 330.101.54

*А.Л. Сараев, Л.А. Сараев**

МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИБЫЛИ ПРЕДПРИЯТИЯ, УЧИТЫВАЮЩАЯ СВЕРХПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ И ТРАНСАКЦИОННЫЕ ЗАТРАТЫ

В статье представлено обобщение построенной в работе [1] математической модели оптимизации прибыли предприятий на случай нелинейных сверхпропорциональных трансформационных и трансакционных непроизводственных затрат. Показано, что отличие от нуля трансакционных затрат делает недостижимой максимально возможную прибыль предприятия, причиной чего являются усилия менеджеров максимизировать не прибыль предприятия, а свою собственную полезность, выраженную в виде соответствующей трансакционной функции. Выполнен численный анализ моделей оптимального распределения ресурсов и трансакционных затрат предприятия.

Ключевые слова: предприятие, структура, факторы производства, производственная функция, затраты, прибыль, ресурсы, трансакционные затраты.

Производство и выпуск предприятием продукции обеспечивается использованием определенных ресурсов, которые могут быть представлены в виде координат вектора объемов факторов производства

$$\mathbf{Q} = (Q, M).$$

Здесь Q – привлекаемые в производство и выражаемые обычно в денежной форме основные и трудовые ресурсы, M – ресурсы, обеспечивающие косвенное вознаграждение менеджмента предприятия, правовое обеспечение контрактов, поиск дополнительной экономической информации и т. д. Фактор производства является источником

Сараев Александр Леонидович (alex.saraev@gmail.com), *Сараев Леонид Александрович* (saraev_leo@mail.ru), кафедра математики и бизнес-информатики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

только производственных трансформационных издержек, а ресурс M представляет собой источник возникновения как производственных, так и трансакционных издержек.

Эффективная работа предприятия представляет собой результат взаимодействия его собственников и наемных руководителей. Если целью собственников является получение максимальной прибыли предприятия, то целью менеджеров, помимо максимизации прибыли предприятия, может быть максимизация собственной полезности. Такая полезность выражается либо в форме получения косвенного вознаграждения (представительские расходы, услуги для исполнения административных функций и т. д.), либо в форме дискреционной прибыли, обеспечивающей дополнительные затраты на административный штат. И в том, и другом случае наемное руководство предприятия может направить эти средства в соответствии со своими предпочтениями без согласования с собственниками [2; 3]. Здесь очевиден недостаточный контроль над деятельностью менеджеров и проявляется ограниченность информации о производственной и оперативной деятельности предприятия, которой располагает собственник. Результат такого оппортунистического поведения менеджмента предприятия заключается в том, что вместо того объема выпуска продукции, который максимизирует прибыль предприятия, собственники получают некоторое его уменьшенное оптимальное для данных условий значение.

Пусть выпуск продукции производства TR обеспечивается производственной функцией Кобба-Дугласа

$$TR = P \cdot Q^a \cdot M^c. \tag{1}$$

Здесь степенные показатели производственной функции $0 < a < 1$, $0 < c < 1$ – представляют собой эластичности выпуска по соответствующим ресурсам, P – стоимость продукции, произведенной на единичные объемы ресурсов.

Общие затраты производства TC выражаются в виде суммы

$$TC = TVC + TSC + TFC. \tag{2}$$

Здесь

$$TVC = A_Q \cdot Q + A_M \cdot M.$$

– пропорциональные затраты, связанные с использованием основных и трудовых ресурсов, а также дополнительных трансакционных ресурсов,

$$TSC = B_Q \cdot Q^q + B_M \cdot M^m.$$

– сверхпропорциональные затраты, связанные с использованием основных и трудовых ресурсов, а также дополнительных трансакционных ресурсов, TFC – постоянные затраты предприятия, A_Q, A_M, B_Q, B_M – стоимости затрат на единичные объемы ресурсов соответственно, q, m – показатели нелинейности сверхпропорциональных затрат. Очевидно, что если показатели нелинейности q, m удовлетворяют неравенствам $0 < q < 1$, $0 < m < 1$, то затраты являются дигрессивными. Если же показатели нелинейности удовлетворяют неравенствам $q > 1$, $m > 1$, то затраты являются прогрессивными. Формула (2) принимает вид

$$TC = A_Q \cdot Q + A_M \cdot M + B_Q \cdot Q^q + B_M \cdot M^m + TFC. \tag{3}$$

Прибыль предприятия, представляющая собой разность между стоимостью выпуска продукции и стоимостью затрат на его производство, выражается соотношением

$$PR = P \cdot Q^a \cdot M^c - A_Q \cdot Q - A_M \cdot M - B_Q \cdot Q^q - B_M \cdot M^m - TFC. \tag{4}$$

Наибольший доход предприятия соответствует максимуму функции прибыли. В свою очередь, менеджмент предприятия стремится максимизировать целевую функцию собственной порядковой полезности, которая здесь также принимается в виде функции Кобба – Дугласа [3]

$$U = U(PR, M) = PR^u \cdot M^v \quad . \tag{5}$$

Степенные показатели $0 < u < 1$, $0 < v < 1$ функции полезности (5) характеризуют ее эластичность по прибыли предприятия и административным затратам.

В рамках некоторого краткосрочного периода работы предприятия изменениями основных и трудовых ресурсов можно пренебречь $Q = const$. Максимально возможное значение функции прибыли (4) при нулевых трансакционных издержках находится из условия

$$\frac{dPR}{dM} = 0,$$
$$P \cdot Q^a \cdot c \cdot M_{\max}^{c-1} - A_M - m \cdot B_M \cdot M_{\max}^{m-1} = 0. \tag{6}$$

Решением уравнения (6) является значение ресурса $M_{\max}$, при котором прибыль предприятия принимает максимальное значение. В общем случае уравнение (6) решить аналитически нельзя. Здесь, в отличие от результатов работы [1], возможно только численное решение. Максимально возможная прибыль предприятия выражается соотношением

$$PR_{\max} = P \cdot Q^a \cdot M_{\max}^c - A_Q \cdot Q - A_M \cdot M_{\max} - $$
$$- B_Q \cdot Q^q - B_M \cdot M_{\max}^m - TFC. \tag{7}$$

Для реальных условий при ненулевых трансакционных затратах наряду с максимизацией функции прибыли необходимо максимизировать целевую трансакционную функцию полезности. Оптимальное значение функции прибыли при ненулевых трансакционных издержках находится из условия

$$\frac{dU}{dM} = u \cdot PR^{u-1} \cdot \left(P \cdot Q^a \cdot c \cdot M^{c-1} - A_M - m \cdot B_M \cdot M^{m-1}\right) \cdot M^v +$$
$$+ PR^u \cdot v \cdot M^{v-1} = 0. \tag{8}$$

Оптимальное значение ресурса M_{opt} является решением уравнения

$$u \cdot \left(P \cdot Q^a \cdot c \cdot M_{\text{opt}}^{c-1} - A_M - m \cdot B_M \cdot M_{\text{opt}}^{m-1}\right) \cdot M_{\text{opt}} + v \cdot PR\left(M_{\text{opt}}\right) = 0,$$

которое с учетом формулы (6) принимает вид

$$P \cdot Q^a \cdot c \cdot \left(M_{\text{opt}}^{c-1} - M_{\max}^{c-1}\right) - m \cdot B_M \cdot \left(M_{\text{opt}}^{m-1} - M_{\max}^{m-1}\right) + \frac{v \cdot PR\left(M_{\text{opt}}\right)}{u \cdot M_{\text{opt}}} = 0. \tag{9}$$

В общем случае уравнение (9) тоже допускает только численное решение. Оптимальное значение прибыли предприятия выражается соотношением

$$PR_{\text{opt}} = P \cdot Q^a \cdot M_{\text{opt}}^c - A_Q \cdot Q - A_M \cdot M_{\text{opt}} - $$
$$- B_Q \cdot Q^q - B_M \cdot M_{\text{opt}}^m - TFC. \tag{10}$$

Применим формулы (6), (7) и (9), (10) для вычислений максимально возможного значения функции прибыли при нулевых трансакционных затратах и оптимального значения функции прибыли при ненулевых трансакционных издержках. Для расчетных данных

$$P = 10; a = 0{,}24; c = 0{,}26; A_Q = 2{,}0; A_M = 3{,}0; u = 0{,}48; v = 0{,}52;$$
$$TFC = 2{,}0; Q = 1{,}5; q = 0{,}25; m = 3{,}0; B_Q = 1{,}0; B_M = 2{,}0$$

были получены значения $M_{\max} = 0{,}522; PR_{\max} = 1{,}351$ и значения $M_{\max} = 0{,}522; PR_{\max} = 1{,}351$ и значения $M_{\mathrm{opt}} = 0{,}677; PR_{\mathrm{opt}} = 1{,}201$.

На рис. 1 приведены график функции прибыли $PR = PR(M)$ и кривая безразличия целевой трансакционной функции полезности $U(PR, M) = U_{\mathrm{opt}}$. Точка касания кривых $(PR_{\mathrm{opt}}, M_{\mathrm{opt}})$ соответствует решению уравнения (11).

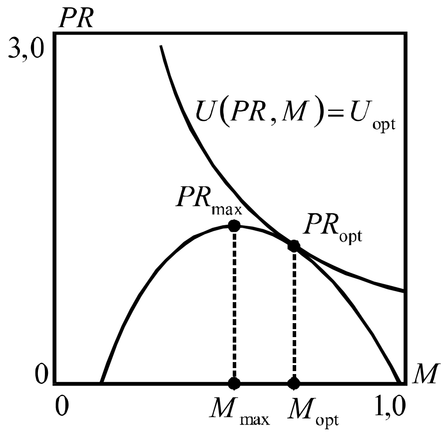

Рис. 1

Рассмотрим теперь долгосрочный период работы предприятия, в рамках которого производственный фактор ресурсов Q является переменной величиной. В этом случае максимальное возможное значение функции прибыли при нулевых трансакционных издержках находится из условий

$$\begin{cases} \dfrac{\partial PR}{\partial Q} = P \cdot a \cdot Q^{a-1} \cdot M^c - A_Q - q \cdot B_Q \cdot Q^{q-1} = 0, \\ \dfrac{\partial PR}{\partial M} = P \cdot c \cdot Q^a \cdot M^{c-1} - A_M - m \cdot B_M \cdot M^{m-1} = 0. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{\partial PR}{\partial Q} = a \cdot \left(P \cdot Q^{a-1} \cdot M^c - \alpha_Q - q \cdot \beta_Q \cdot Q^{q-1}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial PR}{\partial M} = c \cdot \left(P \cdot Q^a \cdot M^{c-1} - \alpha_M - m \cdot \beta_M \cdot M^{m-1}\right) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Здесь

$$\alpha_Q = \frac{A_Q}{a}, \alpha_M = \frac{A_M}{c}, \beta_Q = \frac{B_Q}{a}, \beta_M = \frac{B_M}{c}.$$

Систему (11) можно представить в виде

$$\begin{cases} P \cdot Q^a \cdot M^c - q \cdot \beta_Q \cdot Q^q - \alpha_Q \cdot Q = 0, \\ P \cdot Q^a \cdot M^c - m \cdot \beta_M \cdot M^m - \alpha_M \cdot M = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Решение системы уравнений (12) дает значения ресурсов $Q_{\max}, M_{\max}$, при котором прибыль предприятия принимает максимальное значение. Структура уравнений (12) показывает, что их можно решить только численно. Максимально возможная прибыль предприятия выражается соотношением

$$\begin{aligned} PR_{\max} &= P \cdot Q_{\max}^a \cdot M_{\max}^c - A_Q \cdot Q_{\max} - A_M \cdot M_{\max} - \\ &- B_Q \cdot Q_{\max}^q - B_M \cdot M_{\max}^m - TFC. \end{aligned} \tag{13}$$

Для реальных условий при не равных нулю трансакционных издержках необходима совместная максимизация функции прибыли и целевой трансакционной функции полезности. В этом случае оптимальные значения ресурсов, функции прибыли и трансакционной функции полезности находятся из условий:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial Q} = u \cdot PR^{u-1} \cdot \left(P \cdot a \cdot Q^{a-1} \cdot M^c - A_Q - q \cdot B_Q \cdot Q^{q-1}\right) \cdot M^v = 0, \\ \dfrac{\partial U}{\partial M} = u \cdot PR^{u-1} \cdot \left(P \cdot c \cdot Q^a \cdot M^{c-1} - A_M - m \cdot B_M \cdot M^{m-1}\right) \cdot M^v + \\ \qquad + PR^u \cdot v \cdot M^{v-1} = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Систему уравнений (14) можно представить в виде

$$\begin{cases} P \cdot Q^a \cdot M^c - \alpha_Q \cdot Q - q \cdot \beta_Q \cdot Q^q = 0, \\ P \cdot Q^a \cdot M^c - \alpha_M \cdot M - m \cdot \beta_M \cdot M^m + \dfrac{v}{u \cdot c} \cdot PR = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Решение системы уравнений (15) дает значения ресурсов $Q_{\text{opt}}, M_{\text{opt}}$, при котором прибыль предприятия принимает оптимальное значение. Структура уравнений (15) показывает, что их можно решить только численно. Оптимальная прибыль предприятия выражается соотношением

$$\begin{aligned} PR_{\text{opt}} &= P \cdot Q_{\text{opt}}^a \cdot M_{\text{opt}}^c - A_Q \cdot Q_{\text{opt}} - A_M \cdot M_{\text{opt}} - \\ &- B_Q \cdot Q_{\text{opt}}^q - B_M \cdot M_{\text{opt}}^m - TFC. \end{aligned} \tag{16}$$

Применим формулы (12), (13) и (15), (16) для вычислений максимально возможного значения функции прибыли при нулевых трансакционных издержках и оптимального значения функции прибыли при ненулевых трансакционных издержках. Для вышеприведенных расчетных данных были получены значения

$M_{\max} = 0{,}471$; $Q_{\max} = 0{,}822$; $PR_{\max} = 2{,}787$ и значения $M_{\mathrm{opt}} = 0{,}671$; $Q_{\mathrm{opt}} = 0{,}944$; $PR_{\mathrm{opt}} = 1{,}399$.

На рис. 2. приведены график поверхности функции прибыли $PR = PR(Q,M)$ и поверхность безразличия целевой трансакционной функции полезности $U(PR,M) = U_{\mathrm{opt}}$. Точка касания поверхностей соответствует совместному решению уравнений (12) и (16).

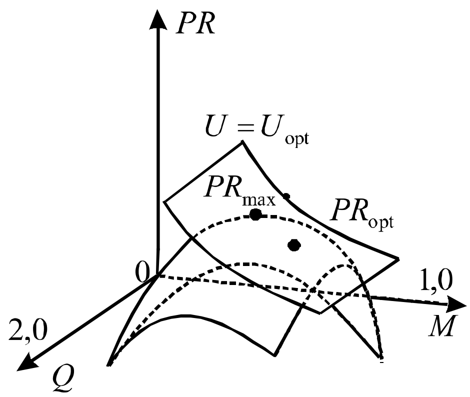

Рис. 2

Разделение общего объема производства Q на основной капитал (производственные фонды) K и привлекаемые в производство трудовые ресурсы L существенно усложняет модель распределения ресурсов. В этом случае выпуск продукции производства TR обеспечивается трехфакторной производственной функцией Кобба–Дугласа

$$TR = P \cdot K^a \cdot L^b \cdot M^c \tag{17}$$

Здесь по-прежнему степенные показатели производственной функции $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, $0 < c < 1$ представляют собой эластичности выпуска по соответствующим ресурсам, P – стоимость продукции, произведенной на единичные объемы ресурсов.

Выражение для общих затрат производства TC принимает вид

$$\begin{aligned} TC &= A_K \cdot K + A_L \cdot L + A_M \cdot M + \\ &+ B_K \cdot K^k + A_L \cdot L^l + A_M \cdot M^m + TFC. \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь $A_K, A_L, A_M, B_K, B_L, B_M$ – стоимости затрат на единичные объемы ресурсов, k, l, m – показатели нелинейности сверхпропорциональных затрат.

Прибыль предприятия выражается соотношением

$$\begin{aligned} PR &= P \cdot K^a \cdot L^b \cdot M^c - A_K \cdot K - A_L \cdot L - A_M \cdot M - \\ &- B_K \cdot K^k - A_L \cdot L^l - A_M \cdot M^m - TFC. \end{aligned} \tag{19}$$

Максимально возможное значение функции прибыли (19) при нулевых трансакционных издержках находится из условий:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial PR}{\partial K} = P \cdot a \cdot K^{a-1} \cdot L^{b} \cdot M^{c} - A_K - k \cdot B_K \cdot K^{k-1} = 0, \\ \dfrac{\partial PR}{\partial L} = P \cdot b \cdot K^{a} \cdot L^{b-1} \cdot M^{c} - A_L - l \cdot B_L \cdot L^{l-1} = 0, \\ \dfrac{\partial PR}{\partial M} = P \cdot c \cdot K^{a} \cdot L^{b} \cdot M^{c-1} - A_M - m \cdot B_M \cdot M^{m-1} = 0. \end{cases}$$

Значения производственных и непроизводственных факторов, при которых достигается максимально возможное значение функции прибыли при нулевых трансакционных издержках, находится из системы уравнений

$$\begin{cases} P \cdot K_{\max}^{a} \cdot L_{\max}^{b} \cdot M_{\max}^{c} - \alpha_K \cdot K_{\max} - k \cdot \beta_K \cdot K_{\max}^{k} = 0, \\ P \cdot K_{\max}^{a} \cdot L_{\max}^{b} \cdot M_{\max}^{c} - \alpha_L \cdot L_{\max} - l \cdot \beta_L \cdot L_{\max}^{l} = 0, \\ P \cdot K_{\max}^{a} \cdot L_{\max}^{b} \cdot M_{\max}^{c} - \alpha_M \cdot M_{\max} - m \cdot \beta_M \cdot M_{\max}^{m} = 0, \end{cases} \tag{20}$$

допускающей в общем случае только численное решение. Максимально возможная прибыль предприятия выражается соотношением

$$\begin{aligned} PR_{\max} &= P \cdot K_{\max}^{a} \cdot L_{\max}^{b} \cdot M_{\max}^{c} - A_K \cdot K_{\max} - A_L \cdot L_{\max} - \\ &- A_M \cdot M_{\max} - B_K \cdot K_{\max}^{k} - A_L \cdot L_{\max}^{l} - A_M \cdot M_{\max}^{m} - TFC. \end{aligned} \tag{21}$$

При ненулевых трансакционных затратах необходимо совместно максимизировать функцию прибыли и целевую трансакционную функцию полезности. Оптимальные значения ресурсов, функции прибыли и трансакционной функции полезности находятся из условий:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial K} = u \cdot PR^{u-1} \cdot \left(P \cdot a \cdot K^{a-1} \cdot L^{b} \cdot M^{c} - A_K - k \cdot B_K \cdot K^{k-1}\right) \cdot M^{v} = 0, \\ \dfrac{\partial U}{\partial L} = u \cdot PR^{u-1} \cdot \left(P \cdot b \cdot K^{a} \cdot L^{b-1} \cdot M^{c} - A_L - l \cdot B_L \cdot L^{l-1}\right) \cdot M^{v} = 0, \\ \dfrac{\partial U}{\partial M} = u \cdot PR^{u-1} \cdot \left(P \cdot c \cdot K^{a} \cdot L^{b} \cdot M^{c-1} - A_M - m \cdot B_M \cdot M^{m-1}\right) \cdot M^{v} + \\ \qquad + PR^{u} \cdot v \cdot M^{v-1} = 0. \end{cases} \tag{22}$$

Численное решение системы уравнений (22) дает значения ресурсов $K_{\text{opt}}, L_{\text{opt}}, M_{\text{opt}}$, при котором прибыль предприятия принимает оптимальное значение. Оптимальная прибыль предприятия выражается соотношением

$$\begin{aligned} PR_{\text{opt}} &= P \cdot K_{\text{opt}}^{a} \cdot L_{\text{opt}}^{b} \cdot M_{\text{opt}}^{c} - A_K \cdot K_{\text{opt}} - A_L \cdot L_{\text{opt}} - \\ &- A_M \cdot M_{\text{opt}} - B_K \cdot K_{\text{opt}}^{k} - A_L \cdot L_{\text{opt}a}^{l} - A_M \cdot M_{\text{opt}}^{m} - TFC. \end{aligned} \tag{23}$$

Применим формулы (20)—(23) для вычислений максимально возможного значения функции прибыли при нулевых трансакционных издержках и оптимального значения функции прибыли при ненулевых трансакционных издержках. Для расчетных данных

$$P = 15; a = 0{,}24; b = 0{,}25; c = 0{,}26; A_K = 1{,}60; A_L = 1{,}55;$$
$$A_M = 3{,}00; B_K = 1{,}00; B_L = 1{,}50; B_M = 2{,}00; u = 0{,}48;$$
$$v = 0{,}52; TFC = 2; k = 0{,}25; l = 0{,}26; m = 3{,}00.$$

были получены значения; $K_{\max} = 4{,}441$; $L_{\max} = 4{,}644$; $M_{\max} = 0{,}955$; $PR_{\max} = 6{,}519$ и значения; $K_{\text{opt}} = 5{,}164$; $L_{\text{opt}} = 5{,}416$; $M_{\text{opt}} = 1{,}255$; $PR_{\text{opt}} = 5{,}787$.

Библиографический список

1. Мантуленко А.В., Сараев А.Л., Сараев Л.А. К теории оптимального распределения факторов производства, производственных и трансакционных издержек // Вестник Самарского государственного университета. 2013. № 7 (108). С. 177–126.
2. Уильямсон О.И. Экономические институты капитализма. Фирмы, рынки, отношенческая контрактация. СПб.: Лениздат, SEV Press, 1996. 702 с.
3. Фуруботн Э.Г., Рихтер Р. Институты и экономическая теория. Достижения новой институциональной экономической теории. СПб.: Изд. дом СПб. гос. ун-та. 2005. 702 с.
4. Попов Е.В., Коновалов А.А. Модель оптимизации издержек поиска информации // Проблемы управления. 2008. № 3. С. 69–72.

A.L. Saraev, L.A. Saraev*

OPTIMIZATION MODEL OF PROFIT OF ORGANIZATIONS, CONSIDERING SUPERPROPORTIONALLY PRODUCTION AND TRANSACTION COSTS

In the published article generalization of constructed in [1], the mathematical model of optimization of profit of enterprises in case of nonlinear superproportionally transformational and transactional non-operating expenses. It is shown that deviation from zero of transaction costs makes unattainable maximum possible profit of an enterprise and the reason for this are the efforts of managers to maximize not profit of an enterprise, but their own utility, expressed in the form of appropriate transactional function. Numerical analysis of models of optimal resource allocation and transaction costs of an enterprise is carried out.

Key words: company structure, factors of production, production function, costs, profit, resources, transaction costs.

* *Saraev Alexander Leonidovich* (alex.saraev@gmail.com), *Saraev Leonid Alexandrovich* (saraev_leo@mail.ru),the Dept. of Mathematics and Business-Informatics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.