DOI: 10.18287/2542-0461-2023-14-4-213-220

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

УДК 330.4

Дата поступления: 14.07.2023
рецензирования: 05.09.2023
принятия: 30.11.2023

Стратегия выбора оптимальных объемов производственной деятельности с итеративным научением

О.В. Павлов
Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: pavlov.ov@ssau.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3327-8124

Аннотация: Рассмотрена задача оптимального управления производственной деятельностью с итеративным научением. В процессе освоения новой продукции, внедрении новых технологий и инноваций на промышленных предприятиях проявляется эффект итеративного научения, который приводит к уменьшению временных затрат на изготовление продукции при увеличении кумулятивного объема производства. Целью решения задачи является снижение трудовых затрат промышленных предприятий в период освоении новой продукции, внедрении новых технологии и инноваций. Проблема математически формализуется как задача оптимального управления производственной системой с непрерывным временем. Динамика изменения производственной системы описывается обыкновенным дифференциальным уравнением. В качестве критерия оптимальности рассматривается минимизация интегрального темпа роста трудовых затрат на производство продукции. Исходная задача сведена к задаче минимизации интегрального натурального логарифма трудовых затрат. Найдено аналитическое решение задачи с применением принципа максимума Понтрягина. Определена стратегия выбора оптимальных объемов производства для любой модели научения. Оптимальные объемы производства выбираются обратно пропорционально удельным трудовым затратам (трудоемкости) на изготовление продукции. Показано, что при выборе оптимальных объемов производства трудовые затраты на изготовление продукции постоянны на всем горизонте планирования.

Ключевые слова: производственная деятельность; итеративное научение; оптимальное управление; принцип максимума Понтрягина

Цитирование. Павлов О.В. Стратегия выбора оптимальных объемов производственной деятельности с итеративным научением // Вестник Самарского университета. Экономика и управление Vestnik of Samara University. Economics and Management. 2023. Т. 14, № 4. С. 213–220. DOI: http://doi.org/10.18287/2542-0461-2023-14-4-213-220.

Информация о конфликте интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Олег Валерьевич Павлов – кандидат технических наук, доцент кафедры менеджмента и организации производства, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

SCIENTIFIC ARTICLE

Submitted: 14.07.2023
Revised: 05.09.2023
Accepted: 30.11.2023

Strategy for selecting optimal volumes of production activities with iterative learning

O.V. Pavlov
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: pavlov.ov@ssau.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3327-8124

Abstract: The problem of optimal control of production activities with iterative learning is considered. In the process of mastering new products, introducing new technologies and innovations at industrial enterprises, the effect of iterative learning is manifested, which leads to a reduction in time spent on manufacturing products while increasing the cumulative production volume. The goal of solving the problem is to reduce labor costs of industrial enterprises during the development of new products, the introduction of new technologies and innovations. The problem is formalized mathematically as a continuous-time optimal control task for a production system. The dynamics of change in the production system are described by an ordinary differential equation. Minimization of the integral growth rate of labor costs for production is considered as an optimality criterion. The original problem is reduced to the task of minimizing the integral natural logarithm of labor costs. An analytical solution to the problem is found using Pontryagin's maximum principle. A strategy for selecting optimal production volumes for any learning model has been determined. Optimal production volumes are selected in inverse proportion to the specific labor costs (labor intensity) for manufacturing products. It is shown that when choosing optimal production volumes, labor costs for manufacturing products are constant over the entire planning horizon.
Key words: production activity; iteractive learning; optimal control; Pontryagin's maximum principle.
Citation. Pavlov O.V. Strategy for selecting optimal volumes of production activities with iterative learning. *Vestnik Samarskogo universiteta. Ekonomika i upravlenie Vestnik of Samara University. Economics and Management*, 2023, vol. 14, no. 4, pp. 213–220. DOI: http://doi.org/10.18287/2542-0461-2023-14-4-213-220. (In Russ.)
Information on the conflict of interest: author declares no conflict of interest.

Oleg V. Pavlov – Candidate of Economics, associate professor of the Department of Management, Samara National Research University, 34, Moskovskoe shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Введение

В производственной деятельности на промышленных предприятиях при освоении новой продукции, внедрении новых технологии и инноваций проявляется эффект кривой обучения. Эффект заключается в том, что затраты времени работников на производство единицы продукции (трудоемкость продукции) и удельные затраты на изготовление единицы продукции (себестоимость продукции) при увеличении объема выпуска продукции снижаются. Эффект кривой обучения был впервые описан авиационным инженером Т. Райтом [1]. Райт установил, что при увеличении объема производства в два раза трудоемкость продукции снижается на 15–20 %. Обзоры различных моделей кривых обучения в производственной деятельности представлены в научной литературе [2–4].

Эффект кривой обучения является проявлением итеративного научения, которое исследуется в различных научных областях: педагогике, психологии, физиологии человека [5–8]. Под итеративным научением понимается процесс получения индивидуального опыта при многократном повторении обучаемой системой действий для достижения определенной цели при постоянных внешних условиях.

Динамическое уменьшение трудоемкости (себестоимости) продукции при увеличении кумулятивного объема производства делает актуальными задачи оптимального управления производственной деятельностью. Задачи заключаются в поиске оптимальных объемов производства в каждый момент времени при заданных временных, производственных и финансовых ограничениях с целью минимизации интегральных (за определенный временной период) затрат на изготовление продукции. Решения таких задач позволяют снизить трудовые и производственные затраты промышленным предприятиям в период освоении новой продукции, внедрении новых технологии и инноваций.

Для решения задачи оптимального управления производственной деятельностью возможно два подхода: применение метода динамического программирования Беллмана [9] и принципа максимума Понтрягина [10]. Рассмотрение задач оптимального управления в дискретном виде и применение метода динамического программирования Беллмана позволяют получить численные решения. Постановки и численные решения задач динамической оптимизации деятельности при итеративном научении в дискретной форме приводятся в [6–8; 11–13].

Для поиска аналитических решений актуальным является рассмотрение задач оптимального управления производственной деятельностью с непрерывным временем. Применение принципа максимума Понтрягина для решения задач с непрерывным временем позволяет получить аналитические решения, что является важным для установления общих стратегий, принципов и условий управления производственной деятельностью. Аналитические решения для некоторых задач оптимального управления производственной деятельностью с непрерывным временем рассматривались автором в [14–15].

Постановка задачи оптимального управления

Динамика производственного процесса описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = u(t), \tag{1}$$

где *x(t)* – кумулятивный объем производства в момент времени *t*, *u(t)* – объем производства.

Производственная деятельность рассматривается на горизонте планирования:

$$0 \le t \le T,$$

где T – конечный момент времени.

В начальный момент времени известно количество произведенной продукции:

$$x(0) = x_0. \tag{2}$$

В конечный момент времени кумулятивный объем произведенной продукции должен быть равен заданному:

$$x(T) = x_0 + R. \tag{3}$$

где R – заданный объем производства продукции.

На объем производства наложены следующие ограничения:

$$0 < u(t) \le x_0 + R - x(t), \tag{4}$$

В качестве критерия оптимальности рассматривается минимизация интегрального темпа прироста трудовых затрат на производство продукции:

$$\tilde{J} = \int_0^T \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} dt \to min. \tag{5}$$

Трудовые затраты на изготовление продукции определяются как произведение трудоемкости продукции τ*(x(t))* и объема производства $u(t)$:

$$C(t) = \tau(x(t))u(t). \tag{6}$$

Динамика изменения трудоемкости от кумулятивного объема производства описывается различными моделями кривой обучения [1-4] и итеративного научения [5-9]:

Экспоненциальная модель трудоемкости имеет вид:

$$\tau(x(t)) = \tau_{\text{пр}} + (\tau_0 - \tau_{\text{пр}})e^{-\alpha x(t)}, \tag{7}$$

где $\tau_{\text{пр}}$ – предельное значение трудоемкости, τ_0 – начальное значение трудоемкости, α – скорость научения.

Логистическая модель трудоемкости:

$$\tau(x(t)) = \tau_{\text{пр}} + (\tau_0 - \tau_{\text{пр}}) \left[\frac{1}{1+\beta e^{\alpha x(t)}}\right], \tag{8}$$

где β – параметр модели.

Сформулируем модель научения общего вида:

$$\tau(x(t)) = \tau_{\text{пр}} + (\tau_0 - \tau_{\text{пр}}) f(\beta e^{-\alpha x(t)}), \tag{9}$$

где $f(\beta e^{-\alpha x(t)})$ – функция, зависящая от кумулятивного объема производства $x(t)$, скорости научения α и параметра β.

Утверждение

Для положительной и абсолютно непрерывной функции *C(t)* максимизация (минимизация) функционала:

$$\tilde{J} = \int_0^T \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} dt \tag{10}$$

эквивалентна максимизации (минимизации) функционала:

$$J = \int_0^T \ln C(t)\, dt. \tag{11}$$

Доказательство утверждения

Выполним интегрирование функционала (10). Сделаем замену:

$$y = C(t),$$

тогда

$$dy = \dot{C}(t)dt.$$

Вычислим интеграл (10):

$$\int_0^T \frac{\dot{C}(t)}{C(t)}dt = \int_0^T \frac{dy}{y}dt = ln\,C(T) - ln\,C(0). \quad (12)$$

Таким образом максимизация (минимизация) функционала (10) эквивалентна максимизации (минимизации) разницы значений логарифма функции $C(t)$ в конечный и начальный моменты времени.

Введем функцию $g(t)$:

$$g(t) = \ln C(t), \quad (13)$$

тогда критерий (10) перепишется в виде:

$$\tilde{J} = \int_0^{\mathrm{T}} \frac{\dot{C}(t)}{C(t)}dt = g(T) - g(0). \quad (14)$$

Вариант А: функция $g(t)$ возрастающая, выполняется условие:

$$g(T) > g(0).$$

Рассмотрим график функции $g(t)$ в прямоугольной системе координат, в которой по оси абсцисс отложено время *t*, а по оси ординат – функция $g(t)$. Начало координат выберем так, чтобы в начальный момент времени выполнялось условие:

$$g(0) = \ln C(0) = 0. \quad (15)$$

Значение функции $g(t)$ в конечный момент времени, с учетом (13) и (15) определится:

$$g(T) = \ln C(T) - \ln C(0). \quad (16)$$

Критерий (14) имеет геометрический смысл максимизации (минимизации) высоты прямоугольника $S_{\text{пр}}$, образованного прямой $g(t) = g(T)$, осями абсцисс и ординат, прямой $t=T$.

Площадь прямоугольника $S_{\text{пр}}$ определяется, как произведение длины *T* на высоту $g(T)$:

$$S_{\text{пр}} = Tg(T). \quad (17)$$

Так как время *T* фиксировано, из формулы (17) следует, что максимизация (минимизации) высоты прямоугольника $g(T)$ будет эквивалентна максимизации (минимизации) площади прямоугольника $S_{\text{пр}}$.

Площадь фигуры $S_{\text{ф}}$, образованной функцией $g(t)$, осями абсцисс и ординат, прямой $t=T$ определяется интегралом:

$$S_{\text{ф}} = \int_0^T g(t)dt. \quad (18)$$

Рассмотрим два варианта, когда функция $g(t)$ принимает в конечный момент времени значения $g_1(T)$ и $g_2(T)$.

Найдем отношение площадей фигуры $S_{1\text{ф}}$ и прямоугольника $S_{1\text{пр}}$ в случае конечного значения $g_1(T)$:

$$\frac{S_{1\text{ф}}}{S_{1\text{пр}}} = \frac{\int_0^T g_1(t)dt}{Tg_1(T)}. \quad (19)$$

Предположим, что конечное значение функции $g_1(T)$ увеличилось в *m* раз ($m>0$):

$$g_2(T) = mg_1(T). \quad (20)$$

Начальное условие осталось без изменений:

$$g_2(t) = 0. \quad (21)$$

С учетом граничных условий (20), (21) функция $g_2(t)$ на всем интервале [0, *T*] определится по формуле:

$$g_2(t) = mg_1(t). \quad (22)$$

Отношение площадей фигуры $S_{2\text{ф}}$ и прямоугольника $S_{2\text{пр}}$:

$$\frac{S_{2\text{ф}}}{S_{2\text{пр}}} = \frac{\int_0^T g_2(t)dt}{Tg_2(T)}. \quad (23)$$

Подставим в формулу (23) выражения (20), (22) и выполним преобразования:

$$\frac{S_{2\text{ф}}}{S_{2\text{пр}}} = \frac{m\int_0^T g_1(t)dt}{mT\ \ {}_1(T)} = \frac{\int_0^T g_1(t)dt}{Tg_1(T)} = \frac{S_{1\text{ф}}}{S_{1\text{пр}}} = k. \quad (24)$$

где k – постоянный коэффициент.

Таким образом при любых значениях функции в конечный момент времени отношение площадей фигуры $S_{ф}$ и прямоугольника $S_{пр}$ есть постоянная величина k. А следовательно площадь фигуры пропорциональна площади прямоугольника:

$$S_{ф} = kS_{пр}. \tag{25}$$

Перепишем (25) с учетом (17) и (18):

$$\int_0^T g(t)dt = kTg(T). \tag{26}$$

Подставим в (26) формулы (13) и (16):

$$\int_0^T lnC(t)\,dt = kT(\ln C(T) - \ln C(0)). \tag{27}$$

Учитывая (12), получаем:

$$\int_0^T lnC(t)\,dt = kT\left(\int_0^T \frac{\dot{C}(t)}{C(t)}dt\right). \tag{28}$$

Так как время T и коэффициент k являются постоянными величинами из выражения (28) следует, что максимизация (минимизация) функционала (10) эквивалентна максимизации (минимизации) функционала (11).

Вариант Б: функция $g(t)$ убывающая, выполняется условие:

$$g(T) < g(0).$$

Сведем вариант Б к рассмотренному ранее варианту А.

Задача о максимизации отрицательной разницы значений убывающей функции $g(t)$ в конечный и начальный моменты времени:

$$\max_{t\ni[0,T]}\{\tilde{J}\} = \int_0^{\mathrm{T}} \frac{\dot{C}(t)}{C(t)}dt = g(T) - g(0) < 0.$$

будет эквивалента задаче минимизации положительной разницы значений возрастающей функции $-g(t)$ в конечный и начальный моменты времени:

$$\min_{t\ni[0,T]}\{-\tilde{J}\} = -\int_0^{\mathrm{T}} \frac{\dot{C}(t)}{C(t)}dt = g(0) - g(T) > 0.$$

Рассмотрим график функции $-g(t)$ в прямоугольной системе координат, в которой по оси абсцисс отложено время t, а по оси ординат – функция $-g(t)$. Начало координат выберем так, чтобы в начальный момент времени выполнялось условие:

$$g(0) = \ln C(0) = 0.$$

График функции $-g(t)$ в варианте Б совпадает с графиком функции $g(t)$ в варианте А. Таким образом задача свелась к случаю А. Утверждение доказано.

В качестве критерия оптимальности на основе Утверждения примем минимизацию интегральной логарифмической функции трудовых затрат (11). Запишем функционал (11) с учетом выражения для функции трудовых затрат (6):

$$J = \int_0^T ln[\tau(x(t))u(t)]\,dt. \tag{29}$$

Задача оптимального управления заключается в поиске оптимальных объемов производства $u(t)$, удовлетворяющих ограничению (4), которые осуществляют перевод системы (1) из начального состояния (2) в конечное состояние (3) и минимизируют критерий (29).

Решение задачи оптимального управления

Применим принцип максимума Понтрягина для решения сформулированной задачи оптимального управления (1)–(4), (29).

Запишем функцию Гамильтона:

$$H(t, x, \psi, u) = \psi(t)u(t) - ln[\tau(x(t))] - \ln[u(t)], \tag{30}$$

где $\psi(t)$ – вспомогательная переменная, которая удовлетворяет сопряженному уравнению:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial\{ln[\tau(x(t))]\}}{\partial x}.$$

В соответствии с принципом максимума Понтрягина в каждой точке оптимальной траектории функция Гамильтона достигает максимума относительно управления. Найдем максимум гамильтониана по управлению из условия:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0. \quad (31)$$

Определим оптимальное управление из (31):

$$u(t)^{opt} = \frac{1}{\psi}. \quad (32)$$

Оптимальное управление обратно пропорционально вспомогательной переменной. Запишем систему сопряженных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\psi}; \\ \frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\{ln[\tau(x(t))]\}}{\partial x}. \end{cases} \quad (33)$$

Из первого уравнения системы (33) следует:

$$dt = \psi dx. \quad (34)$$

Перепишем второе уравнение системы (33):

$$dt = \left(\frac{\partial\{ln[\tau(x(t))]\}}{\partial x}\right)^{-1} d\psi. \quad (35)$$

Запишем симметрическую форму системы (33) с учетом уравнений (34), (35):

$$dt = \psi dx = \left(\frac{\partial\{ln[\tau(x(t))]\}}{\partial x}\right)^{-1} d\psi. \quad (36)$$

Разделим переменные в дифференциальном уравнении (36):

$$\frac{d\psi}{\psi} = \frac{\partial\{ln[\tau(x(t))]\}}{\partial x} dx. \quad (37)$$

Общее решение дифференциального уравнения (37) будет иметь вид:

$$\psi = \frac{1}{C_0}\tau(x(t)). \quad (38)$$

где C_0 – постоянная интегрирования, которое определяется из начального (2) и конечного условия (3).

Подставим (38) в условие (32) и получим формулу для оптимального управления:

$$u(t)^{opt} = \frac{C_0}{\tau(x(t))}. \quad (39)$$

Из полученного условия для оптимального управления (39) следует: оптимальные объемы производства для любой модели научения должны быть обратно пропорциональны трудоемкости продукции.

Запишем условие для оптимального управления с учетом общего вида модели научения:

$$u(t)^{opt} = \frac{C_0}{\tau_{пр} + (\tau_0 - \tau_{пр}) f(\beta e^{-\alpha x(t)})}. \quad (40)$$

Анализируя (40) можно сделать выводы: в начале временного интервала $[0, T]$ трудоемкость изготовления продукции большая, следовательно объемы производства должны быть маленькими. По мере уменьшения трудоемкости из-за итеративного обучения работников объемы производства должны увеличиваться.

Подставим оптимальное управление (40) в дифференциальное уравнение, описывающее динамику производственного процесса (1):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{C_0}{\tau_{пр} + (\tau_0 - \tau_{пр}) f(\beta e^{-\alpha x(t)})}. \quad (41)$$

Выполним разделение переменных в (41):

$$\tau_{пр} + (\tau_0 - \tau_{пр}) f(\beta e^{-\alpha x(t)}) dx = C_0 dt. \quad (42)$$

Проинтегрируем левую и правую части дифференциального уравнения (42):

$$\int\{\tau_{пр} + (\tau_0 - \tau_{пр}) f(\beta e^{-\alpha x(t)})\} dx = C_0 t + C_1. \quad (43)$$

где C_1 – постоянная интегрирования, определяется из граничных условий (2), (3).

Оптимальная траектория кумулятивного объема производства получится из решения уравнения (43), с граничными условиями (2), (3). Решение определяется конкретным видом динамической модели трудоемкости продукции (7)-(9).

Подставим оптимальное управление (39) в формулу для трудовых затрат на производство продукции (6):

$$C^{opt}(t) = C_0. \quad (44)$$

Из (44) следует вывод: при выборе оптимальных объемов производства трудовые затраты на изготовление продукции постоянны на всем горизонте планирования. Постоянная C_0 определяется из граничных условий (2) и (3) и вида модели трудоемкости продукции. Для разных моделей трудоемкости значения трудовых затрат будут разными.

Определим значение критерия (29) при выборе оптимального управления на оптимальной траектории:

$$J^{opt} = \int_0^T ln\, C_0\, dt = T\, ln\, C_0.$$

Значение критерия при выборе оптимальных объемов производства зависит только от горизонта планирования *T*.

Заключение

1. Сформулирована задача оптимального управления производственной деятельностью с непрерывным временем. Критерием оптимальности является минимизация интегрального темпа прироста трудовых затрат на производство продукции.

2. Сформулировано и доказано утверждение, что максимизация (минимизация) интегрального темпа прироста произвольной функции эквивалентна максимизации (минимизации) интегрального натурального логарифма этой функции.

3. Задача минимизация интегрального темпа прироста трудовых затрат на производство продукции сведена к задаче минимизации интегрального натурального логарифма трудовых затрат.

4. Сформулированная задача оптимального управления решена аналитически с помощью принципа максимума Понтрягина для любого вида модели итеративного научения.

5. Определена стратегия выбора оптимальных объемов производства для любой модели научения. Оптимальные объемы производства выбираются обратно пропорционально удельным трудовым затратам (трудоемкости) на изготовление продукции.

6. Показано, что при выборе оптимальных объемов производства трудовые затраты на изготовление продукции постоянны на всем горизонте планирования. Значение критерия при выборе оптимальных объемов производства зависит только от горизонта планирования *T*.

Библиографический список

1. Wright T.P. Factors Affecting the Cost of Airplanes // Journal of the Aeronautical Sciences. 1936. Vol. 3, no. 4. P. 122–128. DOI: https://doi.org/10.2514/8.155.

2. Badiru A. Computational survey of univariate and multivariate learning curve models // IEEE Transactions on Engineering Management. 1992. Vol. 39, issue 2. P. 176–188. DOI: https://doi.org/10.1109/17.141275.

3. Yelle L.E. The learning curve: Historical review and comprehensive survey // Decision Sciences. 1979. Vol. 10, issue 2. P. 302–328. DOI: https://doi.org/10.1111/j.1540-5915.1979.tb00026.x.

4. Learning Curves: Theory, Models, and Applications / edited by Mohamad Y. Jaber. Boca Raton: CRC Press, 2011. 476 P. DOI: https://doi.org/10.1201/b10957.

5. Новиков Д.А. Закономерности итеративного научения. Москва: ИПУ РАН, 1998. 77 с. URL: http://www.methodolog.ru/books/file_37.pdf; https://www.elibrary.ru/item.asp?id=18062556. EDN: https://www.elibrary.ru/pfgvox.

6. Белов М.В., Новиков Д.А. Модели технологий. Москва: Ленанд, 2019. 160 с. URL: http://www.mtas.ru/biblio/MT.pdf; https://www.elibrary.ru/item.asp?id=39112090. EDN: https://www.elibrary.ru/bphvdq.

7. Белов М.В., Новиков Д.А. Управление жизненными циклами организационно-технических систем. Москва: Ленанд, 2019. 160 с. URL: https://obuchalka.org/20200127118046/upravlenie-jiznennimi-ciklami-organizacionno-tehnicheskih-sistem-belov-m-b-novikov-d-a-2020.html; https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41233177. EDN: https://www.elibrary.ru/hqylqr.

8. Белов М.В., Новиков Д.А. Модели опыта. // Проблемы управления. 2021. № 1. С. 43–60. DOI: http://doi.org/10.25728/pu.2021.1.5. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44834954. EDN: https://www.elibrary.ru/epfldq.

9. Беллман Р. Динамическое программирование. Москва: Издательство иностранной литературы, 1960. 400 с. URL: https://djvu.online/file/Y6aNgwIw9NxsP?ysclid=lr8z8ez7aj586852924.

10. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Москва: Наука, 1983. 392 с. URL: https://djvu.online/file/NN6TYTWzZN0kJ?ysclid=lr8zpnxous823328291.

11. Новиков Д.А. Модели обучения в процессе работы. // Управление большими системами. 2007. № 19. С. 5–22. URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_9592867_21020333.pdf.

12. Павлов О.В., Рясная Т.Н. Численное решение задачи планирования производства при динамическом снижении трудоемкости. // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. 2012. № 6 (37). С. 126–132. URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_20419613_78336007.pdf.

13. Павлов О.В. Численное решение динамических задач планирования объемов производства в проектах освоения новой продукции // Вестник Самарского университета. Экономика и управление. 2017. Т. 8, № 4. С. 7–19. URL: http://journals.ssau.ru/index.php/eco/article/view/5903; https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32658516. EDN: https://www.elibrary.ru/ytfesx.

14. Павлов О.В. Аналитическое исследование проблемы планирования производственной деятельности в проектах освоения новой продукции. // Экономические науки. 2017. № 12 (157). С. 30–36. URL: http://www.ecsn.ru/files/pdf/201712/201712_30.pdf; https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32606990. EDN: https://www.elibrary.ru/lbnruv.

15. Pavlov O.V. Dynamic models of production planning with continuous time in projects of new products development // Journal of Physics: Conference Series, 2018. Vol. 1096. P. 012180. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1096/1/012180.

References

1. Wright T.P. Factors Affecting the Cost of Airplanes. *Journal of the Aeronautical Sciences,* 1936, vol. 3, no. 4, pp. 122–128. DOI: https://doi.org/10.2514/8.155.

2. Badiru A. Computational survey of univariate and multivariate learning curve models. *IEEE Transactions on Engineering Management,* 1992, vol. 39, issue 2, pp. 176–188. DOI: https://doi.org/10.1109/17.141275.

3. Yelle L.E. The learning curve: Historical review and comprehensive survey. *Decision Sciences*, 1979, Vol. 10, Issue 2, pp. 302–328. DOI: https://doi.org/10.1111/j.1540-5915.1979.tb00026.x.

4. Learning Curves: Theory, Models, and Applications. Edited by Mohamad Y. Jaber. Boca Raton: CRC Press, 2011, 476 p. DOI: https://doi.org/10.1201/b10957.

5. Novikov D.A. Patterns of iterative learning. Moscow: IPU RAN, 1998, 77 p. Available at: http://www.methodolog.ru/books/file_37.pdf; https://www.elibrary.ru/item.asp?id=18062556. EDN: https://www.elibrary.ru/pfgvox. (In Russ.)

6. Belov M.V., Novikov D.A. Technology models. Moscow: Lenand, 2019, 160 p. Available at: http://www.mtas.ru/biblio/MT.pdf; https://www.elibrary.ru/item.asp?id=39112090. EDN: https://www.elibrary.ru/bphvdq. (In Russ.)

7. Belov M.V., Novikov D.A. Life cycle management of organizational and technical systems. Moscow: Lenand, 2019, 160 p. Available at: https://obuchalka.org/20200127118046/upravlenie-jiznennimi-ciklami-organizacionno-tehnicheskih-sistem-belov-m-b-novikov-d-a-2020.html; https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41233177. EDN: https://www.elibrary.ru/hqylqr. (In Russ.)

8. Belov M.V., Novikov D.A. Models of experience. *Control Sciences,* 2021, no. 1, p. 37–52. DOI: https://doi.org/10.25728/cs.2021.1.5. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=47854887. EDN: https://www.elibrary.ru/leervh. (In English; original in Russian).

9. Bellman R. Dynamic programming. Moscow: Izdatel'stvo inostrannoi literatury, 1960, 400 p. Available at: https://djvu.online/file/Y6aNgwIw9NxsP?ysclid=lr8z8ez7aj586852924. (In Russ.)

10. Pontryagin L.S., Boltyansky V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. Mathematical theory of optimal processes. 4th edition, stereotyped. Moscow: Nauka, 1983, 392 p. Available at: https://djvu.online/file/NN6TYTWzZN0kJ?ysclid=lr8zpnxous823328291. (In Russ.)

11. Novikov D.A. Models of learning by doing. *Large-Scale Systems Control*, 2007, no. 19, pp. 5–22. Available at: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_9592867_21020333.pdf. (In Russ.)

12. Pavlov O.V., Ryasnaya T.N. Numerical solution of a production planning problem in case of dynamic labor input reduction. *Vestnik of Samara State Aerospace University,* 2012, no. 6 (37), pp. 126–132. Available at: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_20419613_78336007.pdf. (In Russ.)

13. Pavlov O.V. Numerical solution of the dynamic problems of planning production volumes in projects for the development of new products. *Vestnik Samarskogo universiteta. Ekonomika i upravlenie Vestnik of Samara University. Economics and Management,* 2017, vol. 8, no. 4, pp. 7–19. Available at: http://journals.ssau.ru/index.php/eco/article/view/5903; https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32658516. EDN: https://www.elibrary.ru/ytfesx. (In Russ.)

14. Pavlov O.V. Analytical study of the problem of planning production activities in projects for the development of new products. *Economic Sciences,* 2017, no. 12 (157), pp. 30–36. Available at: http://www.ecsn.ru/files/pdf/201712/201712_30.pdf; https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32606990. EDN: https://www.elibrary.ru/lbnruv. (In Russ.)

15. Pavlov O.V. Dynamic models of production planning with continuous time in projects of new products development. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 1096, p. 012180. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1096/1/012180.