

УДК 330.44

## Сравнительный анализ моделей производственных функций отрасли машиностроения и металлообработки Самарской области

М.В. Цапенко<sup>1</sup>, А.А. Ермакова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Самарский национальный исследовательский университет имени академика  
С. П. Королева, Россия, 443086, Самара, Московское шоссе, 34.

<sup>2</sup>Самарский государственный технический университет, РФ, 443100, г. Самара, ул.  
Молодогвардейская, 244.

### Аннотация

Публикуемая статья посвящена разработке и идентификации математических моделей функционирования отрасли машиностроения и металлообработки в Самарской области.

Собраны и систематизированы исходные данные официальной статистики о результатах функционирования отрасли машиностроения и металлообработки Самарской области в период с 1965 по 2021 год.

Идентифицированы параметры производственных функций Кобба–Дугласа на различных интервалах исследования в вариантах исходных и сглаженных фактических статистических данных.

В качестве интервалов идентификации параметров рассмотрены как весь временной период исследования, так и отдельные локальные промежутки устойчивого и кризисного функционирования анализируемой производственной системы.

Вычислены значения параметров производственных функций для различных периодов исследования и рассчитаны качественные характеристики полученных модельных решений.

Проведён сравнительный анализ параметров и характеристик полученных моделей.

Идентификация неизвестных параметров, рассмотренных в работе производственных функций, выполнена методом наименьших квадратов.

---

### Математические, статистические и инструментальные методы экономики (научная статья)

© Коллектив авторов, 2024


© Самарский университет, 2024 (составление, дизайн, макет)

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International  
(<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)


#### Образец для цитирования:

Цапенко М.В., Ермакова А.А. Сравнительный анализ моделей производственных функций отрасли машиностроения и металлообработки Самарской области // *Вестник Самарского университета. Экономика и управление*, 2024. Т. 15, № 2. С. 41–54. doi: <http://doi.org/10.18287/2542-0461-2024-15-2-41-54>.

#### Сведения об авторах:

Михаил Владимирович Цапенко  <http://orcid.org/0000-0002-7138-9514>

кандидат экономических наук, доцент; доцент кафедры «Менеджмент и организация производства»;  
e-mail: [tsapenko@ssau.ru](mailto:tsapenko@ssau.ru)

Анжела Александровна Ермакова  <http://orcid.org/0009-0009-7061-6162>

аспирант, ассистент кафедры «Управление и системный анализ теплоэнергетических и социотехнических комплексов»; e-mail: [khapalina.aa@samgtu.ru](mailto:khapalina.aa@samgtu.ru)

В качестве эмпирического материала в исследовании были использованы официальные статистические данные Самарского областного комитета государственной статистики.

**Ключевые слова:** производственная функция Кобба–Дугласа, эффективность использования ресурсов, отрасль машиностроения и металлообработки, региональная экономика.

Получение: 26 февраля 2024 г. / Исправление: 10 апреля 2024 г. /

Принятие: 24 апреля 2024 г. / Публикация онлайн: 28 июня 2024 г.

---

## Введение

Главными задачами промышленного производства являются удовлетворение спроса конечного потребителя в готовой продукции, получение прибыли и эффективное использование ресурсов. Поэтому основным процессом промышленного производства является переработка базовых видов ресурсов в конечный продукт, поступающий потребителю. Для получения максимальной прибыли производственной системе необходимо обеспечить эффективность процесса преобразования ресурсов. Требуется учесть, рассчитать и проанализировать показатели рационального использования всех видов ресурсов, задействованных в производственном процессе.

Одним из способов решения этой задачи является применение модельного подхода на основе экономико-математических моделей в классе производственных функции. В рамках этого подхода необходимо собрать и систематизировать официальную статистику о функционировании отрасли машиностроения и металлообработки Самарской области в период с 1965 по 2021 год, и идентифицировать параметры производственных функций Кобба–Дугласа на различных интервалах исследования в вариантах исходных и сглаженных фактических статистических данных.

В качестве интервалов идентификации параметров следует рассмотреть весь временной период исследования, а также локальные промежутки устойчивого и кризисного функционирования анализируемой производственной системы и провести сравнительный анализ параметров и характеристик полученных моделей.

Целью проведённого исследования является разработка, идентификация и сравнительный анализ решений математических моделей функционирования отрасли машиностроения и металлообработки Самарской области.

Научная новизна проведенного исследования заключается в построенном комплексе взаимосвязанных моделей на основе различных производственных функций и в результатах идентификации параметров моделей для отрасли машиностроения и металлообработки Самарского региона в период с 1965 по 2021 гг. с выделением периодов устойчивого и кризисного функционирования анализируемой системы.

Полученные результаты могут быть применены для построения прогнозов развития анализируемой отрасли и оценки эффективности функционирования других отраслей промышленности Самарской области.

Производственная функция – один из элементов математического аппарата при моделировании производственных систем. Производственная функция представляет собой модель экономического объекта, представляемого в виде «черного ящика», где происходит преобразование входных характеристик – ресурсов ( $X_n$ ) в выходные – конечные продукты

( $Y_n$ ). С помощью производственной функции можно количественно оценить зависимости входных и выходных характеристик [1].

В соответствии с таким подходом объект моделирования имеет следующую структуру:



Рис. 1: Структурная модель объекта.

Fig. 1: Structure of the object.

Одной из наиболее распространённых математических моделей в классе производственных функций является функция Векселля (Кобба–Дугласа) [2–5]. Векселль высказал предположение, что стоимость произведенного продукта  $Y$  можно оценить с помощью затрат капитальных ресурсов  $K$  и трудовых ресурсов  $L$  [2]. Уточненный вариант этой производственной функции был предложен учеными П. Дугласом и Ч. Коббом. В своей работе они учли масштабный коэффициент  $A$  и факторные эластичности  $\alpha$  и  $\beta$  [1]. Производственная функция Кобба–Дугласа имеет следующий вид:

$$F(t) = AK(t)^\alpha L(t)^\beta e^{\tau t}, \quad (1)$$

где  $A$  – масштабный коэффициент;  $K$  – капитальные затраты;  $L$  – трудовые ресурсы;  $e^{\tau t}$  – множитель, учитывающий влияние научно-технического прогресса (НТП).

В работе рассмотрены два частных случая функции вида (1):

$\alpha + \beta = 1$  – однородная производственная функция Кобба–Дугласа;

$\alpha + \beta \neq 1$  – неоднородная производственная функция Кобба–Дугласа.

## 1. Постановка задачи и исходные данные

Задачей исследования является моделирование и сравнительный анализ параметров производственных функций типа Кобба–Дугласа с целью оценки эффективности функционирования отрасли машиностроения и металлообработки Самарской области. Модельные решения были получены для различных вариантов производственных функций Кобба–Дугласа в вариантах несглаженных и сглаженных исходных статистических данных.

На Рис. 2 представлены исходные статистические данные отрасли машиностроения и металлообработки Самарской области в период с 1965 по 2021 годы [6–11].

На Рис. 2 можно выделить три временных периода с различным поведением характеристик производственной системы. С 1965 по 1990 в рассматриваемой отрасли происходят достаточно стабильные изменения статистических данных. Объем выпускаемой продукции  $Y$  вырос примерно в 4 раза, затраты капитальных ресурсов  $K$  увеличились на 900% при стабильном использовании трудовых ресурсов  $L$ .

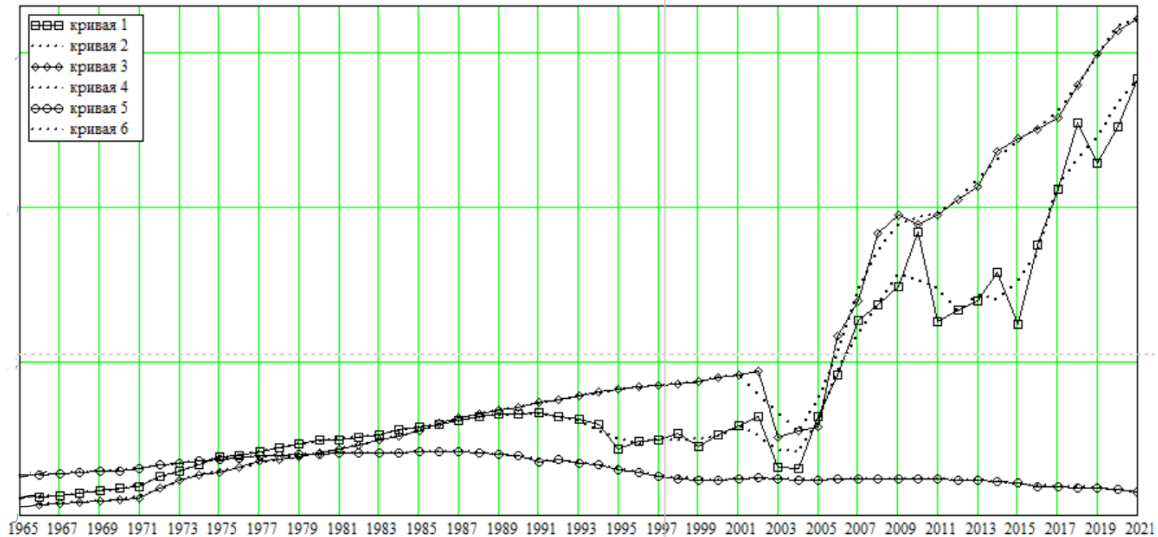


Рис. 2: Исходные статистические данные: 1 – выпуск продукции  $Y$ ; 3 – объём основных фондов  $K$ ; 5 – трудовые ресурсы  $L$ ; пунктирные линии 2, 4, 6 – сглаженные данные.

Fig.2: Initial statistical data: 1 – output  $Y$ ; 3 – volume of fixed assets  $K$ ; 5 – labor resources  $L$ ; dotted lines 2, 4, 6 – smoothed data.

В период с 1990 по 2004 поведение характеристик становится менее постоянным: на графике виден постепенный спад объемов производства на 26%, а также затрат трудовых ресурсов более чем на 60%. Возникновение этой ситуации связано с распадом СССР и переходом от плановой экономики к рыночной, определившим структурные изменения в анализируемой системе.

С 2004 года поведение характеристик системы можно охарактеризовать резким ростом объема произведенной продукции в 8 раз за счет увеличения основных фондов на 370% при стабильном числе занятых в рассматриваемой отрасли на среднем уровне 2000 чел., такой вид изменения характеристик определен становлением новой системы хозяйствования и развитием производства в регионе.

Также для исходных статистических характеристик была проведена процедура сглаживания методом скользящего среднего. Сглаживание осуществлялось для устранения влияния выбросов статистических данных и получения адекватных модельных решений.

## 2. Методология и анализ модельных решений

Для идентификации неизвестных параметров производственной функции был применен метод наименьших квадратов (МНК). Суть МНК – минимизировать сумму квадратов отклонений значений, получаемых с помощью некоторой функции, от заранее известных экспериментальных данных [12–15]. Расчет методом наименьших квадратов не является сложным и спектр его применения достаточно широк. Для расчета методом наименьших квадратов необходимо привести рассматриваемую функцию к линейному виду. Рассмотрим пример постановки метода МНК для однородной производственной функции (1) без учёта фактора НТП, учитывая, что  $\beta = 1 - \alpha$  линейная конструкция примет вид:

$$L_n(Y) = L_n(A) + \alpha L_n(K) - \alpha L_n(L) + L_n(L)$$

После преобразований и выполненной замены функция будет описываться уравнени-

ем:

$$y = c + \alpha x. \quad (2)$$

Необходимо найти такие коэффициенты линейной зависимости (2), при которых значения квадратичной невязки будет стремиться к своему наименьшему значению:

$$F(\alpha; c) = \sum_{i=1}^n (y_i - (c + \alpha \cdot x))^2 \rightarrow \min \quad (3)$$

При полученных таким методом значений коэффициентов  $\alpha$  и суммарное значение квадратов невязки между фактическими и расчётными данными минимальна. Для нахождения неизвестных коэффициентов  $\alpha$  и  $c$  необходимо приравнять частные производные выражения (3) к нулю и решить полученную систему линейных уравнений.

Исходя из ранее проанализированных свойств исходных статистических данных, предлагается два вида модельных решений:

- моделирование производственной функции на всем временном интервале для оценки общей эффективности производственного процесса;
- моделирование производственной функции в два этапа: разделить временной интервал на два участка и найти параметры производственной функции для каждого периода отдельно, а затем свести («склеить») частные модели.

Выдвинем гипотезу, что качество модельных решений, основанных на статистике второго временного периода – с 2004 по 2021 гг., вероятно, окажется низким по причине резко отличающегося поведения статистических данных.

Для удобства введем обозначения для моделей, полученных на разных временных интервалах: полный период: 1965–2021 гг. – интервал  $A$ ; первый период: 1965–2004 гг. – интервал  $B$ ; второй период: 2004–2021 гг. – интервал  $C$ .

Графики однородных ПФ Кобба–Дугласа с не сглаженными и со сглаженными данными, приведены на Рис.3 и Рис.4.

Таблица 1: Показатели качества и параметры ПФ.

Table 1: Quality indicators and PF parameters.

Вид ПФ	Параметр				
	$\alpha$	$\beta$	$R^2$	$F$	$DW$
Данные не сглажены					
Однородная (интервал А)	0,790	-	0,841	298,1	0,67
Однородная (интервал В)	0,569	-	0,862	239,2	1,2
Однородная (интервал С)	1,100	-	0,840	85,5	1,28
Данные сглажены					
Однородная (интервал А)	0,792	-	0,848	305,9	0,37
Однородная (интервал В)	0,572	-	0,863	240,3	1,20
Однородная (интервал С)	0,990	-	0,819	72,8	1,11

Коэффициент детерминации  $R^2$  позволяет оценить общее качество полученного урав-

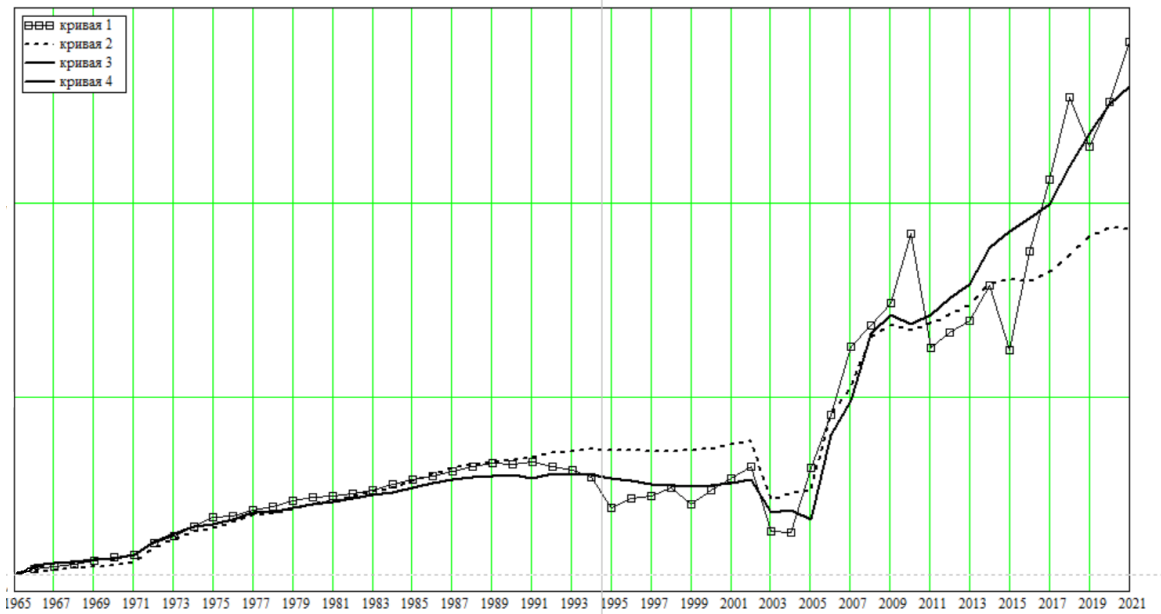


Рис. 3: Однородная ПФ Кобба–Дугласа (данные не сглажены) 1 – исходные статистические данные; 2 – интервал A; 3 – интервал B; 4 – интервал C.

Fig.3: Homogeneous Cobb-Douglas PF (data not smoothed)  
1 – statistical data; 2 – interval A; 3 – interval B; 4 – interval C.

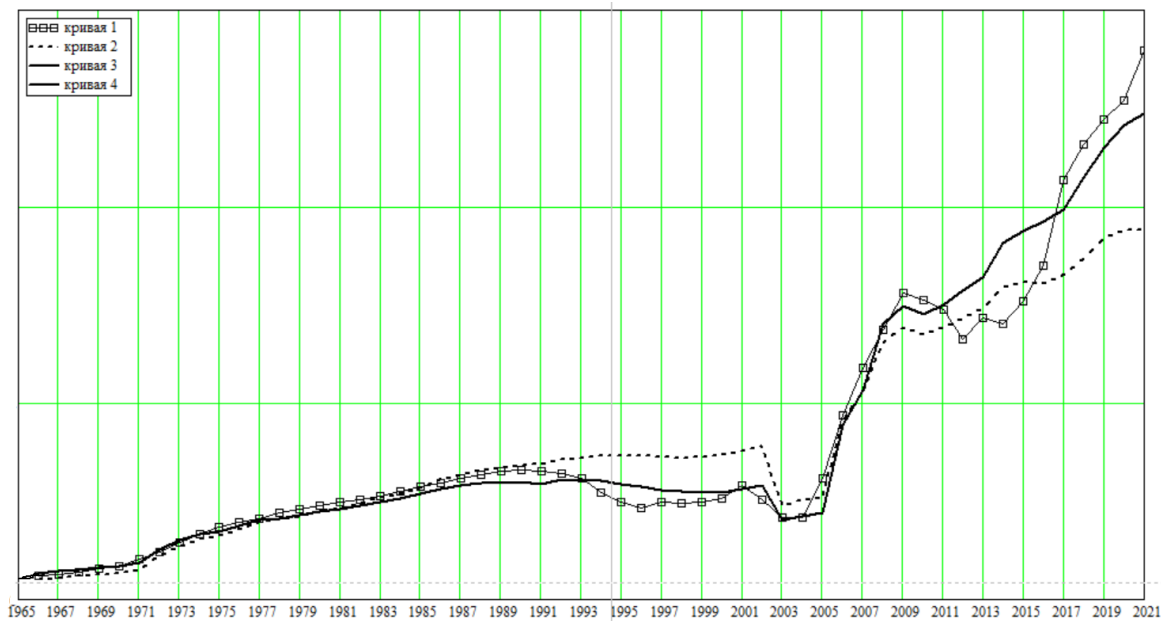


Рис. 4: Однородная ПФ Кобба–Дугласа (данные сглажены) 1 – исходные статистические данные; 2 – интервал A; 3 – интервал B; 4 – интервал C.

Fig.4: Homogeneous Cobb-Douglas PF (data smoothed)  
1 – statistical data; 2 – interval A; 3 – interval B; 4 – interval C.

нения регрессии – его аппроксимативное свойство. Чем ближе значение этого коэффициента к единице, тем лучше аппроксимация исходных статистических данных. Как видно из данных, представленных в таблице 1, на интервале B значение  $R^2$  увеличивается, что

говорит об улучшении качества модели.

Графики неоднородных ПФ Кобба–Дугласа с не сглаженными и со сглаженными данными, приведены на Рис.5 и Рис.6.

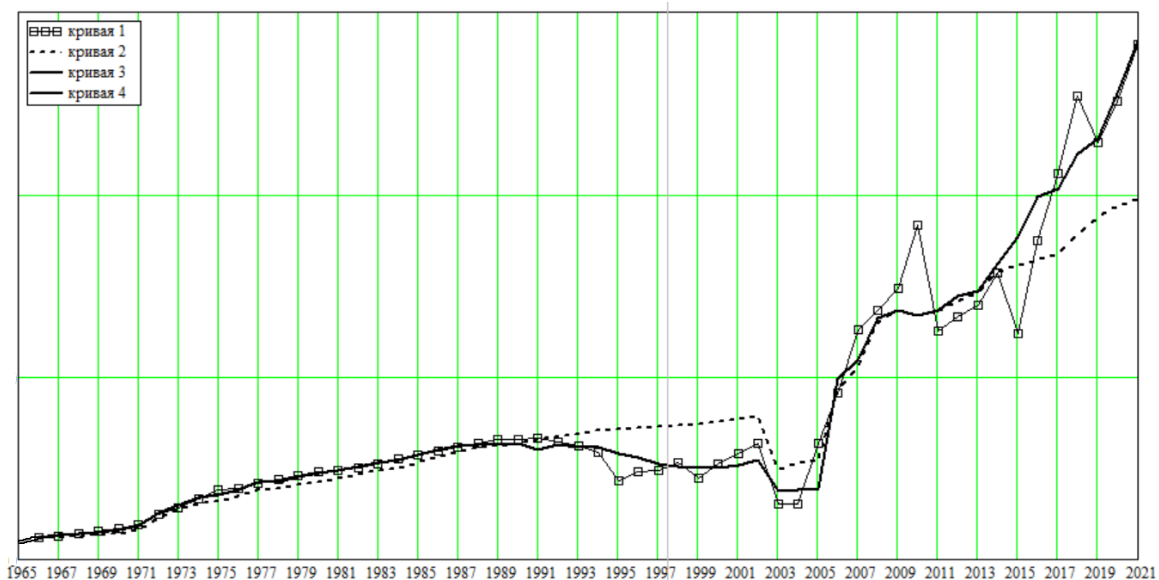


Рис. 5: Неоднородная ПФ Кобба–Дугласа (данные не сглажены) 1 – исходные статистические данные; 2 – интервал A; 3 – интервал B; 4 – интервал C.

Fig.5: Heterogeneous Cobb-Douglas PF (data not smoothed)  
1 – statistical data; 2 – interval A; 3 – interval B; 4 – interval C.

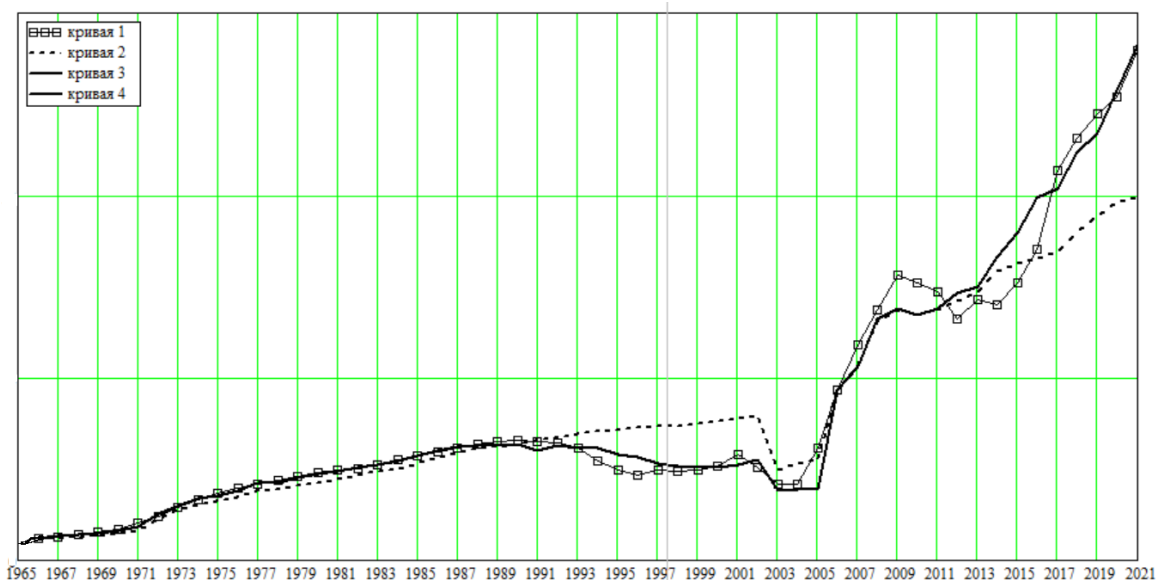


Рис. 6: Неоднородная ПФ Кобба–Дугласа (данные сглажены) 1 – исходные статистические данные; 2 – интервал A; 3 – интервал B; 4 – интервал C.

Fig.6: Heterogeneous Cobb-Douglas PF (data smoothed)  
1 – statistical data; 2 – interval A; 3 – interval B; 4 – interval C.

Таблица 2: Показатели качества и параметры ПФ.  
Table 2: Quality indicators and PF parameters.

Вид ПФ	Параметр				
	$\alpha$	$\beta$	$R^2$	$F$	$DW$
Данные не сглажены					
Неоднородная (интервал А)	0,752	0,024	0,863	170,1	0,39
Неоднородная (интервал В)	0,587	0,693	0,884	140,5	1,44
Неоднородная (интервал С)	0,638	-0,942	0,880	56,2	1,46
Данные сглажены					
Неоднородная (интервал А)	0,750	0,008	0,867	176,6	0,40
Неоднородная (интервал В)	0,590	0,667	0,884	141,0	1,43
Неоднородная (интервал С)	0,762	-0,762	0,881	55,4	1,42

$\alpha$  и  $\beta$  – факторные эластичности, отражающие вклад соответствующих ресурсов, затраченных на выпуск продукции [16–18].

$\alpha$  – эластичность выпуска продукции по капиталу.

$\beta$  – эластичность выпуска продукции по труду. Отрицательное значение  $\beta$  свидетельствует о неэффективном использовании трудовых ресурсов.

Графики неоднородных ПФ Кобба–Дугласа с НТП с не сглаженными и со сглаженными данными, приведены на Рис.7 и Рис.8.

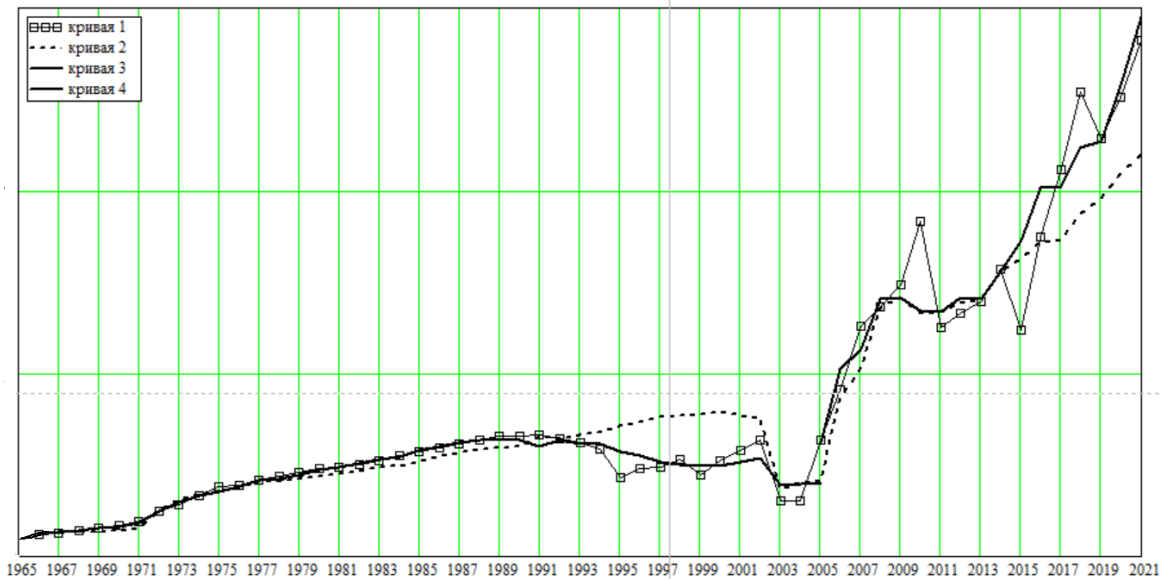


Рис. 7: Неоднородная ПФ Кобба–Дугласа с НТП (данные не сглажены) 1 – исходные статистические данные; 2 – интервал А; 3 – интервал В; 4 – интервал С.

Fig.7: Heterogeneous Cobb-Douglas PF with STP (data not smoothed)  
1 – statistical data; 2 – interval A; 3 – interval B; 4 – interval C.



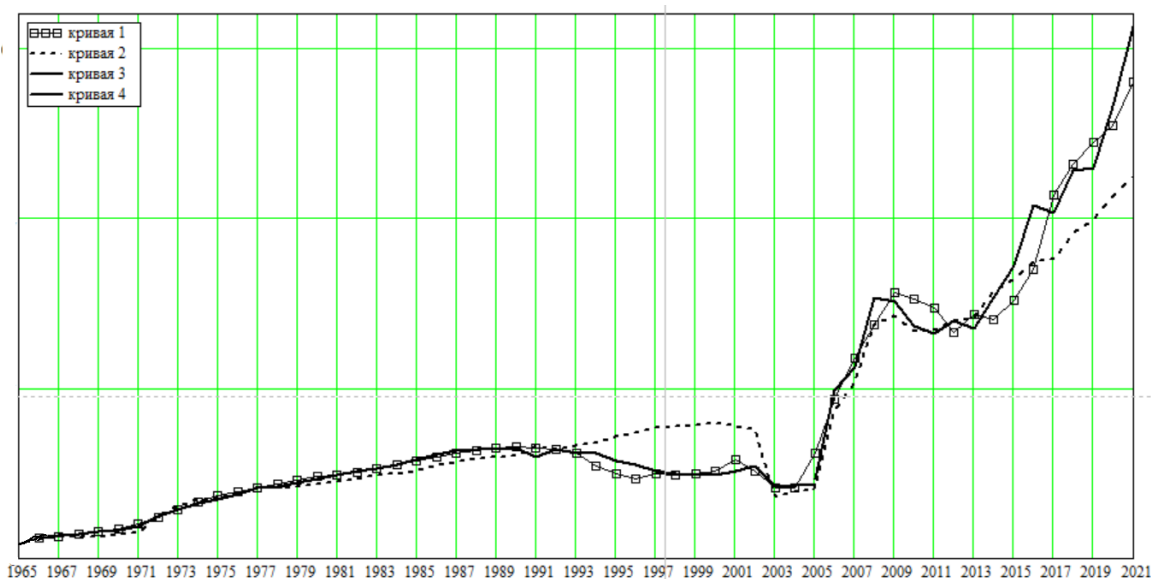


Рис. 8: Неоднородная ПФ Кобба–Дугласа с НТП (данные сглажены) 1 – исходные статистические данные; 2 – интервал А; 3 – интервал В; 4 – интервал С.

Fig.8: Heterogeneous Cobb-Douglas PF with STP (data smoothed)  
1 – statistical data; 2 – interval A; 3 – interval B; 4 – interval C.

Таблица 3: Показатели качества и параметры ПФ.

Table 3: Quality indicators and PF parameters.

Вид ПФ	Параметр				
	$\alpha$	$\beta$	$R^2$	$F$	$DW$
Данные не сглажены					
Неоднородная с НТП (интервал А)	1,116	-0,538	0,892	224,8	0,51
Неоднородная с НТП (интервал В)	0,587	0,693	0,900	140,5	1,44
Неоднородная с НТП (интервал С)	0,639	-0,942	0,837	56,2	1,46
Данные сглажены					
Неоднородная с НТП (интервал А)	1,159	-0,593	0,896	242,3	0,56
Неоднородная с НТП (интервал В)	0,429	0,936	0,943	145,7	1,6
Неоднородная с НТП (интервал С)	1,261	-2,057	0,886	45,9	1,85

Отрицательное значение  $\beta$  говорит о высокой трудозатратности производственного процесса, однако при моделировании такого вида ПФ были достигнуты наибольшие значения показателя  $R^2$ .

## Заключение

Анализ качества полученных модельных решений позволяет сделать следующие выводы:

1. Значения  $F$ -статистики существенно превышают табличные значения при уровне значимости  $\alpha = 0,001$ , при этом показатели  $F$ -статистики для сглаженных данных больше полученных значений этого критерия для несглаженных данных. Также, значения статистики Фишера  $F$  говорят о статистически значимом (достоверном) значении коэффициента детерминации  $R^2$ .
2. Критерий Дарбина-Уотсона позволяет проверить гипотезу об отсутствии автокорреляции остатков при его значении, стремящемся к 2.
3. Во многих полученных моделях критерий  $DW$  существенно отличен от 2, что говорит о наличии связи между невязками, что, в свою очередь, предполагает неучтенные при моделировании факторы и слабые прогностические свойства моделей.
4. Таким образом, анализируя полученные результаты, можно сделать вывод, что не все модели имеют удовлетворительные показатели качества, при этом наилучшим образом поведение анализируемой системы описывает неоднородная ПФ Кобба–Дугласа с учетом НТП, полученная при расчете на сглаженных исходных данных в случае раздельного моделирования на интервалах  $B$  и  $C$ .
5. Подтвердилась выдвинутая в ходе исследования гипотеза о низких качественных характеристиках модельных решений интервала  $C$ .
6. При моделировании необходимо учитывать, что при использовании сглаженных значений исходной статистики в построении прогнозной модели велика вероятность ошибок прогнозирования, так как в процессе сглаживания вид исходных данных меняется.
7. Построенные модели позволяют решать задачи оценки эффективности функционирования отрасли промышленного производства и строить прогнозы её развития.

**Конкурирующие интересы:** Конкурирующих интересов нет.

## Библиографический список

1. Клейнер Г.Б. Производственные функции: теория, методы, применение. – Москва: Финансы и статистика, 1986. – 239 с. URL: <https://kleiner.ru/pubs/proizvodstvennyie-funktsii-teoriya-metodyi-primenenie-2/>
2. Горбунов В.К. Производственные функции: теория и построение: учебное пособие. – Ульяновск: УлГУ, 2013. – 84 с. URL: <https://ulsu.ru/media/documents>
3. Дилигенский Н.В., Цапенко М.В. Математическое моделирование и обобщённое оценивание эффективности производственно-экономических систем // Проблемы управления и моделирования в сложных системах, Самара, 14–17 июня 2004 года. – Самара: Самарский научный центр РАН, 2004. – С. 96–106. <https://elibrary.ru/nznckb>
4. Абрамов А.П., Бессонов В.А., Никифоров Л.Т., Свириденко К.С. Исследование динамики макроэкономических показателей методом производственных функций. – Москва: ВЦ АН СССР, 1987. – 67 с.
5. Иванилов Ю.П., Ланец С.А. Анализ и построение производственных функций с переменной эластичностью замещения по ресурсам. – Москва: Наука, 1980. – 166 с.
6. Самарский статистический ежегодник. 2000–2020: Стат. Сб. Самара: Самара: Самара: [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://63.rosstat.gov.ru/folder/34255> (дата обращения: 04.12.23)

7. Российский статистический ежегодник. 2022: Стат. сб. / Росстат. – Москва, 2022 – 691 с. [Электронный ресурс]. Режим доступа: [https://rosstat.gov.ru/storage/mediabank/Ejegovodnik\\_2022.pdf](https://rosstat.gov.ru/storage/mediabank/Ejegovodnik_2022.pdf) (дата обращения: 04.12.23)
8. ЕМИСС: государственная статистика. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://www.fedstat.ru/> (дата обращения: 04.12.23)
9. Росстат – публикация статистики: ВІ Портал. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://bi.gks.ru/biportal/> (дата обращения: 06.12.23)
10. Витрина статистических данных. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://showdata.gks.ru/finder/> (дата обращения: 20.12.23)
11. База данных показателей муниципальных образований. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://rosstat.gov.ru/> (дата обращения: 22.12.23)
12. Зоркальцев В.И. Метод наименьших квадратов: геометрические свойства, альтернативные подходы, приложения. – Новосибирск: ВО «Наука». – 1995. – 220 с.
13. Карасев А.И., Кремер Н.Ш., Савельева Т.И. Математические методы и модели в планировании. – Москва: Экономика. – 1987. – 240 с.
14. Лотов А.В. Введение в экономико-математическое моделирование. – Москва: Наука. – 1984. – 392 с. ISBN: 978-5-9710-8804-2
15. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – Москва: МГУ, Издательство «ДИС». – 1997. – 368 с.
16. Дилигенский Н.В., Гаврилова А.А., Цапенко М.В. Статистическая идентификация макроэкономических характеристик промышленных комплексов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки. – 2001. – № 13. – С. 186–194.
17. Гаврилова, А.А., Цапенко, М.В. Синтез математических моделей региональной энергосистемы как многомерных производственных функций // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки. – 2002. – № 14. – С. 126–130.
18. Грачева М.В., Фадеева Л.Н., Черемных Ю.Н. Моделирование экономических процессов: учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления. – 2-е изд. изд. – Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2017. – 543 с. ISBN 978-5-238-02329-8. URL: <https://www.iprbookshop.ru/74952.html>

## Comparative analysis of production function models of the machine building and metalworking industry in the Samara region

M.V. Tsapenko<sup>1</sup>, A.A. Ermakova<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Samara National Research University, 34,  
Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

<sup>2</sup> Samara State Technical University, Samara, Russia

### Abstract

The published article is devoted to the development and identification of mathematical models of the functioning of the mechanical engineering and metalworking industry in the Samara region.

The initial data of official statistics on the results of the functioning of the mechanical engineering and metalworking industry of the Samara region in the period from 1965 to 2021 have been collected and systematized.

The parameters of Cobb-Douglas production functions have been identified at various study intervals in versions of the original and smoothed actual statistical data.

Both the entire time period of the study and individual local intervals of stable and crisis functioning of the analyzed production system were considered as parameter identification intervals.

The values of the parameters of production functions were calculated for different periods of the study and the qualitative characteristics of the obtained model solutions were calculated.

A comparative analysis of the parameters and characteristics of the resulting models was carried out.

Identification of unknown parameters considered in the work of production functions was carried out using the least squares method.

The study used official statistical data from the Samara Regional Committee of State Statistics as empirical material.


**Keywords:** production function, mathematical model, model solutions, statistics, engineering and metalworking, industries, region.

---

### Mathematical, statistical and instrumental methods of economics (Research Article)

© Authors, 2024


© Samara University, 2024 (Compilation, Design, and Layout)

 The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)


#### Please cite this article in press as:

Tsapenko M.V., Ermakova A.A. Comparative analysis of production function models of the machine building and metalworking industry in the Samara region, *Vestnik Samarskogo Universiteta. Ekonomika i Upravlenie = Vestnik of Samara University. Economics and Management*, 2024, vol. 15, no. 2, pp. 41–54. doi: <http://doi.org/10.18287/2542-0461-2024-15-2-41-54> (In Russian).

#### Authors' Details:

Mikhail V. Tsapenko  <http://orcid.org/0000-0002-7138-9514>

Candidate of Economics, Associate Professor of the Department of Management and organization of production; e-mail: [tsapenko@ssau.ru](mailto:tsapenko@ssau.ru)

Angela A. Ermakova  <http://orcid.org/0009-0009-7061-6162>

Assistant of the Department of Management and system analysis of thermal power and socio-technical complexes; e-mail: [khapalina.aa@samgtu.ru](mailto:khapalina.aa@samgtu.ru)

Received: Monday 26<sup>th</sup> February, 2024 / Revised: Wednesday 10<sup>th</sup> April, 2024 /  
Accepted: Wednesday 24<sup>th</sup> April, 2024 / First online: Friday 28<sup>th</sup> June, 2024

---

**Competing interests:** No competing interests.

## References

1. Kleiner G.B. Production functions: theory, methods, application. – Moscow: Finance and Statistics, 1986. – 239 p. URL: <https://kleiner.ru/pubs/proizvodstvennyie-funktsii-teoriya-metodyi-primeneniye-2/> (In Russ.)
2. Gorbunov V.K. Production functions: theory and construction: textbook. – Ulyanovsk: UIGU, 2013. – 84 p. Available at: <https://ulsu.ru/media/documents> (In Russ.)
3. Diligensky N.V., Tsapenko M.V. Mathematical modeling and generalized assessment of the efficiency of production and economic systems // Problems of management and modeling in complex systems, Samara, June 14–17, 2004. – Samara: Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, 2004. – pp. 96–106. <https://elibrary.ru/nznckb> (In Russ.)
4. Abramov A.P., Bessonov V.A., Nikiforov L.T., Sviridenko K.S. Study of the dynamics of macroeconomic indicators using the production function method. – Moscow: Computing Center of the USSR Academy of Sciences, 1987. – 67 p. (In Russ.)
5. Ivanilov Yu.P., Lanets S.A. Analysis and construction of production functions with variable elasticity of substitution with respect to resources. – Moscow: Science, 1980. – 166 p. (In Russ.)
6. Samara statistical yearbook. 2000–2020: Stat. Sat. Samarastat. [Electronic resource]. Access mode: <https://63.rosstat.gov.ru/folder/34255> (accessed: 04.12.23) (In Russ.)
7. Russian statistical yearbook. 2022: Stat. Sat. / Rosstat. – Moscow, 2022 – 691 p. [Electronic resource]. Access mode: <https://rosstat.gov.ru/storage/mediabank/Ejegodnik.2022.pdf> (accessed: 04.12.23) (In Russ.)
8. EMISS: state statistics. [Electronic resource]. Access mode: <https://www.fedstat.ru/> (accessed: 04.12.23) (In Russ.)
9. Rosstat – publication of statistics: BI Portal. [Electronic resource]. Access mode: <http://bi.gks.ru/biportal/> (accessed: 06.12.23) (In Russ.)
10. Showcase of statistical data. [Electronic resource]. Access mode: <https://showdata.gks.ru/finder/> (accessed: 20.12.23) (In Russ.)
11. Database of indicators of municipalities. [Electronic resource]. Access mode: <https://rosstat.gov.ru/> (accessed: 22.12.23) (In Russ.)
12. Zorkaltsev V.I. Least squares method: geometric properties, alternative approaches, applications. – Novosibirsk: VO "Science". – 1995. – 220 p. (In Russ.)
13. Karasev A.I., Kremer N.Sh., Savelyeva T.I. Mathematical methods and models in planning. – Moscow: Economics. – 1987. – 240 p. (In Russ.)
14. Lotov A.V. Introduction to economic and mathematical modeling. – Moscow: Science. – 1984. – 392 p. ISBN: 978-5-9710-8804-2 (In Russ.)
15. Zamkov O.O., Tolstopyatenko A.V., Cheremnykh Yu.N. Mathematical methods in economics. – Moscow: Moscow State University, Publishing House "DIS". – 1997. – 368 p. (In Russ.)
16. Diligensky N.V., Gavrilova A.A., Tsapenko M.V. Statistical identification of macroeconomic characteristics of industrial complexes // Bulletin of the Samara State Technical University. Series: Technical Sciences. – 2001. – No. 13. – pp. 186–194. (In Russ.)

17. Gavrilova, A.A., Tsapenko, M.V. Synthesis of mathematical models of the regional energy system as multidimensional production functions // Bulletin of the Samara State Technical University. Series: Technical Sciences. – 2002. – No. 14. – pp. 126–130. (In Russ.)
18. Gracheva M.V., Fadeeva L.N., Cheremnykh Yu.N. Modeling of economic processes: a textbook for university students studying in economics and management. – 2nd ed. – Moscow: UNITY-DANA, 2017. – 543 p. ISBN 978-5-238-02329-8. Available at: <https://www.iprbookshop.ru/74952.html> (In Russ.)