

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ЭКОНОМИКИ

## MATHEMATICAL AND INSTRUMENTAL METHODS OF ECONOMICS

DOI: 10.18287/2542-0461-2024-15-1-165-178



### НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

УДК 330.42

Дата поступления: 12.12.2023

рецензирования: 25.01.2024

принятия: 26.02.2024

### Моделирование процессов нелинейной динамики развития многокомпонентных производственных предприятий

**А.Л. Сараев**

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,  
г. Самара, Российская Федерация

E-mail: alex.saraev@gmail.com. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9223-6330>

**Л.А. Сараев**

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,  
г. Самара, Российская Федерация

E-mail: saraev\_leo@mail.ru. ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3625-5921>

**Аннотация:** В публикуемой статье предложены новые экономико-математические модели динамики развития предприятий, образованных несколькими различными производствами. Каждый отдельный компонент предприятия обеспечивается отдельными ресурсами и осуществляет собственный выпуск продукции. Затрачиваемые в процессе производства ресурсы каждого компонента предприятия восстанавливаются за счет ввода внутренних инвестиций. Разработанные модели многокомпонентных предприятий представлены в виде систем связанных дифференциальных уравнений относительно производственных факторов. Стационарные решения этих систем уравнений соответствуют равновесным состояниям работы предприятий. Для вычисления предельных значений факторов производства, представляющих собой стационарные решения систем дифференциальных уравнений, получены соответствующие системы конечных уравнений, описывающие равновесное состояние работы предприятий. Показано, что наиболее эффективная работа рассматриваемых неоднородных предприятий будет достигаться только тогда, когда предельные значения факторов производства будут совпадать со значениями используемых ресурсов, которые соответствуют максимальным значениям прибыли каждого производственного компонента. Такое совпадение достигается определенным набором коэффициентов норм накопления внутренних инвестиций, для вычисления которых в статье получены специальные формулы. Для двухкомпонентного производственного предприятия построены модели расчета выпуска продукции, издержек и прибыли для каждого компонента и для всего предприятия. Приведены численные решения соответствующей системы дифференциальных уравнений, на основе которых построены интегральные кривые для производственных факторов, выпусков продукции и прибыли для каждого компонента предприятия и для всего предприятия в целом.

**Ключевые слова:** предприятие; производство; ресурсы; производственные факторы; инвестиции; амортизация; производственная функция.

**Цитирование.** Сараев А.Л., Сараев Л.А. Моделирование процессов нелинейной динамики развития многокомпонентных производственных предприятий // Вестник Самарского университета. Экономика и управление Vestnik of Samara University. Economics and Management. 2024. Т. 15, № 1. С. 165–178. DOI: <http://doi.org/10.18287/2542-0461-2024-15-1-165-178>.

**Информация о конфликте интересов:** авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Сараев А.Л., Сараев Л.А., 2024

*Александр Леонидович Сараев* – кандидат экономических наук, доцент кафедры математики и бизнес-информатики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

*Леонид Александрович Сараев* – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и бизнес-информатики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

## **SCIENTIFIC ARTICLE**

Submitted: 12.12.2023

Revised: 25.01.2024

Accepted: 26.02.2024

# **Modeling of processes of nonlinear dynamics of development of multi-component production enterprises**

**A.L. Saraev**

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: alex.saraev@gmail.com. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9223-6330>

**L.A. Saraev**

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: saraev\_leo@mail.ru. ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3625-5921>

**Abstract:** The published article proposes new economic and mathematical models of the dynamics of development of enterprises formed by several different industries. Each individual component of the enterprise is provided with separate resources and carries out its own production. The resources of each component of the enterprise expended in the production process are restored through the introduction of domestic investments. The developed models of multi-component enterprises are presented in the form of systems of coupled differential equations regarding production factors. Stationary solutions of these systems of equations correspond to the equilibrium states of operation of enterprises and represent. To calculate the limiting values of production factors, which are stationary solutions of systems of differential equations, corresponding systems of finite equations are obtained that describe the equilibrium state of enterprise operation. It is shown that the most efficient operation of the heterogeneous enterprises under consideration will be achieved only when the limiting values of production factors coincide with the values of the resources used, which correspond to the maximum profit values of each production component. This coincidence is achieved by a certain set of coefficients for the accumulation rates of domestic investment, for the calculation of which special formulas are obtained in the article. For a two-component manufacturing enterprise, models for calculating output, costs and profits were built for each component and for the entire enterprise. Numerical solutions of the corresponding system of differential equations are presented, on the basis of which integral curves for production factors, outputs and profits are constructed for each component of the enterprise and for the entire enterprise as a whole.

**Key words:** enterprise; production; resources; production factors; investments; depreciation; production function; labor.

**Citation.** Saraev A.L., Saraev L.A. Modeling of processes of nonlinear dynamics of development of multi-component production enterprises. *Vestnik Samarskogo universiteta. Ekonomika i upravlenie Vestnik of Samara University. Economics and Management*, 2024, vol. 15, no. 4, pp. 165–178. DOI: <http://doi.org/10.18287/2542-0461-2024-15-1-165-178>. (In Russ.)

**Information on the conflict of interest:** authors declare no conflict of interest.

© Saraev A.L., Saraev L.A., 2024

*Alexander L. Saraev* – Candidate of Economical Sciences, associate professor of the Department of Mathematics and Business Informatics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

*Leonid A. Saraev* – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Mathematics and Business Informatics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

## Введение

Прогнозирование особенностей динамики формирования выпуска продукции, издержек и прибыли предприятий, сложная структура которых образована несколькими взаимосвязанными производствами, является одной из актуальных проблем современной экономической теории.

Успешное решение этой проблемы методами экономико-математического моделирования помогает адекватно проанализировать деятельность таких предприятий, вычислить предельные значения для их ресурсов, объемов выпуска продукции и прибыли, а также достаточно точно описать динамику выпуска продукции, издержек и прибыли и т.д.

Актуальность подобного рода исследований заключается в том, что обеспечение экономического роста национальной экономики задается определяется долгосрочной тенденцией поступательного развития производственных предприятий и увеличения абсолютных и относительных значений их экономических показателей.

Подробный обзор разработок теоретических основ экономического роста для описания развития различных экономических субъектов представлен в работах [1–7].

В качестве реализации положений этих теорий для различного рода экономических систем создано множество моделей роста, учитывающих роль технических инноваций и информационных технологий [8–18].

Органичное взаимодействие внедряемых в производства предприятия объемов внутренних инвестиций и утраты в результате амортизации объемов ресурсов определяют закономерности и особенности динамики развития предприятий. Основным математическим инструментом для построения моделей экономического развития предприятий является теория дифференциальных уравнений и их систем [19 – 33].

Целью публикуемой работы является разработка новых экономико-математических моделей динамики развития предприятий, образованных несколькими различными производствами. При этом каждый отдельный компонент предприятия обеспечивается отдельными ресурсами и осуществляет собственный выпуск продукции, а затрачиваемые в процессе производства ресурсы каждого компонента предприятия восстанавливаются счет ввода внутренних инвестиций.

Научная новизна и особенности этих моделей состоят в том, что они описывают взаимодействие всех различных производств предприятия, позволяют определить динамические траектории выпуска продукции и прибыли как каждого компонента, так и всего предприятия в целом, вычислить эффективные коэффициенты норм внутренних инвестиций, при которых прибыль предприятия будет максимальной.

## 1. Постановка задачи и общая схема расчета выпуска продукции, издержек и прибыли производственного предприятия произвольным числом компонентов

Рассмотрим производственное предприятие, представляющую собой систему, образованную  $n$  взаимосвязанными компонентами, каждый из которых представляет отдельное производство продукции.

Объемы выпуска продукции каждого компонента предприятия  $(V_1, V_2, \dots, V_n)$  обеспечиваются соответствующими ресурсами  $(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ . Производственный фактор каждого компонента предприятия  $Q_i$  может включать в себя основной капитал, оборотный капитал, финансовый капитал, трудовые ресурсы, привлекаемые в производство материалы, технологии и инновации и т. д.

Производственные факторы  $Q_i$  изменяются во времени  $t$  и являются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми функциями  $Q_i = Q_i(t)$ . Единицами измерения переменной величины  $t$ , в зависимости от рассматриваемой экономической ситуации, могут быть один месяц, один квартал или один год.

Ограниченные функции  $Q_i = Q_i(t)$  заключены между своими верхними и нижними границами

$$Q_i^0 \leq Q_i \leq Q_i^\infty.$$

Здесь  $Q_i^0 = Q_i(0)$  – известные начальные значения факторов производства  $Q_i$ , а  $Q_i^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_i(t)$  – их предельные значения, которые подлежат вычислению.

Объемы выпуска продукции каждым компонентом предприятия  $V_s$  обеспечиваются однофакторными производственными функциями Кобба-Дугласа

$$V_s = P_s \cdot Q_s^{a_s}, (s = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Здесь  $P_s$  – стоимость продукции произведенной компонентом предприятия с номером  $s$  на единичный объем ресурса, показатель степени  $a_s$  – представляет собой эластичность выпуска по соответствующему ресурсу  $Q_s$ , ( $0 < a_s < 1$ ).

Пропорциональные издержки компонента предприятия с номером  $s$  и с ресурсом  $Q_s$  имеют вид

$$TC_s = H_s \cdot Q_s + TFC_s. \quad (2)$$

Здесь  $H_s$  – стоимость затрат на единичные объемы ресурсов  $Q_s$ ,  $TFC_s$  – постоянные затраты компонента предприятия с номером  $s$ .

С помощью формул (1) и (2) вычисляется прибыль компонента предприятия с номером  $s$

$$PR_s = V_s - TC_s = P_s \cdot Q_s^{a_s} - H_s \cdot Q_s - TFC_s. \quad (3)$$

Очевидно, что общий объем выпуска продукции предприятием  $V$  выражается формулой

$$V = \sum_{s=1}^n P_s \cdot Q_s^{a_s}. \quad (4)$$

Общий объем издержек предприятия  $TC$  задается выражением

$$TC = \sum_{s=1}^n H_s \cdot Q_s + TFC. \quad (5)$$

Здесь  $TFC = \sum_{s=1}^n TFC_s$  – общий объем постоянных издержек предприятия.

Общий объем прибыли предприятия  $PR$  вычисляется по формуле

$$PR = \sum_{s=1}^n (P_s \cdot Q_s^{a_s} - H_s \cdot Q_s) - TFC. \quad (6)$$

Значения ресурсов  $Q_s^{\max}$ , соответствующих максимальным значениям величин прибыли каждого компонента рассматриваемого предприятия, находятся из уравнений

$$\frac{dPR_s}{dQ_s} = P_s \cdot a_s \cdot Q_s^{a_s-1} - H_s = 0, \quad (7)$$

решение которых дает

$$Q_s^{\max} = \left( \frac{P_s \cdot a_s}{H_s} \right)^{\frac{1}{1-a_s}}. \quad (8)$$

Максимальное значение прибыли каждого компонента рассматриваемого предприятия вычисляется по формуле

$$PR_s^{\max} = P_s \cdot \left( \frac{P_s \cdot a_s}{H_s} \right)^{\frac{a_s}{1-a_s}} - H_s \cdot \left( \frac{P_s \cdot a_s}{H_s} \right)^{\frac{1}{1-a_s}} - TFC_s. \quad (9)$$

Максимальное значение прибыли всего рассматриваемого предприятия записывается в виде

$$PR^{\max} = \sum_{s=1}^n P_s \cdot \left( \frac{P_s \cdot a_s}{H_s} \right)^{\frac{a_s}{1-a_s}} - \sum_{s=1}^n H_s \cdot \left( \frac{P_s \cdot a_s}{H_s} \right)^{\frac{1}{1-a_s}} - TFC. \quad (10)$$

## 2. Уравнения нелинейной динамики развития компонентов неоднородного производственного предприятия

Установим теперь закономерности изменений во времени ресурсов  $Q_i$  каждого компонента предприятия. Для этого рассмотрим особенности изменений объемов ресурсов компонентов  $Q_i$  на некотором малом промежутке времени  $\Delta t$ .

Приращения ресурсов каждого компонента предприятия  $\Delta Q_i = Q_i(t + \Delta t) - Q_i(t)$  можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$\Delta Q_i(t) = \Delta Q_i^A(t) + \Delta Q_i^I(t). \quad (11)$$

Здесь  $\Delta Q_i^A(t)$  – частичная амортизация ресурса  $Q_i$  за промежуток времени  $\Delta t$ ,  $\Delta Q_i^I(t)$  – частичное восстановление ресурса  $Q_i$  за промежуток времени  $\Delta t$  за счет внутренних инвестиций.

Величины  $\Delta Q_i^A(t)$  можно представить в виде

$$\Delta Q_i^A(t) = -A_i \cdot Q_i(t) \cdot \Delta t. \quad (12)$$

Здесь  $A_i$  – коэффициенты амортизации, выражающие доли утраченных в единицу времени объемов ресурсов.

Величины частичных восстановлений ресурсов за счет внутренних инвестиций  $\Delta Q_i^I(t)$  за время  $\Delta t$  выражаются соотношениями

$$\Delta Q_i^I(t) = I_i(t) \cdot \Delta t. \quad (13)$$

Здесь  $I_i(t)$  – инвестиции, восстанавливающие в момент времени  $t$  фактор производства  $Q_i$ .

Предполагается, что в восстановлении ресурса  $Q_i$  принимают участие все компоненты рассматриваемого предприятия. Поэтому

$$\Delta Q_i^I(t) = B_i \cdot \sum_{s=1}^n V_s(t) \cdot \Delta t,$$

или

$$\Delta Q_i^I(t) = B_i \cdot \sum_{s=1}^n P_s \cdot Q_s^{a_s}(t) \cdot \Delta t, \quad (14)$$

Здесь  $B_i$  – норма накопления инвестиций в ресурс  $Q_i$ .

Подставляя формулы (13) и (14) в уравнения баланса (11) получаем

$$\Delta Q_i(t) = \left( -A_i \cdot Q_i(t) + B_i \cdot \sum_{s=1}^n P_s \cdot Q_s^{a_s}(t) \right) \cdot \Delta t.$$

Переходя здесь к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , находим систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dQ_i(t)}{dt} = -A_i \cdot Q_i(t) + B_i \cdot \sum_{s=1}^n P_s \cdot Q_s^{a_s}(t). \quad (15)$$

Начальные условия для системы уравнений (15) имеют вид

$$Q_i \Big|_{t=0} = Q_i(0) = Q_i^0. \quad (16)$$

Структура системы уравнений (15) показывает, что рост ресурсов  $Q_i$  и выпуска продукции будет продолжаться до тех пор, пока производные  $\frac{dQ_i}{dt}$  будут положительными.

Если величины  $\frac{dQ_i}{dt}$  обратятся в нуль, то развитие предприятия остановится. Это произойдет в том случае, когда объемы инвестиций станут равными объемам амортизационных отчислений.

Таким образом, предельные значения факторов производства  $Q_i^\infty$  являются решениями системы уравнений

$$\sum_{s=1}^n P_s \cdot (Q_s^\infty)^{a_s} = \frac{A_i}{B_i} \cdot Q_i^\infty. \quad (17)$$

Очевидно, что идеальным вариантом работы любого предприятия является тот, при котором предприятие выходит на режим получения максимальной прибыли.

Как было установлено выше, этот вариант реализуется при значениях производственных факторов  $Q_i^{\max}$ . При любых других предельных значениях величин ресурсов  $Q_i^\infty$  отличных от значений  $Q_i^{\max}$  прибыль предприятия будет либо не достигать своего максимального значения, либо будет существенно снижаться.

Уровень предельного состояния предприятия определяется набором коэффициентов норм накопления инвестиций  $B_i$ . Коэффициенты норм накопления инвестиций  $B_i^{\max}$ , при которых предельная прибыль предприятия будет максимальной имеет вид

$$B_i^{\max} = \frac{A_i \cdot Q_i^{\max}}{\sum_{s=1}^n P_s \cdot (Q_s^{\max})^{a_s}}. \quad (18)$$

### 3. Математическая модель развития двухкомпонентного производственного предприятия

Применим теперь полученные результаты для описания неоднородного двухкомпонентного производственного предприятия, выпуск продукции которого обеспечивается двумя производственными факторами  $Q_1$  и  $Q_2$ .

Формулы для производственных функций Кобба-Дугласа (1), пропорциональных издержек (2) и прибыли (3) принимают вид

$$\begin{cases} V_{1,2} = P_{1,2} \cdot Q_{1,2}^{a_{1,2}}, \\ TC_{1,2} = H_{1,2} \cdot Q_{1,2} + TFC_{1,2}, \\ PR_{1,2} = P_{1,2} \cdot Q_{1,2}^{a_{1,2}} - H_{1,2} \cdot Q_{1,2} - TFC_{1,2}. \end{cases} \quad (19)$$

Общий объем выпуска предприятием продукции, общий объем издержек предприятия и общий объем прибыли предприятия определяются выражениями

$$\begin{cases} V = P_1 \cdot Q_1^{a_1} + P_2 \cdot Q_2^{a_2}, \\ TC = H_1 \cdot Q_1 + H_2 \cdot Q_2 + TFC, \\ PR = P_1 \cdot Q_1^{a_1} - H_1 \cdot Q_1 + P_2 \cdot Q_2^{a_2} - H_2 \cdot Q_2 - TFC \end{cases}. \quad (20)$$

Общий объем прибыли предприятия  $PR$  вычисляется по формуле

$$PR = P_1 \cdot Q_1^{a_1} - H_1 \cdot Q_1 + P_2 \cdot Q_2^{a_2} - H_2 \cdot Q_2 - TFC. \quad (21)$$

Формулы (8) и (9) для значений ресурсов  $Q_{1,2}^{\max}$  и соответствующих значений максимальной прибыли, записываются в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{1,2}^{\max} = \left( \frac{P_{1,2} \cdot a_{1,2}}{H_{1,2}} \right)^{\frac{1}{1-a_{1,2}}}, \\ PR_{1,2}^{\max} = P_{1,2} \cdot \left( \frac{P_{1,2} \cdot a_{1,2}}{H_{1,2}} \right)^{\frac{a_{1,2}}{1-a_{1,2}}} - H_{1,2} \cdot \left( \frac{P_{1,2} \cdot a_{1,2}}{H_{1,2}} \right)^{\frac{1}{1-a_{1,2}}} - TFC_{1,2}. \end{array} \right. \quad (22)$$

Максимальное значение прибыли всего двухкомпонентного предприятия выражается формулой

$$PR^{\max} = P_1 \cdot \left( \frac{P_1 \cdot a_1}{H_1} \right)^{\frac{a_1}{1-a_1}} - H_1 \cdot \left( \frac{P_1 \cdot a_1}{H_1} \right)^{\frac{1}{1-a_1}} + P_2 \cdot \left( \frac{P_2 \cdot a_2}{H_2} \right)^{\frac{a_2}{1-a_2}} - H_2 \cdot \left( \frac{P_2 \cdot a_2}{H_2} \right)^{\frac{1}{1-a_2}} - TFC. \quad (23)$$

Система дифференциальных уравнений (15) с начальными условиями (16) для двухкомпонентного предприятия принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dQ_1(t)}{dt} = -A_1 \cdot Q_1(t) + B_1 \cdot (P_1 \cdot Q_1^{a_1}(t) + P_2 \cdot Q_2^{a_2}(t)), \\ \frac{dQ_2(t)}{dt} = -A_2 \cdot Q_2(t) + B_2 \cdot (P_1 \cdot Q_1^{a_1}(t) + P_2 \cdot Q_2^{a_2}(t)), \\ Q_1|_{t=0} = Q_1(0) = Q_1^0, \\ Q_2|_{t=0} = Q_2(0) = Q_2^0. \end{array} \right. \quad (24)$$

Система уравнений для вычисления предельных значений производственных факторов (17) записывается в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1 \cdot (Q_1^{\infty})^{a_1} + P_2 \cdot (Q_2^{\infty})^{a_2} = \frac{A_1}{B_1} \cdot Q_1^{\infty}, \\ P_1 \cdot (Q_1^{\infty})^{a_1} + P_2 \cdot (Q_2^{\infty})^{a_2} = \frac{A_2}{B_2} \cdot Q_2^{\infty}. \end{array} \right. \quad (25)$$

Формулы (18) для вычисления коэффициентов норм накопления инвестиций  $B_i^{\max}$ , при которых предельная прибыль предприятия будет максимальной для двухкомпонентного предприятия принимают вид

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1^{\max} = \frac{A_1 \cdot Q_1^{\max}}{P_1 \cdot (Q_1^{\max})^{a_1} + P_2 \cdot (Q_2^{\max})^{a_2}}, \\ B_2^{\max} = \frac{A_2 \cdot Q_2^{\max}}{P_1 \cdot (Q_1^{\max})^{a_1} + P_2 \cdot (Q_2^{\max})^{a_2}}. \end{array} \right. \quad (26)$$

На рисунке 1 показаны графики функций прибыли  $PR_1$  и  $PR_2$ , построенные по формулам (19)

На рисунке 2 показан график общего объема прибыли  $PR$ , построенный по формуле (21).

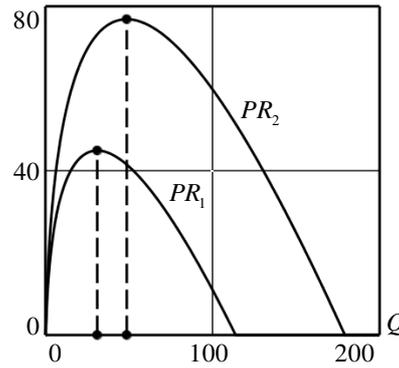


Рисунок 1 – Графики функций прибыли  $PR_1$  и  $PR_2$ , построенные по формулам (19).  
 Figure 1 – Graphs of profit  $PR_1$  and profit  $PR_2$  functions based on formulas (19).

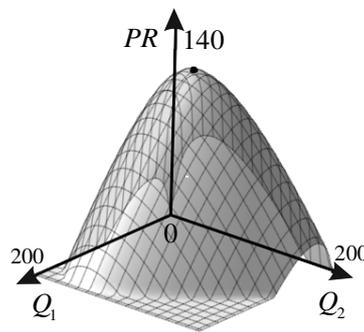


Рисунок 2 – График общего объема прибыли  $PR$ , построенный по формуле (21). Расчетные значения:  $Q_1^{\max} = 31,0256$  ;  $PR_1^{\max} = 44,8963$  ;  $Q_2^{\max} = 48,6697$  ;  $PR_1^{\max} = 76,8459$ .  
 Figure 2 – The graph of the total profit volume  $PR$ , based on the formula (21). Calculated values:  $Q_1^{\max} = 31,0256$  ;  $PR_1^{\max} = 44,8963$  ;  $Q_2^{\max} = 48,6697$  ;  $PR_1^{\max} = 76,8459$ .

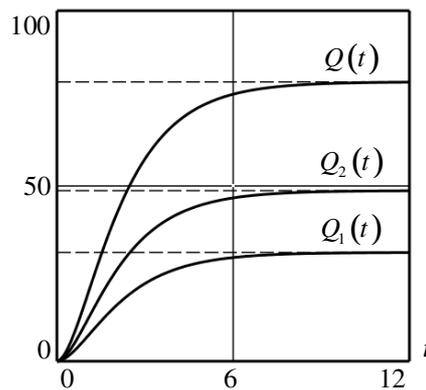


Рисунок 3 – Графики функций объемов ресурсов каждого компонента производства  $Q_1(t)$ ,  $Q_2(t)$  и общего объема ресурса всего предприятия в целом  $Q(t) = Q_1(t) + Q_2(t)$  построенные по результатам численного решения задачи Коши (24).  
 Figure 3 – Graphs of the functions of the resource volumes of each component of production  $Q_1(t)$ ,  $Q_2(t)$  and the total resource volume of the entire enterprise as a whole  $Q(t) = Q_1(t) + Q_2(t)$ , based on the results of the numerical solution of the Cauchy problem (24).

На рисунке 3 показаны графики функций объемов ресурсов каждого компонента производства  $Q_1(t)$ ,  $Q_2(t)$  и общего объема ресурса всего предприятия в целом  $Q(t) = Q_1(t) + Q_2(t)$  построенные по результатам численного решения задачи Коши (24).

На рисунке 4 показаны графики функций объемов выпуска продукции каждого компонента производства  $V_1(t)$ ,  $V_2(t)$  и общего объема выпуска продукции всего предприятия в целом  $V(t) = V_1(t) + V_2(t)$ , построенные по результатам численного решения задачи Коши (24) и формулам (19).

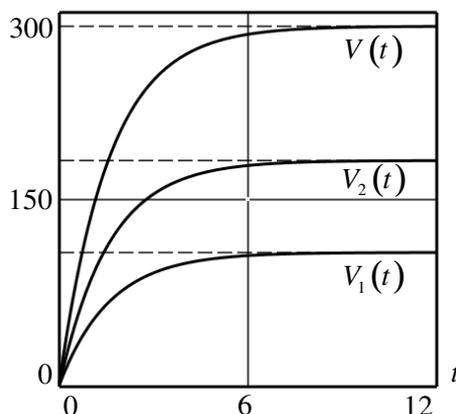


Рисунок 4 – Графики функций объемов выпуска продукции каждого компонента производства  $V_1(t)$ ,  $V_2(t)$  и общего объема выпуска продукции всего предприятия в целом  $V(t) = V_1(t) + V_2(t)$  построенные по результатам численного решения задачи Коши (24) и формулам (19).

Figure 4 – Graphs of the functions of the output volumes of each component of production  $V_1(t)$ ,  $V_2(t)$  and the total output of the entire enterprise as a whole  $V(t) = V_1(t) + V_2(t)$ , based on the results of the numerical solution of the Cauchy problem (24) and formulas (19).

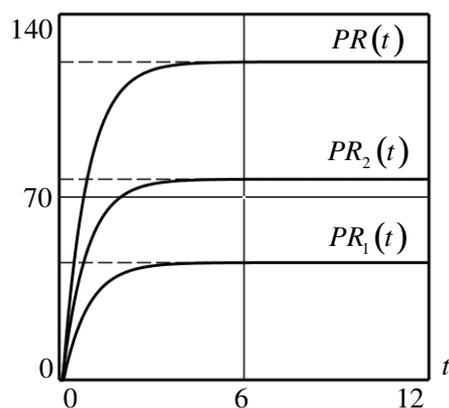


Рисунок 5 – Графики функций объемов прибыли каждого компонента производства  $PR_1(t)$ ,  $PR_2(t)$  и общего объема прибыли всего предприятия в целом  $PR(t) = PR_1(t) + PR_2(t)$  построенные по результатам численного решения задачи Коши (24) и формулам (19).

Figure 5 – Graphs of the profit volume functions of each component of production  $PR_1(t)$ ,  $PR_2(t)$  and the total profit of the entire enterprise as a whole  $PR(t) = PR_1(t) + PR_2(t)$ , based on the results of the numerical solution of the Cauchy problem (24) and formulas (19).

При построении графиков функций на рисунках 1–5 были использованы расчетные значения:  $P_1 = 20$ ;  $P_2 = 25$ ;  $a_1 = 0,49$ ;  $a_2 = 0,51$ ;  $H_1 = 1,7$ ;  $H_2 = 1,9$ ;  $TFC_1 = 10$ ;  $TFC_2 = 12$ ;  $A_1 = 0,10$ ;  $A_2 = 0,11$ ;  $B_1 = 0,01073705086$ ;  $B_2 = 0,01852747002$ ;  $Q_0 = 0$ .

На рисунке 5 показаны графики функций объемов прибыли каждого компонента производства  $PR_1(t)$ ,  $PR_2(t)$  и общего объема прибыли всего предприятия в целом  $PR(t) = PR_1(t) + PR_2(t)$  построенные по результатам численного решения задачи Коши (24) и формулам (19).

### Заключение

1. В публикуемой статье предложены новые экономико-математические модели динамики развития предприятий, образованными несколькими различными производствами. Каждый отдельный компонент предприятия обеспечивается отдельными ресурсами и осуществляет собственный выпуск продукции.

2. Затрачиваемые в процессе производства ресурсы каждого компонента предприятия восстанавливаются счет ввода внутренних инвестиций.

3. Разработанные модели многокомпонентных предприятий представлены в виде систем связанных дифференциальных уравнений относительно производственных факторов.

4. Стационарные решения этих систем уравнений соответствуют равновесным состояниям работы предприятий и представляют собой предельные значения факторов производства.

5. Для вычисления этих предельных значений факторов производства, представляющих собой стационарные решения систем дифференциальных уравнений, получены соответствующие системы конечных уравнений, описывающие равновесное состояние работы предприятий.

6. Показано, что наиболее эффективная работа рассматриваемых неоднородных предприятий будет достигаться только тогда, когда предельные значения факторов производства будут совпадать со значениями используемых ресурсов, которые соответствуют максимальным значениям прибыли каждого производственного компонента. Такое совпадение достигается определенным набором коэффициентов норм накопления внутренних инвестиций, для вычисления которых в статье получены специальные формулы.

7. Для двухкомпонентного производственного предприятия построены модели расчета выпуска продукции, издержек и прибыли для каждого компонента и для всего предприятия. Приведены численные решения соответствующей системы дифференциальных уравнений, на основе которых построены интегральные кривые для производственных факторов, выпусков продукции и прибыли для каждого компонента предприятия и для всего предприятия в целом.

### Библиографический список

1. Harrod R.F. The trade cycle. Oxford: Clarendon Press, 1936. 234 p. Available at: <https://archive.org/details/tradecycle0000unse>.
2. Domar E.D. Capital expansion, rate of growth, and employment // *Econometrica*. April 1946. Vol. 14, issue 2. P. 137–147. DOI: [https://doi.org/0012-9682\(194604\)14:2%3C137:CEROGA%3E2.0.CO;2-9](https://doi.org/0012-9682(194604)14:2%3C137:CEROGA%3E2.0.CO;2-9).
3. Solow R.M. A Contribution to the Theory of Economic Growth // *Quarterly Journal of Economics*. February 1956. Vol. 70, № 1. P. 65–94. URL: <http://www.jstor.org/stable/1884513?origin=JSTOR-pdf>.
4. Swan T.W. Economic Growth and Capital Accumulation // *Economic Record*. November 1956, Vol. 32, issue 2. P. 334–361. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1475-4932.1956.tb00434.x>.
5. Kuznets S. Long Swings in the Growth of Population and in Related Economic Variables // *Proceedings of the American Philosophical Society*. 1958. Vol. 102. P. 25–52.
6. Kuznets S. Quantitative Aspects of the Economic Growth of Nations. Paper VIII: Distribution of Income by Size // *Economic Development and Cultural Change*. 1963. Vol. 11, no 2. (Part 2). P. 1–80. URL: <http://www.jstor.org/stable/1152605?origin=JSTOR-pdf>.
7. Uzawa H. Optimum Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth. *International Economic Review*, 1965. Vol. 6, no. 1. P. 18–31. DOI: <http://doi.org/10.2307/2525621>.
8. Arrow K.J. The economic implications of learning by doing // *Review of Economic Studies*. 1962. Vol. 29, issue 3. P. 155–173. URL: <https://econpapers.repec.org/scripts/redir.pf?u=http%3A%2F%2Fhdl.handle.net%2F10.2307%2F2295952;h=repec:oup:restud:v:29:y:1962:i:3:p:155-173>.

9. Denison E.F. The Contribution of Capital to Economic Growth // *The American Economic Review*. Vol. 70, no. 2; Papers and Proceedings of the Ninety-Second Annual Meeting of the American Economic Association. 1980. P. 220–224.
10. Romer P.M. Increasing Returns and Long-run Growth // *Journal of Political Economy*. October 1986. Vol. 94, no. 5. P. 1002–1037. DOI: <https://doi.org/10.1086/261420>.
11. Lucas R.E. On the Mechanics of Economic Development // *Journal of Monetary Economics*. July 1988. Vol. 22, issue 1. P. 3–42. URL: <https://www.sfu.ca/~kkasa/lucas88.pdf>.
12. Romer P.M. Endogenous Technological Change // *Journal of Political Economy*. October 1990. Vol. 98, № 5. P. 71–102. URL: <https://paulromer.net/posts/2015/pdf/Endogenous.pdf>.
13. Grossman G.M., Helpman E. *Innovation and Growth in the Global Economy*. Cambridge, MA: MIT Press, 1991. 376 p. URL: [https://books.google.ru/books?hl=en&lr=&id=4ikgmM2vLJ0C&pgis=1&redir\\_esc=y](https://books.google.ru/books?hl=en&lr=&id=4ikgmM2vLJ0C&pgis=1&redir_esc=y).
14. Mankiw N., Romer D., Weil D. A Contribution to the Empirics of Economic Growth // *Quarterly Journal of Economics*. 1992. Vol. 107, no. 2. P. 407–437. URL: [https://eml.berkeley.edu/~dromer/papers/MRW\\_QJE1992.pdf](https://eml.berkeley.edu/~dromer/papers/MRW_QJE1992.pdf).
15. Grossman G.M., Helpman E. Endogenous Innovation in the Theory of Growth // *Journal of Economic Perspectives*. 1994. Vol. 8, no. 1. P. 23–44. DOI: <http://dx.doi.org/10.1257/jep.8.1.23>.
16. Barro R.J., Sala-i-Martin X. *Economic Growth*. Cambridge MA: MIT Press, 1995. 672 p. URL: <http://piketty.pse.ens.fr/files/BarroSalaIMartin2004.pdf>.
17. Bruno M., Easterly W. *Inflation Crises and Long-Run Growth: NBER Working Papers 5209* // National Bureau of Economic Research, Inc, 1995. URL: <https://www.nber.org/papers/w5209> (дата обращения: 06.03.2012).
18. Gong G., Greiner A., Semmler W. The Uzawa – Lucas model without scale effects: theory and empirical evidence // *Structural Change and Economic Dynamics*. 2004. Vol. 15, issue 4. P. 401–420. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.strueco.2003.10.002>.
19. Нижегородцев Р.М. Модели логистической динамики как инструмент экономического анализа и прогнозирования // *Моделирование экономической динамики: риск, оптимизация, прогнозирование*. Москва, 1997. С. 34–51. URL: <https://studylib.ru/doc/2206631/modeli-logisticheskoy-dinamiki-kak-instrument-ekonomicheskogo-ysclid=lty0swpec0608977014>.
20. Бадаш Х.З. Экономико-математическая модель экономического роста предприятия // *Вестник Удмуртского университета. Серия Экономика и право*. 2009. № 1. С. 5–9. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=11700881>. EDN: <https://www.elibrary.ru/jwbhyv>.
21. Королев А.В., Матвеев В.Д. О структуре равновесных нестационарных траекторий в модели эндогенного роста Лукаса // *Автоматика и телемеханика*. 2006. № 4. С. 126–136. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15569521>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ncskjh>.
22. Кузнецов Ю.А., Мичасова О.В. Сравнительный анализ применения пакетов имитационного моделирования и систем компьютерной математики для анализа моделей теории экономического роста // *Экономический анализ: теория и практика*. 2007. № 5 (86). С. 23–30. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/sravnitelnyy-analiz-primeneniya-paketov-imitatsionnogo-modelirovaniya-i-sistem-kompyuternoy-matematiki-dlya-analiza-modeley/viewer>.
23. Кузнецов Ю.А., Мичасова О.В. Обобщенная модель экономического роста с учетом накопления человеческого капитала // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2012. № 4. С. 46–57. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/obobschennaya-model-ekonomicheskogo-rosta-s-uchetom-nakopleniya-chelovecheskogo-kapitala/viewer>.
24. Прасолов А.В. *Математические методы экономической динамики*. Санкт-Петербург: Лань, 2015. 352 с. URL: <https://klex.ru/uzv?ysclid=lty1xqbv3a707060174>.
25. Сараев А.Л. Уравнения нелинейной динамики кризисных явлений для многофакторных экономических систем // *Вестник Самарского государственного университета*. 2015. № 2 (124). С. 262–273. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23273765>. EDN: <https://www.elibrary.ru/tphumb>.

26. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Показатели нелинейной динамики и предельное состояние производственного предприятия // Экономика и предпринимательство. 2018. № 11 (100). С. 1237–1241. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36512728>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ypfjhn>.
27. Сараев А.Л. Уравнения динамики нестабильных многофакторных экономических систем, учитывающих эффект запаздывания внутренних инвестиций // Казанский экономический вестник, 2015. № 3 (17). С. 68–73. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=24899060>. EDN: <https://www.elibrary.ru/uywnhn>.
28. Ильина Е.А., Сараев А.Л., Сараев Л.А. К теории модернизации производственных предприятий, учитывающей запаздывание внутренних инвестиций // Экономика и предпринимательство, 2017. № 9–4 (86). С. 1130–1134. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=30782945>. EDN: <https://www.elibrary.ru/zxqfaf>.
29. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Экономико-математическая модель развития производственных предприятий, учитывающая эффект запаздывания внутренних инвестиций // Экономика и предпринимательство. 2019. № 5 (106). С. 1316–1320. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=39238012>. EDN: <https://www.elibrary.ru/aigtur>.
30. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Многофакторная математическая модель развития производственного предприятия за счет внутренних и внешних инвестиций // Вестник Самарского университета. Экономика и управление. 2020. Т. 11, № 2. С. 157–165. DOI: <https://doi.org/10.18287/2542-0461-2020-11-2-157-165>. EDN: <https://www.elibrary.ru/wdbmkv>.
31. Сараев А.Л., Сараев Л.А., Математические модели стохастической динамики развития предприятий // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2020. Т. 24, № 2. С. 343–364. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1700>. EDN: <https://www.elibrary.ru/mltmba>.
32. Ilyina E.A., Saraev L.A. Predicting the dynamics of the maximum and optimal profits of innovative enterprises. // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1784. P. 012002. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1784/1/012002>. EDN: <https://www.elibrary.ru/xwxltx>.
33. Saraev A.L., Saraev L.A. Mathematical models of the development of industrial enterprises, with the effect of lagging internal and external investments. // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1784. P. 012010. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1784/1/012010>. EDN: <https://www.elibrary.ru/qvnrzq>.

## References

1. Harrod R.F. The trade cycle. Oxford: Clarendon Press, 1936, 234 p. Available at: <https://archive.org/details/tradecycle0000unse>.
2. Domar E.D. Capital expansion, rate of growth, and employment. *Econometrica*, April 1946, vol. 14, issue 2, pp. 137–147. DOI: [https://doi.org/0012-9682\(194604\)14:2%3C137:CEROGA%3E2.0.CO;2-9](https://doi.org/0012-9682(194604)14:2%3C137:CEROGA%3E2.0.CO;2-9).
3. Solow R.M. A Contribution to the Theory of Economic Growth. *Quarterly Journal of Economics*, February 1956, vol. 70, no. 1, pp. 65–94. Available at: <http://www.jstor.org/stable/1884513?origin=JSTOR-pdf>.
4. Swan T.W. Economic Growth and Capital Accumulation. *Economic Record*, November 1956, vol. 32, issue 2, pp. 334–361. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1475-4932.1956.tb00434.x>.
5. Kuznets S. Long Swings in the Growth of Population and in Related Economic Variables. *Proceedings of the American Philosophical Society*, 1958, vol. 102, pp. 25–52.
6. Kuznets S. Quantitative Aspects of the Economic Growth of Nations. Paper VIII: Distribution of Income by Size. *Economic Development and Cultural Change*, 1963, vol. 11, no. 2, part 2, pp. 1–80. Available at: <http://www.jstor.org/stable/1152605?origin=JSTOR-pdf>.
7. Uzawa H. Optimum Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth. *International Economic Review*, 1965, vol. 6, no. 1, pp. 18–31. DOI: <http://doi.org/10.2307/2525621>.
8. Arrow K.J. The economic implications of learning by doing. *Review of Economic Studies*, 1962, vol. 29, issue 3, pp. 155–173. URL: <https://econpapers.repec.org/scripts/redir.pf?u=http%3A%2F%2Fhdl.handle.net%2F10.2307%2F2295952;h=repec:oup:restud:v:29:y:1962:i:3:p:155-173>.
9. Denison E.F. The Contribution of Capital to Economic Growth. *The American Economic Review*, vol. 70, no. 2; Papers and Proceedings of the Ninety-Second Annual Meeting of the American Economic Association, 1980, pp. 220–224.

10. Romer P.M. Increasing Returns and Long-run Growth. *Journal of Political Economy*, October 1986, vol. 94, number 5, pp. 1002–1037. DOI: <https://doi.org/10.1086/261420>.
11. Lucas R.E. On the Mechanics of Economic Development. *Journal of Monetary Economics*, July 1988, vol. 22, issue 1, pp. 3–42. Available at: <https://www.sfu.ca/~kkasa/lucas88.pdf>.
12. Romer P.M. Endogenous Technological Change. *Journal of Political Economy*, October 1990, vol. 98, no. 5, pp. 71–102. Available at: <https://paulromer.net/posts/2015/pdf/Endogenous.pdf>.
13. Grossman G.M., Helpman E. Innovation and Growth in the Global Economy. Cambridge, MA: MIT Press. 1991, 376 p. Available at: [https://books.google.ru/books?hl=en&lr=&id=4ikgmM2vLJ0C&pgis=1&redir\\_esc=y](https://books.google.ru/books?hl=en&lr=&id=4ikgmM2vLJ0C&pgis=1&redir_esc=y).
14. Mankiw N., Romer D., Weil D. A Contribution to the Empirics of Economic Growth. *Quarterly Journal of Economics*, 1992, vol. 107, no. 2, pp. 407–437. Available at: [https://eml.berkeley.edu/~dromer/papers/MRW\\_QJE1992.pdf](https://eml.berkeley.edu/~dromer/papers/MRW_QJE1992.pdf).
15. Grossman G.M., Helpman E. Endogenous Innovation in the Theory of Growth. *Journal of Economic Perspectives*, 1994, vol. 8, no. 1, pp. 23–44. DOI: <http://dx.doi.org/10.1257/jep.8.1.23>.
16. Barro R.J., Sala-i-Martin X. Economic Growth. Cambridge MA: MIT Press, 1995. 672 p. Available at: <http://piketty.pse.ens.fr/files/BarroSalaIMartin2004.pdf>.
17. Bruno M., Easterly W. Inflation Crises and Long-Run Growth: NBER Working Papers 5209. Retrieved from the official website of the National Bureau of Economic Research, Inc, 1995. Available at: <https://www.nber.org/papers/w5209> (accessed 06.03.2012). (In Russ.)
18. Gong G., Greiner A., Semmler W. The Uzawa – Lucas model without scale effects: theory and empirical evidence. *Structural Change and Economic Dynamics*, 2004, vol. 15, no. 4, pp. 401–420. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.strueco.2003.10.002>.
19. Nizhegorodtsev R.M. Models of logistics dynamics as a tool for economic analysis and forecasting. In: *Modeling of economic dynamics: risk, optimization, forecasting*. Moscow, 1997, pp. 34–51. Available at: <https://studylib.ru/doc/2206631/modeli-logisticheskoy-dinamiki-kak-instrument-ekonomicheskogo-ysclid=lty0swpec0608977014>. (In Russ.)
20. Badash Kh.Z. The economic-mathematical model of the economic growth of enterprises. *Bulletin of Udmurt University. Series Economics and Law*, 2009, no. 1, pp. 5–9. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=11700881>. EDN: <https://www.elibrary.ru/jwbhyy>. (In Russ.)
21. Korolev A.V., Matveenko V.D. Structure of equilibrium time-varying trajectories in the Lucas endogenous growth model. *Automation and Remote Control*, 2006, vol. 67, no. 4, pp. 624–633. (In English; original in Russian).
22. Kuznetsov Yu.A., Michasova O.V. Comparative analysis of the application of simulation packages and computer mathematics systems for the analysis of models of the theory of economic growth. *Economic Analysis: Theory and Practice*, 2007, no. 5 (86), pp. 23–30. Available at: <https://cyberleninka.ru/article/n/sravnitelnyy-analiz-primeneniya-paketov-imitatsionnogo-modelirovaniya-i-sistem-kompyuternoy-matematiki-dlya-analiza-modeley/viewer>. (In Russian).
23. Kuznetsov Yu.A., Michasova O.V. The generalized model of economic growth with human capital accumulation. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2012, no. 4, pp. 46–57. Available at: <https://cyberleninka.ru/article/n/obobschennaya-model-ekonomicheskogo-rosta-s-uchetom-nakopleniya-chelovecheskogo-kapitala/viewer>. (In Russ.)
24. Prasolov A.V. Mathematical methods of economic dynamics. Saint Petersburg: Lan', 2015, 352 p. Available at: <https://klex.ru/uzv?ysclid=lty1xqbv3a707060174>. (In Russ.)
25. Saraev A.L. Equations of nonlinear dynamics of crisis phenomena for multifactor economic systems. *Vestnik of Samara State University*, 2015, no. 2 (124), pp. 262–273. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23273765>. EDN: <https://www.elibrary.ru/tphumb>. (In Russ.)
26. Saraev A.L., Saraev L.A. Indicators of nonlinear dynamics and the limiting condition of a manufacturing enterprise. *Journal of Economy and entrepreneurship*, 2018, no. 11 (100), pp. 1237–1241. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36512728>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ypfjhn>. (In Russ.)

27. Saraev A.L. Equations of dynamics of unstable multifactor economic systems taking into account retardation effects of domestic investment. *Kazan economic vestnik*, 2015, no. 3 (17), pp. 68–73. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=24899060>. EDN: <https://www.elibrary.ru/uywnhn>. (In Russ.)
28. Ilyina E.A., Saraev A.L., Saraev L.A. To the theory of modernization of manufacturing enterprises, taking into account the lag of domestic investment. *Journal of Economy and entrepreneurship*, 2017, no. 9–4 (86), pp. 1130–1134. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=30782945>. EDN: <https://www.elibrary.ru/zxqfaf>. (In Russ.)
29. Saraev A.L., Saraev L.A. Economic-mathematical model for the development of manufacturing enterprises, taking into account the effect of the lag of domestic investment. *Journal of Economy and entrepreneurship*, 2019, no. 5 (106), pp. 1316–1320. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=39238012>. EDN: <https://www.elibrary.ru/aigtur>. (In Russ.)
30. Saraev A.L., Saraev L.A. Multi-factor mathematical model of development of a production enterprise accounted by internal and external investments. *Vestnik Samarskogo universiteta. Ekonomika i upravlenie Vestnik of Samara University. Economics and Management*, 2020, vol. 11, no. 2, pp. 157–165. DOI: <https://doi.org/10.18287/2542-0461-2020-11-2-157-165>. EDN: <https://www.elibrary.ru/wdbmkv>. (In Russ.)
31. Saraev A.L., Saraev L.A. Stochastic calculation of curves dynamics of enterprise. *Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2020, vol. 24, no. 2, pp. 343–364. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1700>. EDN: <https://www.elibrary.ru/mltmba>. (In Russ.)
32. Ilyina E.A., Saraev L.A. Predicting the dynamics of the maximum and optimal profits of innovative enterprises. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 1784, p. 012002. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1784/1/012002>. EDN: <https://www.elibrary.ru/xwxltx>.
33. Saraev A.L., Saraev L.A. Mathematical models of the development of industrial enterprises, with the effect of lagging internal and external investments. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 1784, p. 012010. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1784/1/012010>. EDN: <https://www.elibrary.ru/qvnrzq>.