УДК 330.101.54

*А.Л. Сараев, Л.А. Сараев**

К РАСЧЕТУ ЭФФЕКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА С МИКРОСТРУКТУРОЙ

В статье предложена математическая модель расчета эффективных характеристик производственной функции и издержек производства с микроструктурой. Статистическое усреднение локальной функции прибыли со случайными параметрами позволяет определить макроскопическую функцию прибыли неоднородного производства, вычислить ее эффективные характеристики и установить для них верхнюю и нижнюю границы.

Ключевые слова: производственная функция, прибыль, издержки, усреднение, эффективные характеристики, эргодичность, макроскопические свойства, статистическая однородность.

1. Эффективные характеристики функций выпуска продукции, издержек и прибыли для двухкомпонентного производства

Рассмотрим производство продукции предприятия, образованное двумя взаимосвязанными компонентами. Объем продукции, производимый в первом компоненте предприятия, составляет Q_1, объем продукции, производимый во втором компоненте предприятия, составляет Q_2. Общий объем продукции предприятия составляет $Q = Q_1 + Q_2$.

Производственные функции компонентов предприятия TR_s зададим в виде степенных функций

$$TR_s = P_s Q_s^a \quad (s = 1,2). \tag{1}$$

Здесь P_s − стоимости единиц выпускаемых компонентами производства продукций, a − показатель нелинейности производственной функции $(0 < a < 1)$.

Постоянные и пропорциональные издержки компонентов производства TL_s определяются выражениями

$$TL_s = C_s + B_s Q_s \quad (s = 1,2). \tag{2}$$

Здесь первое слагаемое C_s представляет собой постоянные издержки, второе слагаемое $B_s Q_s$ представляет собой пропорциональные издержки, так называемые линейные затраты.

Сверхпропорциональные нелинейные издержки компонентов TN_s задаются в виде степенной функции $TN_s = A_s Q_s^h \ (s = 1,2)$. (3)

Сараев Александр Леонидович (alex.saraev@gmail.com), *Сараев Леонид Александрович* (saraev@ssu.samara.ru), кафедра математики и бизнес-информатики Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Здесь h − показатель нелинейности сверхпропорциональных издержек. Значение $h=1$ соответствует пропорциональным издержкам, значения $h>1$ соответствуют прогрессивным издержкам, значения $h<1$ соответствуют дигрессивным издержкам. К издержкам подобного рода относятся приобретение нового оборудования, машин, технологий, оплата сверхурочного труда и т.д.

Прибыли компонентов предприятий PR_s представляют собой разности между производственными функциями (1) и издержками (2), (3)

$$PR_s = P_s Q_s^a - C_s - B_s Q_s - A_s Q_s^h \ (s=1,2). \qquad (4)$$

Если бы компоненты производства взаимодействовали между собой и производители были бы совершенно независимы друг от друга, то в каждом таком сегменте установились бы свои оптимальные значения прибыли и соответствующие значения выпуска продукции и издержек.

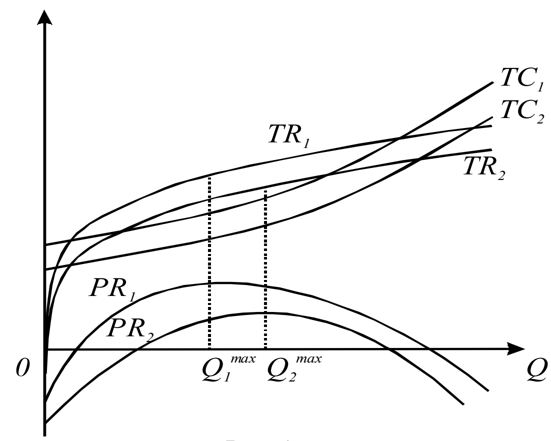

Рис. 1

Оптимальное поведение независимых компонентов производства представлено на рис. 1 на графиках функций выпуска продукции, издержек и прибыли.

Структура расположения производителей продукции в производственном пространстве рассматриваемого двухкомпонентного производства может быть описана индикаторными функциями координат $\kappa_s(Q)(s=1,2)$, каждая из которых равна единице в объеме Q_s и равна нулю вне этого объема.

Функции выпуска продукции, издержек и прибыли всего производства принимают вид

$$TR = (P_1\kappa_1 + P_2\kappa_2)Q^a, TL = (C_1\kappa_1 + C_2\kappa_2) + (B_1\kappa_1 + B_2\kappa_2)Q,$$

$$TN = (A_1\kappa_1 + A_2\kappa_2)Q^h, PR = TR - TL - TN. \qquad (5)$$

Индикаторные функции, функции выпуска продукции, прибыли и издержек производства предполагаются случайными, статистически однородными и эргодическими полями, и их статистическое осреднение заменяется осреднением по объемам [1]

$$\langle f \rangle = \frac{1}{Q}\int_Q f(Q)dQ \ \langle f \rangle_s = \frac{1}{Q_s}\int_{Q_s} f(Q)dQ \ (s=1,2). \qquad (6)$$

Для установления макроскопического поведения участников неоднородного производства необходимо установить связь между средними значениями величин выпуска продукции, прибыли и издержек производства

$$\langle TR\rangle = P^{*}\langle Q\rangle^{a}, \qquad \langle TL\rangle = C^{*} + B^{*}\langle Q\rangle,$$
$$\langle TN\rangle = A^{*}\langle Q\rangle^{h}, \langle PR\rangle = \langle TR\rangle - \langle TL\rangle - \langle TN\rangle. \tag{7}$$

Здесь $A^{*}, B^{*}, C^{*}, P^{*}$ – эффективные значения величин. Предполагается, что флуктуациями величин на границах производственного пространства можно пренебречь.

Макроскопические уравнения (7) устанавливают эффективную оптимальную прибыль распределенного двухкомпонентного производства продукции в целом.

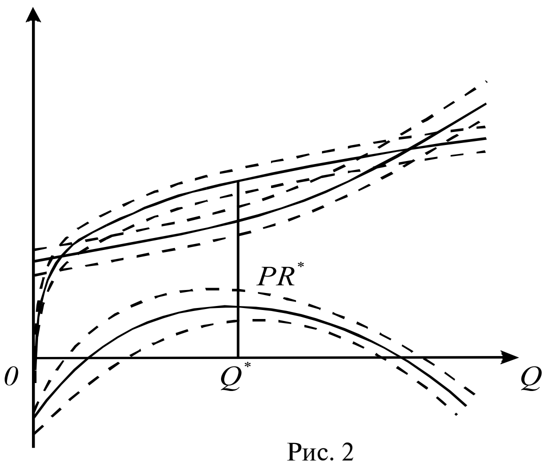

Рис. 2

Оптимальное макроскопическое поведение производства с взаимодействующими компонентами представлено на рис. 2 на графиках функций выпуска продукции, издержек и прибыли. Штриховые линии соответствуют функциям выпуска продукции, издержек и прибыли каждого компонента рынка, сплошные линии соответствуют макроскопическим функциям выпуска продукции, издержек и прибыли в целом.

Для вычисления эффективных характеристик соотношений (7) необходимо усреднить уравнения (5) по полному объему Q

$$\langle TR\rangle = \langle P\,Q\rangle^{a}, \qquad \langle TL\rangle = \langle C\rangle + \langle B\,Q\rangle,$$
$$\langle TN\rangle = \langle A\,Q\rangle^{h}, \langle PR\rangle = \langle TR\rangle - \langle TL\rangle - \langle TN\rangle \tag{8}$$

и воспользоваться правилами механического смешивания

$$\left\langle f^{n}\right\rangle = c_1 f_1^{n} + c_2 f_2^{n}, \tag{9}$$

причем $n = 1$ соответствует взаимодействию компонентов производства с параллельными связями, а $n = -1$ соответствует взаимодействию компонентов производства с последовательными связями. Величины $c_s = \langle \kappa_s\rangle = \dfrac{Q_s}{Q}$ $(s = 1,2)$ представляют собой относительные объемы продукции, при этом всегда имеет место соотношение $c_1 + c_2 = 1$.

Выбор способа осреднения (9) с параметром $n = 1$ эквивалентен замене в соотношениях (8) величины Q на ее среднее значение $\langle Q \rangle$. Такое осреднение называется осреднением Фойгта и приводит к верхней оценке всевозможных значений функций выпуска продукции, издержек и прибыли [2; 3].

$$\langle TR \rangle \le TR_F = P_F \langle Q \rangle^a, \langle TL \rangle \le TR_F = C_F + B_F \langle Q \rangle,$$
$$\langle TN \rangle \le TN_F = A_F \langle Q \rangle^h, \langle PR \rangle \le PR_F = TR_F - TL_F - TN_F. \quad (10)$$

Здесь

$$P_F = \langle P \rangle, C_F = \langle C \rangle, B_F = \langle B \rangle, A_F = \langle A \rangle, \quad (11)$$
$$\langle f \rangle = f_1 c_1 + f_2 c_2 .$$

Выбор способа осреднения (9) с параметром $n = -1$ эквивалентен последовательной замене в соотношениях (8) величин TR, TL, TN на их средние значения $\langle TR \rangle, \langle TL \rangle, \langle TN \rangle$. Такое осреднение называется осреднением Рейсса и приводит к нижней оценке всевозможных значений функций выпуска продукции, издержек и прибыли [2; 3].

$$\langle TR \rangle \ge TR_R = P_R \langle Q \rangle^a, \langle TL \rangle \ge TR_R = C_R + B_R \langle Q \rangle,$$
$$\langle TN \rangle \ge TN_R = A_R \langle Q \rangle^h, \langle PR \rangle \ge PR_R = TR_R - TL_R - TN_R. \quad (12)$$

Здесь

$$P_R = \left\langle \frac{1}{P^{\frac{1}{a}}} \right\rangle^{-a} = \left(\frac{c_1}{P_1^{\frac{1}{a}}} + \frac{c_2}{P_2^{\frac{1}{a}}} \right)^{-a}, A_R = \left\langle \frac{1}{A^{\frac{1}{h}}} \right\rangle^{-h} = \left(\frac{c_1}{A_1^{\frac{1}{h}}} + \frac{c_2}{A_2^{\frac{1}{h}}} \right)^{-h}, \quad (13)$$

$$B_R = \left\langle \frac{1}{B} \right\rangle^{-1} = \left(\frac{c_1}{B_1} + \frac{c_2}{B_2} \right)^{-1}, C_R = B_R \left\langle \frac{C}{B} \right\rangle = B_R \left(c_1 \frac{C_1}{B_1} + c_2 \frac{C_2}{B_2} \right).$$

Таким образом, всевозможные модели макроскопических функций спроса заключены между верхними и нижними границами

$$TR_R \le \langle TR \rangle \le TR_F, TL_R \le \langle TL \rangle \le TN_F;$$
$$TN_R \le \langle TN \rangle \le TN_F, PR_R \le \langle PR \rangle \le PR_F. \quad (14)$$

Одной из распространенных оценок эффективных характеристик является модель Хилла, представляющая собой среднее арифметическое верхней и нижней границ

$$TR_H = \frac{TR_R + TR_F}{2}, TL_H = \frac{TL_R + TL_F}{2},$$
$$TN_H = \frac{TN_R + TN_F}{2}, PR_H = \frac{PR_R + PR_F}{2}. \quad (15)$$

2. Эффективные характеристики функций выпуска продукции, издержек и прибыли для многокомпонентного производства.

Рассмотрим теперь производство продукции предприятия, образованное несколькими взаимосвязанными компонентами. Объем продукции, производимый в каждом компоненте предприятия, составляет Q_S $(s = 1..n)$. Общий объем продукции предприятия составляет

$$Q = \sum_{s=1}^{n} Q_S .$$

Структура расположения производителей продукции в производственном пространстве рассматриваемого многокомпонентного производства может быть описана индикаторными функциями координат $\kappa_s(Q)(s = 1...n)$, каждая из которых равна единице в объеме Q_i и равна нулю вне этого объема.

Применяя описанную выше методику расчета оценок эффективных параметров определяющих соотношений, находим верхние и нижние оценки Фойгта – Рейсса и модель Хилла для макроскопических функций выпуска продукции, издержек и прибыли вида (14), в которых

$$\begin{gathered} P_F = \sum_{s=1}^{n} c_s P_s \, , A_F = \sum_{s=1}^{n} c_s A_s \, , \\ B_F = \sum_{s=1}^{n} c_s B_s \, , C_F = \sum_{s=1}^{n} c_s C_s \, , \\ P_R = \left(\sum_{s=1}^{n} c_s P_s^{-\frac{1}{a}} \right)^{-a} , A_R = \left(\sum_{s=1}^{n} c_s A_s^{-\frac{1}{h}} \right)^{-h} , \\ B_R = \left(\sum_{s=1}^{n} c_s B_s^{-1} \right)^{-1} , C_R = B_R \left(\sum_{s=1}^{n} c_s C_s B_s^{-1} \right). \end{gathered} \tag{16}$$

Очевидно, что при значении $n = 2$ результаты (16) полностью совпадают с формулами (11), (13) для двухкомпонентного рынка.

Библиографический список

1. Сараев А.Л., Сараев Л.А. К расчету эффективной равновесной цены неоднородно распределенного конкурентного рынка // Вестник СамГУ. Сер.: Экономика и управление. 2011. № 10 (91). С. 129–135.

2. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: МИР, 1982. 336 с.

3. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. М.: МИР, 1982. 232 с.

*A.L. Saraev, L.A. Saraev**

TO THE CALCULATION OF EFFECTIVE PARAMETERS OF OPTIMIZATION OF PRODUCTION WITH MICROSTRUCTURE

In the published paper we propose a mathematical model for calculating the effective characteristics of production function and production costs with microstructure. The statistical averaging of local profit function with random parameters allows to determine the macroscopic function of production of heterogeneous earnings, to calculate its effective performance and set them to the top and bottom borders.

Key words: production function, profit, charges, cost averaging, effective characteristics, ergodicity, macroscopic properties, statistical homogeneity.

* *Saraev Alexander Leonidovich* (alex.saraev@gmail.com), *Saraev Leonid Alexandrovich* (saraev@ssu.samara.ru),the Dept. of Mathematics and Business-Informatics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.