УДК 330.101.54

*А.Л. Сараев, Л.А. Сараев**

К ТЕОРИИ СТРУКТУРНОЙ МОДЕРНИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

В публикуемой работе предложен вариант метода усреднения локальных производственных функций, функций переменных затрат и функции прибыли предприятия, образованного двумя различными производствами. На основе этого метода разработана структурно-феноменологическая модель взаимодействия компонентов этого предприятия и его макроскопического функционирования в целом. Получены уравнения, описывающие процесс модернизации предприятия путем замены старого производства новым. Вычислены макроскопические параметры производственной функции, функции затрат и функции предприятия в целом.

Ключевые слова: предприятие, структура, факторы производства, производственная функция, затраты, прибыль, ресурсы, модернизация, усреднение, макроскопические свойства.

Выпуск предприятием любого вида продукции для продажи на рынке всегда сопровождается затратой определенного вида ресурсов. В самом общем случае эти ресурсы могут быть представлены в виде трехмерного вектора объемов факторов производства

$$\mathbf{Q} = \left(Q_1, Q_2, Q_3\right) = \left(K, L, M\right).$$

Здесь $Q_1 = K$ — основной капитал (производственные фонды), $Q_2 = L$ — привлекаемые в производство трудовые ресурсы, $Q_3 = M$ — используемые в производстве материалы и технологии.

Эти величины, выражаемые обычно в денежной форме, целесообразно соотнести с трехмерным евклидовым пространством. В декартовой системе координат этого пространства радиус-вектор $\mathbf{Q}$ представляет собой конфигурацию ресурсов и определяет положение в пространстве некоторой точки $N = \left(Q_1, Q_2, Q_3\right)$. Совокупность всех таких точек пространства образует некоторую область, трактуемую как математический континуум однопродуктового распределенного производства.

Сараев Александр Леонидович (alex.saraev@gmail.com), *Сараев Леонид Александрович* (saraev_leo@mail.ru), кафедра математики и бизнес-информатики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Выпуск продукции производства TR задается трехфакторной производственной функцией Кобба–Дугласа

$$TR = R \cdot K^a \cdot L^b \cdot M^c . \tag{1}$$

Здесь a,b,c – показатели нелинейности производственной функции, R – стоимость продукции произведенной на единицы объемов ресурсов.

Переменные пропорциональные затраты производства TVC выражаются в виде суммы

$$TVC = TVK + TVL + TVM . \tag{2}$$

Здесь $TVK = PK \cdot K$ – затраты, связанные с использованием основных производственных фондов, $TVL = PL \cdot L$ – затраты, связанные с использованием трудовых ресурсов, $TVM = PM \cdot M$ – затраты, связанные с использованием материалов и технологий, PK, PL, PM – стоимость единицы затрат объемов ресурсов соответственно. Таким образом, формула (2) принимает вид

$$TVC = PK \cdot K + PL \cdot L + PM \cdot M . \tag{3}$$

С учетом постоянных затрат предприятия TFC его прибыль, представляющая собой разность между стоимостью выпуска продукции и стоимостью затрат на его производство, выражается соотношением

$$\begin{aligned} PR = TR - TVC - TFC = R \cdot K^a \cdot L^b \cdot M^c - \\ - PK \cdot K - PL \cdot L - PM \cdot M - TFC . \end{aligned} \tag{4}$$

Пусть в структуре рассматриваемого производства возникает и развивается новый компонент производства с более высоким уровнем выпуска продукции производства и более низким уровнем производственных затрат. Этот компонент производства связан с внедрением новых технологий, использованием современных материалов, рациональным использованием основных фондов и квалифицированных трудовых ресурсов. Очевидно, что поведение всего производства в целом будет определяться числовыми параметрами производственных функций и функций затрат каждого компонента и способом взаимодействия компонентов производства. Рассмотрим сначала процесс формирования макроскопических затрат неоднородного производства.

В евклидовом трехмерном пространстве распределенного производства общему объему продукции производства соответствует геометрический объем $V = K_1 \cdot L_1 \cdot M_1$, объему продукции модернизированного производства соответствует объем $V_2 = K_2 \cdot L_2 \cdot M_2$, объему продукции старого производства соответствует объем $V_1 = V - V_2$.

Тогда формула для переменных затрат (3) принимает вид

$$TVC_s = PK_s \cdot K_s + PL_s \cdot L_s + PM_s \cdot M_s \ \left(s = 1,2\right). \tag{5}$$

Здесь K_s, L_s, M_s – объемы факторов компонентов производства и линейные размеры объемов V и V_2.

Для установления макроскопических переменных пропорциональных затрат неоднородного производства необходимо установить связь между средними значениями величин выпуска продукции, прибыли и затрат производства

$$\langle TVC \rangle = PK^* \langle K \rangle + PL^* \langle L \rangle + PM^* \langle M \rangle . \tag{6}$$

Здесь PK^*, PL^*, PM^* – эффективные значения стоимости единицы затрат объемов ресурсов соответственно.

Рассмотрим сначала затраты, связанные только с использованием ресурса основного капитала и производственных фондов K.

Имеем

$$TVK_S = PK_S \cdot K_S \; (s = 1,2). \tag{7}$$

В координатном пространстве факторов производства (Q_1, Q_2, Q_3) структура рассматриваемого производственного предприятия может быть представлена в виде двух вложенных параллелепипедов с линейными размерами K_1, L_1, M_1 и линейными размерами K_2, L_2, M_2.

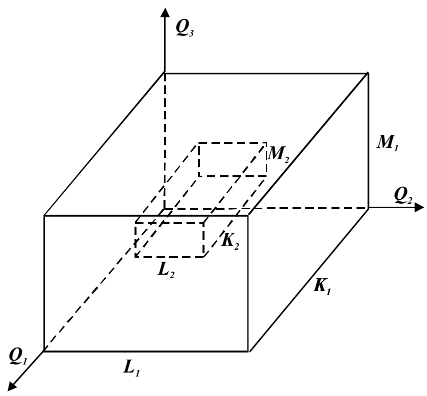

Рис. 1

При этом соответствующие ребра параллелепипедов являются взаимно параллельными так, как это показано на рис. 1.

Рассмотрим произвольное сечение параллелепипедов, соответствующее некоторой координате K. Площадь внешнего параллелепипеда равна $L_1 \cdot M_1$, а площадь поперечного сечения второго параллелепипеда равна $L_2 \cdot M_2$. Внутренняя структура неоднородного производства может быть описана индикаторной функцией факторов производства

$$\Omega_2(\mathbf{Q}) = \Omega_2(Q_1, Q_2, Q_3) = \Omega_2(K, L, M),$$

равной единице в точках объема V_2 и равной нулю вне него. Отметим, что среднее значение этой функции по полному объему V равно объемному содержанию второго компонента производства

$$c_2 = \frac{V_2}{V} = \langle \Omega_2 \rangle = \frac{1}{V} \int_V \Omega_2(\mathbf{Q}) \cdot d\mathbf{Q} = \frac{K_2 \cdot L_2 \cdot M_2}{K_1 \cdot L_1 \cdot M_1} = q \cdot l \cdot m . \tag{8}$$

Здесь $q = \dfrac{K_2}{K_1}, l = \dfrac{L_2}{L_1}, m = \dfrac{M_2}{M_1}$ – относительные линейные размеры нового компонента производства.

Очевидно, что среднее значение этой функции на множестве точек поперечного сечения, соответствующего координате K, равно

$$\left\langle \Omega_2 \right\rangle\Big|_{Q_1=K} = \frac{L_2 \cdot M_2}{L_1 \cdot M_1} = l \cdot m . \tag{9}$$

Таким образом, соотношение (7) можно записать в виде

$$TVK = \left(PK_1 + \left[PK \right] \Omega_2 \right) K . \tag{10}$$

Здесь квадратными скобками обозначены разрывы величин – $\left[F \right] = F_2 - F_1$.

Будем предполагать, что в рассматриваемом сечении K затраты TVK являются постоянными, тогда [1]

$$K = \frac{1}{PK_1 + \left[PK \right] \cdot \Omega_2} \left\langle TVK \right\rangle . \tag{11}$$

Вычислим среднее значение объема ресурса

$$\left\langle K \right\rangle = \frac{1}{K_1} \int_0^{K_1} K \cdot dQ_1 = \left\langle TVK \right\rangle \frac{1}{K_1} \int_0^{K_1} \frac{dQ_1}{PK_1 + \left[PK \right] \Omega_2} . \tag{12}$$

Вычисляя интеграл в формуле (12), находим

$$\left\langle TVK \right\rangle = PK^* \left\langle K \right\rangle . \tag{13}$$

Здесь $PK^* = PK_1 \dfrac{q + c_2 \left(pk - 1 \right)}{q - c_2 \left(pk - 1 \right) \left(q - 1 \right)}, pk = \dfrac{PK_2}{PK_1}$. (14)

Очевидно, что объемное содержание старого производства выражается соотношением

$$c_1 = \frac{V_1}{V} = 1 - c_2 = 1 - q \cdot l \cdot m .$$

Совершенно аналогично находятся эффективные соотношения для затрат, связанных с использованием трудовых ресурсов L:

$$TVL = \left(PL_1 + \left[PL \right] \Omega_2 \right) L , \tag{15}$$

$$L = \frac{1}{PL_1 + \left[PL \right] \Omega_2} \left\langle TVL \right\rangle , \tag{16}$$

$$\left\langle L \right\rangle = \frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} L \cdot dQ_2 = \left\langle TVL \right\rangle \frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} \frac{dQ_2}{PL_1 + \left[PL \right] \Omega_2} , \tag{17}$$

$$\left\langle TVL \right\rangle = PL^* \left\langle L \right\rangle , \tag{18}$$

$$PL^{*} = PL_1 \frac{l + c_2\left(pl - 1\right)}{l - c_2\left(pl - 1\right)\left(l - 1\right)}, pl = \frac{PL_2}{PL_1} \quad (19)$$

и материальных и технологических ресурсов M

$$TVM = \left(PM_1 + \left[PM\right]\Omega_2\right) M, \quad (20)$$

$$M = \frac{1}{PM_1 + \left[PM\right]\Omega_2}\left\langle TVM\right\rangle, \quad (21)$$

$$\left\langle M\right\rangle = \frac{1}{M_1}\int\limits_0^{M_1} M \cdot dQ_3 = \left\langle TVM\right\rangle \frac{1}{M_1}\int\limits_0^{M_1} \frac{dQ_3}{PM_1 + \left[PM\right]\Omega_2} \quad (22)$$

$$\left\langle TVM\right\rangle = PM^{*} \left\langle M\right\rangle, \quad (23)$$

$$PM^{*} = PM_1 \frac{m + c_2\left(pm - 1\right)}{m - c_2\left(pm - 1\right)\left(m - 1\right)}, pm = \frac{PM_2}{PM_1}. \quad (24)$$

Совершенно очевидно, что макроскопические постоянные затраты неоднородного производства представляют собой среднее значение постоянных затрат компонентов производства и вычисляются по правилу смесей

$$\left\langle TFC\right\rangle = c_1 \cdot TFC_1 + c_2 \cdot TFC_2. \quad (25)$$

Рассмотрим теперь процесс формирования выпуска производственной продукции неоднородного производства. Формулы для производственных функций компонентов производства имеют вид

$$TR_s = R_s \cdot K_s^a \cdot L_s^b \cdot M_s^c \quad \left(s = 1, 2\right). \quad (26)$$

Показатели нелинейности производственной функции a, b, c принимаются одинаковыми для обоих компонентов производства. Стоимость продукции, произведенной на единицы объемов ресурсов R_s, представим в виде произведения единиц объемов ресурсов каждого фактора производства в отдельности

$$R_s = RK_s^a \cdot RL_s^b \cdot RM_s^c \quad (27)$$

и представим трехфакторную производственную функцию в виде произведения трех однофакторных функций

$$TR_s = TRK_s \cdot TRL_s \cdot TRM_s \quad \left(s = 1, 2\right). \quad (28)$$

Здесь

$$TRK_s = RK_s^a \cdot K_s^a, TRL_s = RL_s^b \cdot L_s^b, TRM_s = RM_s^c \cdot M_s^c.$$

Рассмотрим сначала вклад в производство продукции, связанный только с использованием ресурса основного капитала и производственных фондов K.

Тогда

$$TRK_s = RK_s^a \cdot K_s^a,$$

или

$$TRK_S^{\frac{1}{a}} = RK_S \cdot K_S\,. \tag{29}$$

С помощью индикаторной функции $\Omega_2(\mathbf{Q})$ соотношение (29) можно записать в виде

$$TRK^{\frac{1}{a}} = \left(RK_1 + \left[RK\right]\Omega_2\right) K\,. \tag{30}$$

. Будем считать величину TRK постоянной во всех точках сечения параллелепипедов плоскостью $Q_1 = K$. Находим

$$K = \frac{1}{RK_1 + \left[RK\right]\Omega_2} \left\langle TRK \right\rangle^{\frac{1}{a}}. \tag{31}$$

Вычисление среднего значения объема ресурса

$$\left\langle K \right\rangle = \frac{1}{K_1}\int\limits_0^{K_1} K \cdot dQ_1 = \left\langle TRK \right\rangle^{\frac{1}{a}} \frac{1}{K_1}\int\limits_0^{K_1} \frac{dQ_1}{RK_1 + \left[RK\right]\Omega_2}, \tag{32}$$

дает

$$\left\langle TRK \right\rangle = \left(RK^*\right)^a \left\langle K \right\rangle^a. \tag{33}$$

Здесь

$$RK^* = RK_1 \frac{q + c_2\left(rk - 1\right)}{q - c_2\left(rk - 1\right)\left(q - 1\right)}, rk = \frac{RK_2}{RK_1}\,. \tag{34}$$

Очевидно, что аналогичным образом находятся макроскопические соотношения для вклада в производство продукции от использования трудовых ресурсов L

$$\left\langle TRL \right\rangle = \left(RL^*\right)^b \cdot \left\langle L \right\rangle^b. \tag{35}$$

Здесь

$$RL^* = RL_1 \frac{l + c_2\left(rl - 1\right)}{l - c_2\left(rl - 1\right)\left(l - 1\right)}, rl = \frac{RL_2}{RL_1}, \tag{36}$$

а также материальных и технологических ресурсов M

$$\left\langle TRM \right\rangle = \left(RM^*\right)^c \left\langle M \right\rangle^c. \tag{37}$$

Здесь

$$RM^* = RM_1 \frac{m + c_2\left(rm - 1\right)}{m - c_2\left(rm - 1\right)\left(m - 1\right)}. rm = \frac{RM_2}{RM_1}\,. \tag{38}$$

Окончательно формула для макроскопической производственной функции неоднородного производства имеет вид

$$\langle TR\rangle = \left(RK^{*}\right)^{a}\left(RL^{*}\right)^{b}\cdot\left(RM^{*}\right)^{c}\langle K\rangle^{a}\langle L\rangle^{b}\cdot\langle M\rangle^{c}. \tag{39}$$

Таким образом, макроскопическая функция прибыли модернизируемого предприятия имеет вид

$$\langle PR\rangle = \langle TR\rangle - \langle TVC\rangle - \langle TFC\rangle =$$

$$= \left(RK^{*}\right)^{a}\left(RL^{*}\right)^{b}\left(RM^{*}\right)^{c}\cdot\langle K\rangle^{a}\langle L\rangle^{b}\langle M\rangle -$$

$$- PK^{*}\langle K\rangle - PL^{*}\langle L\rangle - PM^{*}\langle M\rangle - c_1\cdot TFC_1 - c_2\cdot TFC_2. \tag{40}$$

При полной или частичной модернизации производства, выражающейся в замене и вытеснении старого производства новым, объемное содержание c_2 и его относительные размеры q,l,m будут меняться от нуля до единицы. При этом скорость изменения величин (9) в зависимости от изменения объемного содержания (8) будет различаться. Эти различия удобнее всего оценить с помощью степенных функций

$$q = c_2^{\alpha}, l = c_2^{\beta}, m = c_2^{\gamma}. \tag{41}$$

Здесь α,β,γ — показатели степени роста относительных линейных размеров нового сегмента производства. Из соотношения (8) видно, что показатели α,β,γ не являются независимыми, и всегда выполняется равенство $\alpha+\beta+\gamma=1$.

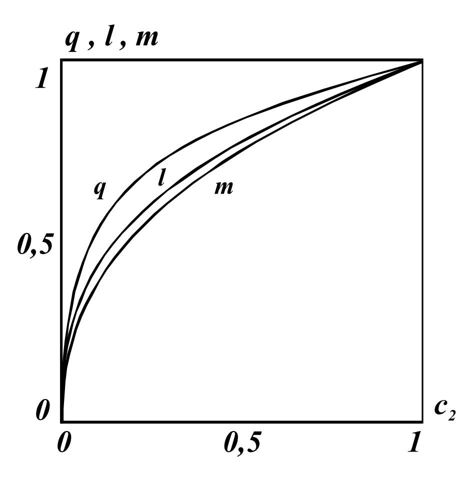

Рис. 2

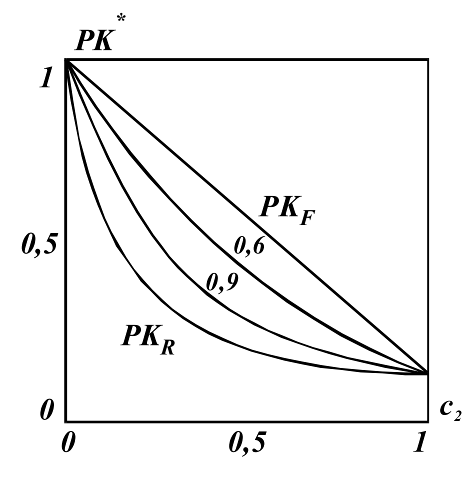

Рис. 3

На рис. 2 показаны кривые роста относительных линейных размеров q,l,m в зависимости от объемного содержания c_2. Расчетные значения $\alpha = 0.25, \beta = 0.35, \gamma = 0.40$.

Формулы для макроскопических стоимостей единиц объемов затрат ресурсов (14), (19), (24) и формулы для макроскопических стоимостей продукции, произведенной на единицы объемов ресурсов (34), (36), (38), имеют одинаковую структуру, построенные по этим формулам графики функций зависимостей величин от объемного содержания представляют собой семейство однотипных кривых.

Все эти макроскопические величины для любых значений параметров и объемного содержания заключены между установленными ранее нижней и верхней границами эффективных величин.

На рис. 3 показаны кривые зависимости от объемного содержания c_2 эффективных стоимостей единиц объемов затрат ресурса PK^* и кривые их нижней и верхней границ PK_R, PK_F.

$$PK_R \le PK^* \le PK_F .$$

Здесь

$$PK_R = \frac{1}{\dfrac{c_1}{PK_1} + \dfrac{c_2}{PK_2}}, PK_F = c_1 PK_1 + c_2 PK_2 .$$

Цифры у кривых составляют значения параметра α, расчетные значения $PK_1 = 1, PK_2 = 0.1$. Следует отметить, что значение показателя степени роста $\alpha = 1$ соответствует нижней границе PK_R, а значение параметра $\alpha = 0$ соответствует верхней границе PK_F [2].

Численный анализ модели развития процесса модернизации рассматриваемого предприятия выполнен в двух вариантах. В первом варианте предполагалось, что новый компонент предприятия обеспечивает одновременно и более высокий уровень выпуска продукции и более низкий уровень производственных затрат в денежном выражении.

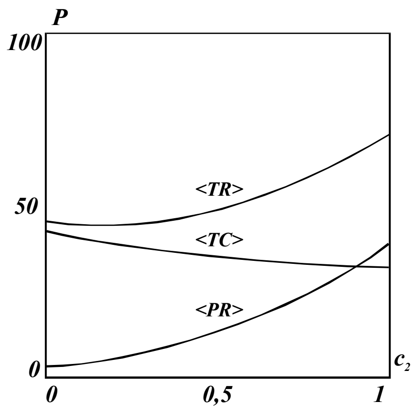

Рис. 4

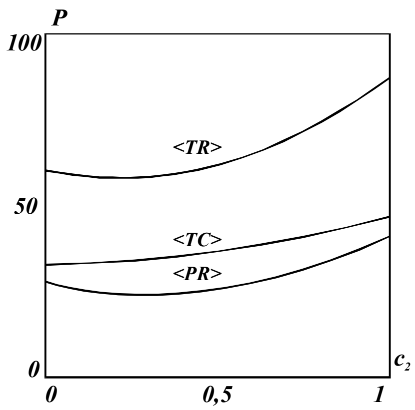

Рис. 5

Такой вариант развития событий представлен на рис. 4 кривыми макроскопической производственной функции, макроскопической функции общих затрат и макроскопической функции прибыли модернизируемого предприятия, рассчитанными по формулам (6), (25), (39), (40), в зависимости от объемного содержания c_2. Расчетные значения параметров предприятия выражаются соотношениями

$$\alpha = 0,15; \beta = 0,35; \gamma = 0,50; a = 0,52; b = 0,49; c = 0,51;$$

$$K_1 = 10; L_1 = 3; M_1 = 2; TFC_1 = 5; TFC_2 = 3;$$

$$PK_1 = 3; PL_1 = 2; PM_1 = 1; PK_2 = 2,5; PL_2 = 1; PM_2 = 0,5;$$

$$RK_1 = 5; RL_1 = 3; RM_1 = 2; RK_2 = 6; RL_2 = 4; PRM_2 = 3.$$

Следует отметить, что в этом случае кривая прибыли предприятия является монотонно возрастающей.

Во втором варианте предполагалось, что новый компонент предприятия обеспечивает более высокий уровень и выпуска продукции и более высокий уровень производственных затрат в денежном выражении.

Этот вариант развития событий представлен на рис. 5 кривыми макроскопической производственной функции, макроскопической функции общих затрат и макроскопической функции прибыли модернизируемого предприятия, рассчитанными по формулам (6), (25), (39), (40), в зависимости от объемного содержания c_2. Здесь расчетные значения параметров предприятия выражаются соотношениями

$$\alpha = 0,15; \beta = 0,35; \gamma = 0,50; a = 0,52; b = 0,49; c = 0,51;$$

$$K_1 = 10; L_1 = 3; M_1 = 3; TFC_1 = 5; TFC_2 = 3;$$

$$PK_1 = 2; PL_1 = 1; PM_1 = 1,5; PK_2 = 3; PL_2 = 2; PM_2 = 2,5;$$

$$RK_1 = 5; RL_1 = 3,5; RM_1 = 2; RK_2 = 6; RL_2 = 4; PRM_2 = 3.$$

В этом случае кривая прибыли предприятия является сначала и до определенного момента монотонно убывающей и только после достаточного развития процесса модернизации становится возрастающей. Это подтверждает часто встречающуюся экономическую ситуацию, согласно которой проводимая на предприятии модернизация может приводить до некоторого момента к убыткам и лишь после преодоления определенного порогового значения объемного содержания модернизируемого производства дает ожидаемый положительный эффект.

Библиографический список

1. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Прогнозирование эффективных характеристик затрат неоднородного производства // Вестн. Самар. гос. ун-та. Сер.: Экономика и управление. 2012. № 4 (95). С. 109–114.

2. Сараев А.Л., Сараев Л.А. К расчету эффективных параметров оптимизации производства с микроструктурой // Вестн. Самар. гос. ун-та. Сер.: Экономика и управление. 2012. № 1 (92). С. 231–236.

A.L. Saraev, L.A. Saraev*

ABOUT THE THEORY OF STRUCTURAL MODERNIZATION OF PRODUCTION COMPANIES

In the article, the version of the method of averaging of local production function, variable costs and profit functions venture between two different industries is represented. Using this technique, a structural and phenomenological model of interaction between the components of the company and its macroscopic functioning in total has been developed. The equations have been derived which describe the process of enterprise modernization with substitution of old production by the new one. The macroscopic parameters of production function, the cost function and the function of the whole enterprise were calculated.

Key words: enterprise, structure, factors of production, production function, costs, profits, resources, modernization, averaging, macroscopic properties.

* *Saraev Alexander Leonidovich* (alex.saraev@gmail.com), *Saraev Leonid Alexandrovich* (saraev_leo@mail.ru), the Dept. of Mathematics and Business-Informatics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.