УДК 330.101.54

А.В. Мантуленко, А.Л. Сараев, Л.А. Сараев *

К ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФАКТОРОВ ПРОИЗВОДСТВА, ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ И ТРАНСАКЦИОННЫХ ИЗДЕРЖЕК

В статье представлены математические модели оптимизации прибыли предприятий, несущих определенные трансакционные непроизводственные издержки. Такого рода затраты могут быть связаны с маркетинговыми исследованиями, ограниченностью экономической информации, правовым обеспечением контрактов, оппортунистическим поведением менеджеров и т. д. Анализ полученных моделей показывает, что учет трансакционных издержек приводит к недостижимости максимально возможной прибыли предприятий, поскольку на практике менеджмент предприятия максимизирует не прибыль, а свою полезность, выраженную в виде соответствующей трансакционной функции. Выполнен численный анализ моделей оптимального распределения ресурсов и трансакционных издержек предприятия.

Ключевые слова: предприятие, структура, факторы производства, производственная функция, затраты, прибыль, ресурсы, трансакционные издержки.

Производство и выпуск предприятием любой продукции обеспечиваются использованием определенных ресурсов. Эти ресурсы, выражаемые обычно в денежной форме, могут быть представлены в виде координат некоторого вектора объемов факторов производства

$$\mathbf{Q} = (Q, M).$$

Здесь Q − привлекаемые в производство основные и трудовые ресурсы, M − ресурсы, обеспечивающие косвенное вознаграждение менеджмента предприятия, правовое обеспечение контрактов, поиск дополнительной экономической инфор-

Мантуленко Алексей Вячеславович (mantulenko83@mail.ru), *Сараев Александр Леонидович* (alex.saraev@gmail.com), *Сараев Леонид Александрович* (saraev_leo@mail.ru), кафедра математики и бизнес-информатики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

мации и т. д. Фактор производства Q является источником только производственных трансформационных издержек, а ресурс M представляет собой источник возникновения как производственных, так и трансакционных издержек.

Эффективная работа предприятия в определенной мере обусловлена взаимодействием его собственников (акционеров) и наемных руководителей (менеджеров). Очевидно, что собственники стремятся к получению максимальной прибыли предприятия, а устремления менеджеров помимо максимизации прибыли предприятия могут быть направлены на максимизацию собственной полезности. Такая полезность выражается либо в форме получения косвенного вознаграждения (представительские расходы, услуги для исполнения административных функций и т. д.), либо в форме дискреционной прибыли, обеспечивающей дополнительные затраты на административный штат. И в том и другом случае менеджмент предприятия может направить эти средства в соответствии со своими предпочтениями без согласования с собственниками [1–4]. Все это является следствием как недостаточного контроля над деятельностью менеджеров, так и ограниченности информации о производственной и оперативной деятельности предприятия, которой располагает собственник. Результат такого оппортунистического поведения менеджмента предприятия проявляется в том, что вместо того объема выпуска продукции, который максимизирует прибыль предприятия, собственники получают некоторое его уменьшенное оптимальное для данных условий значение.

Пусть выпуск продукции производства TR обеспечивается производственной функцией Кобба–Дугласа

$$TR = P \cdot Q^a \cdot M^c. \tag{1}$$

Здесь степенные показатели производственной функции $0 < a < 1$, $0 < c < 1$ представляют собой эластичности выпуска по соответствующим ресурсам, P – стоимость продукции, произведенной на единичные объемы ресурсов.

Общие затраты производства TC выражаются в виде суммы

$$TC = TVC + TTC + TFC. \tag{2}$$

Здесь $TVC = A_Q \cdot Q$ –затраты, связанные с использованием основных и трудовых ресурсов, $TTC = A_M \cdot M$ – затраты, связанные с использованием дополнительных трансакционных ресурсов, TFC – постоянные затраты предприятия, A_Q, A_M – стоимости затрат на единичные объемы ресурсов соответственно. Формула (2) принимает вид

$$TC = A_Q \cdot Q + A_M \cdot M + TFC. \tag{3}$$

Прибыль предприятия, представляющая собой разность между стоимостью выпуска продукции и стоимостью затрат на его производство, выражается соотношением

$$PR = P \cdot Q^a \cdot M^c - A_Q \cdot Q - A_M \cdot M - TFC. \tag{4}$$

Для получения наибольшего дохода предприятие должно максимизировать функцию прибыли (4). Однако на практике менеджмент предприятия стремится максимизировать целевую функцию собственной порядковой полезности, которая здесь также принимается в виде функции Кобба–Дугласа [2]

$$U = U(PR, M) = PR^u \cdot M^v. \tag{5}$$

Степенные показатели $0 < u < 1$, $0 < v < 1$ функции полезности (5) характеризуют ее эластичность по прибыли предприятия и административным затратам.

Рассмотрим сначала краткосрочный период работы предприятия, при котором изменениями основных и трудовых ресурсов можно пренебречь $Q = const$. Тогда максимальное возможное значение функции прибыли (4) при нулевых трансакционных издержках находится из условия

$$\frac{dPR}{dM} = P \cdot Q^a \cdot c \cdot M^{c-1} - A_M = 0. \tag{6}$$

Решение уравнения (6) дает значение ресурса

$$M_{\max} = \left(\frac{A_M}{P \cdot c \cdot Q^a} \right)^{\frac{1}{c-1}} = \left(\frac{P \cdot Q^a}{\alpha_M} \right)^{\frac{1}{1-c}}, \tag{7}$$

при котором прибыль предприятия принимает максимальное значение

$$PR_{\max} = P \cdot Q^a \cdot M_{\max}^c - A_Q \cdot Q - A_M \cdot M_{\max} - TFC. \tag{8}$$

Здесь $\alpha_M = \dfrac{A_M}{c}$. Поскольку в реальных условиях трансакционные издержки всегда не равны нулю, то наряду с максимизацией функции прибыли (4) приходится максимизировать целевую трансакционную функцию полезности (5), которая с учетом функции (4) принимает вид

$$U = PR^u \cdot M^v = \left(P \cdot Q^a \cdot M^c - A_Q \cdot Q - A_M \cdot M - TFC\right)^u \cdot M^v. \tag{9}$$

Оптимальное значение функции прибыли (4) при ненулевых трансакционных издержках находится из условия

$$\frac{dU}{dM} = u \cdot PR^{u-1} \cdot \left(P \cdot Q^a \cdot c \cdot M^{c-1} - A_M\right) \cdot M^v + PR^u \cdot v \cdot M^{v-1} = 0. \tag{10}$$

Оптимальное значение ресурса M_{opt} является решением уравнения

$$u \cdot \left(P \cdot Q^a \cdot c \cdot M_{\text{opt}}^{c-1} - A_M\right) \cdot M_{\text{opt}} + v \cdot PR\left(M_{\text{opt}}\right) = 0,$$

которое с учетом формулы (7) принимает вид

$$u \cdot P \cdot Q^a \cdot c \cdot M_{\text{opt}} \cdot \left(M_{\text{opt}}^{c-1} - M_{\max}^{c-1}\right) + v \cdot PR\left(M_{\text{opt}}\right) = 0. \tag{11}$$

Структура уравнения (11) показывает, что его можно решить только численно. Поскольку все величины $u, P, Q, c, M_{\text{opt}}, v, PR$ являются неотрицательными, то из уравнения (11) следует очевидное неравенство

$$M_{\text{opt}}^{c-1} - M_{\max}^{c-1} < 0.$$

Учитывая, что $0 < 1 - c < 1$, получаем

$$\left(\frac{1}{M_{\text{opt}}} \right)^{1-c} < \left(\frac{1}{M_{\max}} \right)^{1-c},$$

или

$$M_{\text{opt}} > M_{\max}. \tag{12}$$

Применим формулы (7), (8) и (11) для вычислений максимально возможного значения функции прибыли (4) при нулевых трансакционных издержках и оптимального значения функции прибыли (4) при ненулевых трансакционных издержках. Для расчетных данных

$$P = 10; a = 0{,}24; c = 0{,}26; A_Q = 2;$$

$$A_M = 3; u = 0{,}48; v = 0{,}52; TFC = 2; Q = 1{,}5;$$

в результате были получены значения $M_{\max} = 0{,}940; PR_{\max} = 3{,}026$ и значения $M_{\text{opt}} = 1{,}952; PR_{\text{opt}} = 2{,}259$.

На рис. 1 приведены график функции прибыли $PR = PR(M)$ и кривая безразличия целевой трансакционной функции полезности $U(PR, M) = U_{\text{opt}}$. Точка касания кривых $(PR_{\text{opt}}, M_{\text{opt}})$ соответствует решению уравнения (11).

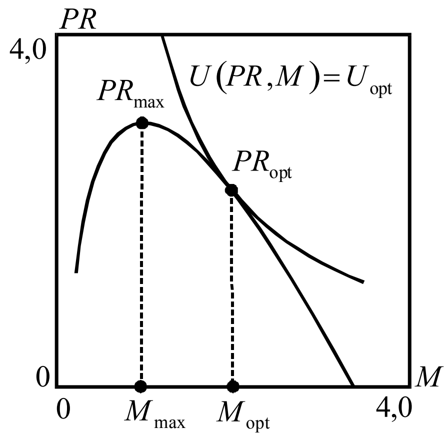

Рис. 1

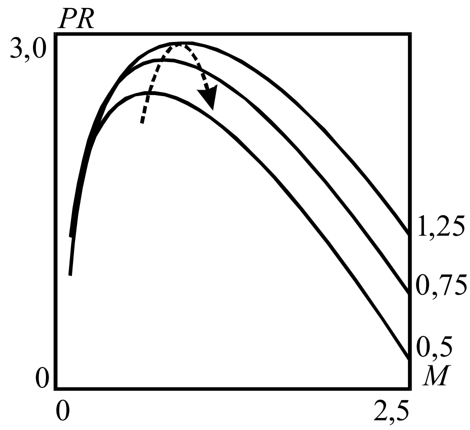

Рис. 2

Выбирая в этих расчетах различные значения параметра привлекаемых в производстве основных и трудовых ресурсов Q, можно проследить динамику изменений функции прибыли PR, ее максимального и оптимального значений $PR_{\max}$ и PR_{opt} [5].

На рис. 2 приведены кривые прибыли PR для различных значений параметра Q. Цифры у кривых – значения параметра Q. Штриховая линия соответствует изменению максимального значения функции прибыли $PR_{\max}$.

Численный анализ выполненных расчетов показывает, что до определенного значения фактора производства Q максимальное значение прибыли $PR_{\max}$ увеличивается, а затем уменьшается.

На рис. 3 показаны графики функций прибыли $PR = PR(M)$ и кривых безразличия целевой трансакционной функции полезности $U(PR, M) = U_{\text{opt}}$ для различных значений параметра Q. Цифры у кривых – значения параметра Q. Штриховая линия соответствует изменению оптимального значения функции прибыли PR_{opt}.

Численный анализ выполненных расчетов показывает, что до определенного значения фактора производства Q оптимальное значение прибыли PR_{opt} увеличивается, а затем уменьшается.

Рассмотрим теперь долгосрочный период работы предприятия, в рамках которого производственный фактор ресурсов Q является переменной величиной. В этом случае максимальное возможное значение функции прибыли (4) при нулевых трансакционных издержках находится из условий

$$\begin{cases} \dfrac{\partial PR}{\partial Q} = P \cdot a \cdot Q^{a-1} \cdot M^{c} - A_Q = 0, \\ \dfrac{\partial PR}{\partial M} = P \cdot c \cdot Q^{a} \cdot M^{c-1} - A_M = 0. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{\partial PR}{\partial Q} = a \cdot \left(P \cdot Q^{a-1} \cdot M^{c} - \alpha_Q\right) = 0, \\ \dfrac{\partial PR}{\partial M} = c \cdot \left(P \cdot Q^{a} \cdot M^{c-1} - \alpha_M\right) = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Здесь $\alpha_Q = \dfrac{A_Q}{c}$. Систему (13) можно представить в виде

$$\begin{cases} P \cdot Q^{a} \cdot M^{c} = \alpha_Q \cdot Q, \\ P \cdot Q^{a} \cdot M^{c} = \alpha_M \cdot M. \end{cases} \tag{14}$$

Из уравнений (14) следует, что величины $M_{\max}$ и $Q_{\max}$ связаны соотношением

$$M_{\max} = \frac{\alpha_Q}{\alpha_M} \cdot Q_{\max}. \tag{15}$$

Подставляя формулу (15) в первое из уравнений (14), находим

$$P \cdot Q_{\max}^{a+c-1} \cdot \left(\frac{\alpha_Q}{\alpha_M}\right)^{c} = \alpha_Q.$$

Таким образом, значения ресурсов, при которых прибыль предприятия принимает максимальное значение

$$PR_{\max} = P \cdot Q_{\max}^{a} \cdot M_{\max}^{c} - A_Q \cdot Q_{\max} - A_M \cdot M_{\max} - TFC,$$

определяются формулами

$$\begin{cases} Q_{\max} = \left(\dfrac{P}{\alpha_Q}\right)^{\frac{1}{1-a-c}} \cdot \left(\dfrac{\alpha_Q}{\alpha_M}\right)^{\frac{c}{1-a-c}}, \\ M_{\max} = \left(\dfrac{P}{\alpha_M}\right)^{\frac{1}{1-a-c}} \cdot \left(\dfrac{\alpha_M}{\alpha_Q}\right)^{\frac{a}{1-a-c}}. \end{cases} \tag{16}$$

Для реальных условий при не равных нулю трансакционных издержках необходима совместная максимизация функции прибыли (4) и целевой трансакционной функции полезности (5). В этом случае оптимальные значения ресурсов, функции прибыли и трансакционной функции полезности находятся из условий

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial Q} = u \cdot PR^{u-1} \cdot \left(P \cdot a \cdot Q^{a-1} \cdot M^{c} - A_Q\right) \cdot M^{v} = 0, \\ \dfrac{\partial U}{\partial M} = u \cdot PR^{u-1} \cdot \left(P \cdot c \cdot Q^{a} \cdot M^{c-1} - A_M\right) \cdot M^{v} + PR^{u} \cdot v \cdot M^{v-1} = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Из первого уравнения системы (17) следует, что величины M_{opt} и Q_{opt} связаны соотношением

$$M_{\text{opt}}^{c} = \frac{A_Q}{a \cdot P \cdot Q_{\text{opt}}^{a-1}} = \frac{\alpha_Q}{P} \cdot Q_{\text{opt}}^{1-a} \; . \tag{18}$$

Второе уравнение системы (17) принимает вид

$$u \cdot M_{\text{opt}} \cdot \left(P \cdot c \cdot Q_{\text{opt}}^{a} \cdot M_{\text{opt}}^{c-1} - A_M\right) + v \cdot PR\left(Q_{\text{opt}}, M_{\text{opt}}\right) = 0 \, . \tag{19}$$

Поскольку все величины $u, P, Q_{\text{opt}}, c, M_{\text{opt}}, v, PR$ являются неотрицательными, то из уравнения (19) следует очевидное неравенство

$$P \cdot c \cdot Q_{\text{opt}}^{a} \cdot M_{\text{opt}}^{c-1} - A_M < 0$$

или

$$P \cdot Q_{\text{opt}}^{a} \cdot M_{\text{opt}}^{c-1} - \alpha_M < 0 \, . \tag{20}$$

Умножая соотношение (18) на величину Q_{opt}^{a}, находим

$$Q_{\text{opt}}^{a} \cdot M_{\text{opt}}^{c} = \frac{\alpha_Q}{P} \cdot Q_{\text{opt}} \, . \tag{21}$$

Подстановка формулы (21) в неравенство (20) дает

$$\alpha_Q \cdot Q_{\text{opt}} < \alpha_M \cdot M_{\text{opt}}$$

или

$$\frac{Q_{\text{opt}}}{M_{\text{opt}}} < \frac{\alpha_M}{\alpha_Q} \; . \tag{22}$$

Из соотношения (15) и неравенства (22) следует, что если $Q_{\text{opt}} > Q_{\max}$, то $M_{\text{opt}} > M_{\max}$.

Подставляя формулу (21) в уравнение (19), находим

$$u \cdot c \cdot \left(\alpha_Q \cdot Q_{\text{opt}} \cdot - \alpha_M \cdot M_{\text{opt}}\right) +$$
$$+ v \cdot \left(\alpha_Q \cdot Q_{\text{opt}} - a \cdot \alpha_Q \cdot Q_{\text{opt}} - c \cdot \alpha_M \cdot M_{\text{opt}} - TFC\right) = 0.$$

Выразим отсюда величину M_{opt}

$$M_{\text{opt}} = \frac{u \cdot c + v \cdot (1-a)}{(u+v) \cdot c} \cdot \frac{\alpha_Q}{\alpha_M} \cdot Q_{\text{opt}} - \frac{v \cdot TFC}{(u+v) \cdot c \cdot \alpha_M} \, . \tag{23}$$

Подставляя соотношение (18) в формулу (23), находим уравнение для величины Q_{opt}

$$\left(\frac{\alpha_Q}{P}\right)^{\frac{1}{c}} \cdot Q_{\text{opt}}^{\frac{1-a}{c}} - \frac{u \cdot c + v \cdot (1-a)}{(u+v) \cdot c} \cdot \frac{\alpha_Q}{\alpha_M} \cdot Q_{\text{opt}} + \frac{v \cdot TFC}{(u+v) \cdot c \cdot \alpha_M} = 0. \quad (24)$$

Структура уравнения (24) показывает, что его можно решить только численно.

Применим формулы (16), (23) и (24) для вычислений максимально возможного значения функции прибыли (4) при нулевых трансакционных издержках и оптимального значения функции прибыли (4) при ненулевых трансакционных издержках. Для расчетных данных

$P = 10; a = 0{,}24; c = 0{,}26; A_Q = 2;$

$A_M = 3; u = 0{,}48; v = 0{,}52; TFC = 2$

были получены значения $M_{\max} = 0{,}878$; $Q_{\max} = 1{,}215$; $PR_{\max} = 3{,}066$ и значения $M_{\text{opt}} = 1{,}968$; $Q_{\text{opt}} = 1{,}602$; $PR_{\text{opt}} = 2{,}245$.

На рис. 4 приведены график поверхности функции прибыли $PR = PR(Q, M)$ и поверхность безразличия целевой трансакционной функции полезности $U(PR, M) = U_{\text{opt}}$. Точка касания поверхностей соответствует решению уравнений (23) и (24).

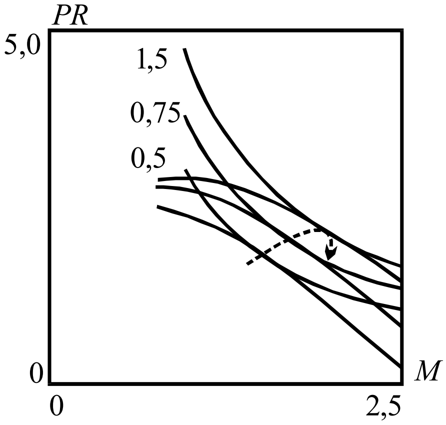

Рис. 3

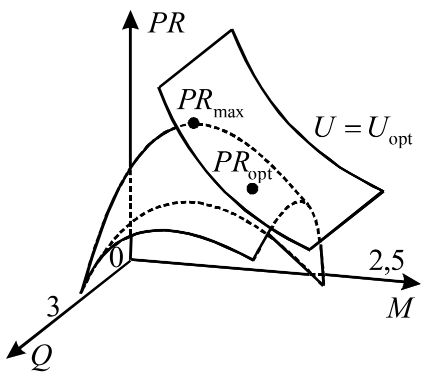

Рис. 4

Рассмотрим теперь более сложную многофакторную модель распределения ресурсов, согласно которой общий объем производства Q разделен на основной капитал (производственные фонды) K и привлекаемые в производство трудовые ресурсы L. В этом случае выпуск продукции производства TR обеспечивается трехфакторной производственной функцией Кобба–Дугласа

$$TR = P \cdot K^a \cdot L^b \cdot M^c. \quad (25)$$

Здесь по-прежнему степенные показатели этой производственной функции $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, $0 < c < 1$ представляют собой эластичности выпуска по соответствующим ресурсам, P – стоимость продукции, произведенной на единичные объемы ресурсов.

Выражение для общих затрат производства TC принимает вид

$$TC = A_K \cdot K + A_L \cdot L + A_M \cdot M + TFC. \qquad (26)$$

Здесь A_K, A_L, A_M – стоимости затрат на единичные объемы ресурсов.

Прибыль предприятия, представляющая собой разность между стоимостью выпуска продукции и стоимостью затрат на его производство, выражается соотношением

$$PR = P \cdot K^a \cdot L^b \cdot M^c - A_K \cdot K - A_L \cdot L - A_M \cdot M - TFC. \qquad (27)$$

В связи с этим целевая функция собственной порядковой полезности менеджмента $U = U(PR, M) = PR^u \cdot M^v$ принимает вид

$$U = \left(P \cdot K^a \cdot L^b \cdot M^c - A_K \cdot K - A_L \cdot L - A_M \cdot M - TFC\right)^u \cdot M^v \qquad (28)$$

Ее степенные показатели $0 < u < 1$, $0 < v < 1$ характеризуют эластичность по прибыли предприятия и административным затратам.

Максимально возможное значение функции прибыли (27) при нулевых трансакционных издержках находится из условий

$$\begin{cases} \dfrac{\partial PR}{\partial K} = P \cdot a \cdot K^{a-1} \cdot L^b \cdot M^c - A_K = 0, \\ \dfrac{\partial PR}{\partial L} = P \cdot b \cdot K^a \cdot L^{b-1} \cdot M^c - A_L = 0, \\ \dfrac{\partial PR}{\partial M} = P \cdot c \cdot K^a \cdot L^b \cdot M^{c-1} - A_M = 0 \end{cases} \qquad (29)$$

или

$$\begin{cases} P \cdot K_{\max}^a \cdot L_{\max}^b \cdot M_{\max}^c = \alpha_K \cdot K_{\max}, \\ P \cdot K_{\max}^a \cdot L_{\max}^b \cdot M_{\max}^c = \alpha_L \cdot L_{\max}, \\ P \cdot K_{\max}^a \cdot L_{\max}^b \cdot M_{\max}^c = \alpha_M \cdot M_{\max}. \end{cases} \qquad (30)$$

Из уравнений (30) следует, что величины $K_{\max}, L_{\max}, M_{\max}$ связаны соотношениями

$$L_{\max} = \frac{\alpha_K}{\alpha_L} \cdot K_{\max}, \; M_{\max} = \frac{\alpha_K}{\alpha_M} \cdot K_{\max}. \qquad (31)$$

Подставляя формулы (31) в первое уравнение (30), получим

$$P \cdot K_{\max}^{a+b+c-1} \cdot \left(\frac{\alpha_K}{\alpha_L}\right)^b \cdot \left(\frac{\alpha_K}{\alpha_M}\right)^c = \alpha_K. \qquad (32)$$

Выражение для максимальной величины ресурса $K_{\max}$ имеет вид

$$K_{\max} = \left(\frac{P}{\alpha_K}\right)^{\frac{1}{1-a-b-c}} \cdot \left(\frac{\alpha_K}{\alpha_L}\right)^{\frac{b}{1-a-b-c}} \cdot \left(\frac{\alpha_K}{\alpha_M}\right)^{\frac{c}{1-a-b-c}}. \qquad (33)$$

Совершенно аналогично находится максимальная величина ресурса

$$L_{\max} = \left(\frac{P}{\alpha_L}\right)^{\frac{1}{1-a-b-c}} \cdot \left(\frac{\alpha_L}{\alpha_K}\right)^{\frac{a}{1-a-b-c}} \cdot \left(\frac{\alpha_L}{\alpha_M}\right)^{\frac{c}{1-a-b-c}} \tag{34}$$

и максимальная величина ресурса

$$M_{\max} = \left(\frac{P}{\alpha_M}\right)^{\frac{1}{1-a-b-c}} \cdot \left(\frac{\alpha_M}{\alpha_K}\right)^{\frac{a}{1-a-b-c}} \cdot \left(\frac{\alpha_M}{\alpha_L}\right)^{\frac{b}{1-a-b-c}}. \tag{35}$$

Поскольку в реальных условиях на практике трансакционные издержки всегда отличны от нуля, необходимо совместно максимизировать функцию прибыли (27) и целевую трансакционную функцию полезности (28). В таком случае оптимальные значения ресурсов, функции прибыли и трансакционной функции полезности находятся из условий

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial K} = u \cdot PR^{u-1} \cdot \left(P \cdot a \cdot K^{a-1} \cdot L^b \cdot M^c - A_K\right) \cdot M^v = 0, \\ \dfrac{\partial U}{\partial L} = u \cdot PR^{u-1} \cdot \left(P \cdot b \cdot K^a \cdot L^{b-1} \cdot M^c - A_L\right) \cdot M^v = 0, \\ \dfrac{\partial U}{\partial M} = u \cdot PR^{u-1} \cdot \left(P \cdot c \cdot K^a \cdot L^b \cdot M^{c-1} - A_M\right) \cdot M^v + PR^u \cdot v \cdot M^{v-1} = 0. \end{cases} \tag{36}$$

Из первых двух уравнений системы (36) следует, что величины $K_{\text{opt}}, L_{\text{opt}}$ и M_{opt} связаны соотношениями

$$M_{\text{opt}}^c = \frac{\alpha_K}{P} \cdot K_{\text{opt}}^{1-a} \cdot L_{\text{opt}}^{-b} = \frac{\alpha_L}{P} \cdot K_{\text{opt}}^{-a} \cdot L_{\text{opt}}^{1-b}. \tag{37}$$

Исключив из соотношений (37) величину L_{opt}, находим

$$M_{\text{opt}}^c = \frac{\alpha_K}{P} \cdot K_{\text{opt}}^{1-a} \cdot \left(\frac{\alpha_K}{\alpha_L}\right)^{-b} \cdot K_{\text{opt}}^{-b} = \frac{\alpha_K^{1-b} \cdot \alpha_L^b}{P} \cdot K_{\text{opt}}^{1-a-b}. \tag{38}$$

Умножив соотношения (37) на $P \cdot K_{\text{opt}}^a \cdot L_{\text{opt}}^b$, получим

$$P \cdot K_{\text{opt}}^a \cdot L_{\text{opt}}^b \cdot M_{\text{opt}}^c = \alpha_K \cdot K_{\text{opt}} = \alpha_L \cdot L_{\text{opt}}. \tag{39}$$

Подставив формулы (38) и (39) в третье уравнение (36), находим уравнение

$$K_{\text{opt}} \cdot \alpha_K \cdot \left(u \cdot c + v \cdot (1-a-b)\right) - M_{\text{opt}} \cdot \alpha_M \cdot c \cdot (u+v) - v \cdot TFC = 0,$$

или

$$M_{\text{opt}} = \frac{u \cdot c + v \cdot (1-a-b)}{\alpha_M \cdot c \cdot (u+v)} \cdot \alpha_K \cdot K_{\text{opt}} - \frac{v}{\alpha_M \cdot c \cdot (u+v)} \cdot TFC. \tag{40}$$

Подстановка выражения (38) в уравнение (40) приводит к уравнению относительно K_{opt}

$$\left(\frac{\alpha_K^{1-b} \cdot \alpha_L^b}{P}\right)^{\frac{1}{c}} \cdot K_{\text{opt}}^{\frac{1-a-b}{c}} = \frac{\left(u \cdot c + v \cdot (1-a-b)\right) \cdot \alpha_K \cdot K_{\text{opt}} - v \cdot TFC}{\alpha_M \cdot c \cdot (u+v)}. \tag{41}$$

Структура уравнения (41) показывает, что его можно решить только численно.

Применим формулы (33) − (35) и (39) − (41) для вычислений максимально возможного значения функции прибыли (27) при нулевых трансакционных издержках и оптимального значения функции прибыли (27) при ненулевых трансакционных издержках. Для расчетных данных

$$P = 10; a = 0{,}24; b = 0{,}25; c = 0{,}26; A_K = 1{,}60;$$

$$A_L = 1{,}55; A_M = 3; u = 0{,}48; v = 0{,}52; TFC = 2$$

были получены значения $M_{\max} = 1{,}778$; $K_{\max} = 3{,}077$; $L_{\max} = 3{,}308$; $PR_{\max} = 3{,}128$ и значения $M_{\text{opt}} = 3{,}320$; $K_{\text{opt}} = 4{,}230$; $L_{\text{opt}} = 4{,}549$; $PR_{\text{opt}} = 2{,}424$.

Библиографический список

1. Уильямсон О. И. Экономические институты капитализма. Фирмы, рынки, отношенческая контрактация. СПб.: Лениздат, SEV Press, 1996. 702 с.
2. Фуруботн Э.Г., Рихтер Р. Институты и экономическая теория. Достижения новой институциональной экономической теории. СПб.: Изд. дом СПбГУ, 2005. 702 с.
3. Сараев А.Л., Сараев Л.А. К расчету эффективных параметров оптимизации производства с микроструктурой // Вестник Самарского государственного университета. 2012. №1 (92). С. 231–236.
4. Сараев А.Л., Сараев Л.А. К расчету эффективной равновесной цены неоднородно распределенного конкурентного рынка // Вестник Самарского государственного университета. 2011. № 10 (91). С.129–135.
5. Попов Е. В., Коновалов А. А. Модель оптимизации издержек поиска информации // Проблемы управления. 2008. № 3. С. 69–72.

A.V. Mantulenko, A.L. Saraev, L.A. Saraev*

ON THE THEORY OF OPTIMAL ALLOCATION OF PRODUCTION FACTORS AND TRANSACTION COSTS

In the published article mathematical models of optimizing profitability of enterprises, bearing certain unproductive transaction costs are presented. This kind of costs can be associated with market research, limited economic information, legal support contracts, opportunistic behavior of managers, etc. Analysis of the received models shows that the inclusion of transaction costs leads to inaccessibility of maximum possible profit of enterprises, since in practice the management of the company is not maximizing profits, and their utility, expressed as the appropriate transactional functions. The numerical analysis of models of optimal allocation of resources and transaction costs of an enterprise is carried out.

Key words: company, structure, factors of production, production function, costs, profits, resources, transaction costs.

---

* *Mantulenko Alexey Vyacheslavovich* (mantulenko83@mail.ru), *Saraev Alexander Leonidovich* (alex.saraev@gmail.com), *Saraev Leonid Alexandrovich* (saraev_leo@mail.ru), the Dept. of Mathematics and Business-Informatics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.