DOI: 10.18287/2542-0461-2023-14-3-205-218

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

УДК 330.42

Дата поступления: 11.06.2023
рецензирования: 23.07.2023
принятия: 25.08.2023

Модель стохастической динамики производственного предприятия, учитывающая оптимальные нормы внутренних инвестиций

Е.А. Ильина
Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,
г. Самара, Российская Федерация
E-mail: elenaalex.ilyina@yandex.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2590-6138
Л.А. Сараев
Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,
г. Самара, Российская Федерация
E-mail: saraev_leo@mail.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3625-5921

Аннотация: В публикуемой статье предложена новая экономико-математическая модель стохастической динамики развития многофакторного производственного предприятия, восстановление ресурсов которого обеспечивается за счет внутренних инвестиций. Прогнозирование роста объемов выпуска продукции, производственных издержек, прибыли и амортизационных отчислений описывается системой стохастических дифференциальных уравнений. Показано, что динамике оптимального развития предприятия, в рамках которой оно выходит на производственные мощности, отвечающие максимальной прибыли, соответствуют эффективные коэффициенты норм внутренних инвестиций, для вычисления которых установлена специальная система уравнений. Показано, что выбор неэффективных коэффициентов норм внутренних инвестиций не дает возможность предприятию обеспечить свою максимальную прибыль.

Ключевые слова: амортизация; издержки; инвестиции; коэффициенты норм инвестиций; предприятие; производственная функция; производственные факторы; производство; ресурсы.
Цитирование. Ильина Е.А., Сараев Л.А. Модель стохастической динамики производственного предприятия, учитывающая оптимальные нормы внутренних инвестиций // Вестник Самарского университета. Экономика и управление Vestnik of Samara University. Economics and Management. 2023. Т. 14, № 3. С. 205–218. DOI: http://doi.org/10.18287/2542-0461-2023-14-3-205-218.
Информация о конфликте интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Елена Алексеевна Ильина – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и бизнес-информатики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.
Леонид Александрович Сараев – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и бизнес-информатики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

SCIENTIFIC ARTICLE

Submitted: 11.06.2023
Revised: 23.07.2023
Accepted: 25.08.2023

Model of stochastic dynamics of a manufacturing enterprise, taking into account the optimal rates of domestic investment

E.I. Ilyina
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: elenaalex.ilyina@yandex.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2590-6138
L.A. Saraev
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: saraev_leo@mail.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3625-5921

Abstract: In the published article, a new economic and mathematical model of the stochastic dynamics of the development of a multifactorial manufacturing enterprise is proposed, the restoration of resources of which is provided by internal investments. Forecasting the growth of output volumes, production costs, profits and depreciation deductions is described by a system of stochastic differential equations. It is shown that the dynamics of optimal development of an enterprise, within which it enters production capacities that correspond to maximum profit, correspond to effective coefficients of internal investment rates, for the calculation of which a special system of equations is established. It is shown that the choice of inefficient coefficients of internal investment rates does not allow the enterprise to ensure its maximum profit.
Key words: depreciation; costs; profit capitalization; capitalization ratios; enterprise; production function; production factors; production; resources.
Citation. Ilyina E.A., Saraev L.A. Model of stochastic dynamics of a manufacturing enterprise, taking into account the optimal rates of domestic investment. *Vestnik Samarskogo universiteta. Ekonomika i upravlenie Vestnik of Samara University. Economics and Management*, 2023, vol. 14, no. 3, pp. 205–218. DOI: http://doi.org/10.18287/2542-0461-2023-14-3-205-218.
Information on the conflict of interest: authors declare no conflict of interest.

Elena A. Ilyina – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Mathematics and Business Informatics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.
Leonid A. Saraev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, head of the Department of Mathematics and Business Informatics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Введение

Устойчивый экономический рост производственных предприятий и экономических систем формирует стабильное развитие всей национальной экономики. Прогнозирование экономико-математическими методами показателей динамики развития субъектов экономики является одной из актуальных проблем современной экономической теории, успешное решение которой позволяет проводить полноценную аналитику бизнес-процессов, вычислять оптимальные объемы выпуска продукции, ресурсов, издержек и прибыли, которые способствуют выходу предприятий на эффективные производственные мощности. Классические положения теории экономического роста предприятий и экономических систем подробно представлены в работах [1–7].

На их основе разработан целый спектр моделей роста экономических систем, учитывающий роль технических инноваций и информационных технологий [8–32].

Динамика развития предприятий, которая в силу объективных обстоятельств носит, как правило, стохастический характер, определяется взаимодействием объемов инвестиций в производство и амортизационных отчислений на восстановление объемов ресурсов и затрат на модернизацию средств производства. Поэтому одним из главных математических инструментов для построения моделей экономического развития предприятий является аппарат стохастических дифференциальных уравнений и их систем [33–39].

Целью публикуемой работы является разработка новой экономико-математической модели динамики развития предприятия, которая учитывает случайный характер влияния сопровождающих издержек производства, амортизационных отчислений и внутренних инвестиций. Такая модель позволяет прогнозировать выход мощностей предприятия на эффективное предельное состояние производства, при котором прибыль предприятия становится максимальной.

Пусть предприятие для выпуска своей продукции привлекает объемы факторов производства $\left(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\right)$, представляющие собой капитал, трудовые ресурсы, материалы, технологии, инновации и т. д.

Величины $Q_i = Q_i\left(t\right)$ предполагаются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми функциями времени.

Начальные значения $Q_i^N = Q_i\left(0\right)$ функций $Q_i = Q_i\left(t\right)$ считаются известными, их предельные значения $Q_i^F = \lim\limits_{t\to\infty} Q_i\left(t\right)$ определяется динамикой развития предприятия и подлежат вычислению.

Объем выручки предприятия V обеспечивается многофакторной производственной функцией Кобба – Дугласа

$$V = P \cdot \prod_{s=1}^{n} Q_s^{a_s} . \tag{1}$$

Здесь показатели степени a_s представляют собой эластичности выпуска по соответствующим ресурсам $\left(0 < a_s < 1\right)$, коэффициент P равен объему выручки, полученной от переработки единичных объемов ресурсов.

Пропорциональные издержки предприятия записываются в виде

$$TC = \sum_{s=1}^{n} H_s \cdot Q_s + TFC . \tag{2}$$

Здесь H_s – стоимости затрат на единичные объемы ресурсов, TFC – постоянные затраты предприятия.

Формула прибыли предприятия имеет вид

$$PR = P \cdot \prod_{s=1}^{n} Q_s^{a_s} - \sum_{s=1}^{n} H_s \cdot Q_s - TFC . \tag{3}$$

Для вычисления максимальной прибыли предприятия необходимо приравнять к нулю все частные производные функции прибыли (3):

$$\frac{\partial PR}{\partial Q_i} = P \cdot a_i \cdot Q_i^{a_i - 1} \cdot \prod_{s=1}^{n} Q_s^{a_s} - H_i = 0 ,$$

и составить систему уравнений

$$\frac{H_i \cdot Q_i}{a_i} = P \cdot \prod_{s=1}^{n} Q_s^{a_s} . \tag{4}$$

Решениями системы уравнений (4) являются значения ресурсов Q_i^M

$$Q_i^M = \frac{a_i}{H_i} \cdot \left(P \cdot \prod_{s=1}^{n} \left(\frac{a_s}{H_s} \right)^{a_s} \right)^{\frac{1}{1 - \sum_{p=1}^{n} a_p}} , \tag{5}$$

соответствующих максимальному значению прибыли PR^M :

$$PR^M = P \cdot \prod_{s=1}^{n} \left(Q_s^M\right)^{a_s} - \sum_{s=1}^{n} H_s \cdot Q_s^M - TFC \cdot \tag{6}$$

Предельные значения ресурсов Q_i^R, при которых прибыль предприятия обращается в нуль, находятся из уравнения

$$PR\left(Q_1^R, Q_2^R, \ldots, Q_n^R\right) = P \cdot \prod_{s=1}^{n} \left(Q_s^R\right)^{a_s} - \sum_{s=1}^{n} H_s \cdot Q_s^R - TFC = 0 \cdot \tag{7}$$

Стохастический характер динамики развития производственного предприятия определяется объемами внутренних инвестиций и объемами амортизаций (износа) ресурсов, которые описываются случайными функциями времени. Поэтому приращение объемов ресурсов $\Delta Q_i = Q_i\left(t + \Delta t\right) - Q_i\left(t\right)$ за некоторый малый промежуток времени Δt можно выразить суммой трех компонентов:

$$\Delta Q_i\left(t\right) = \Delta Q_i^A\left(t\right) + \Delta Q_i^I\left(t\right) + \Delta Q_i^W\left(t\right). \tag{8}$$

Здесь $\Delta Q_i^A\left(t\right)$ – частичные амортизационные утраты ресурсов $Q_i\left(t\right)$ за время Δt, $\Delta Q_i^I\left(t\right)$ – частичные восстановления ресурсов $Q_i\left(t\right)$ за время Δt за счет внутренних инвестиций предприятия, $\Delta Q_i^W\left(t\right)$ – случайные колебания объемов ресурсов предприятия.

Для пропорциональной амортизации величины $\Delta Q_i^A\left(t\right)$ записываются в виде

$$\Delta Q_i^A\left(t\right) = -\omega\left(t\right) \cdot A_i \cdot Q_i\left(t\right) \cdot \Delta t\,. \tag{9}$$

Здесь A_i – коэффициенты амортизации, выражающие доли утраченных объемов ресурсов $Q_i\left(t\right)$ за единицу времени.

Величины $\Delta Q_i^I\left(t\right)$, выражающие частичные восстановления ресурсов $Q_i\left(t\right)$ за промежуток времени Δt за счет внутренних инвестиций предприятия, имеют вид

$$\Delta Q_i^I\left(t\right) = \omega\left(t\right) \cdot I_i\left(t\right) \cdot \Delta t\,. \tag{10}$$

Здесь $I_i\left(t\right) = B_i \cdot V\left(t\right)$ – внутренние инвестиции, восстанавливающие ресурсы; B_i – нормы инвестиций, доли выручки, инвестируемые в ресурсы $Q_i\left(t\right)$. Функция времени

$$\omega\left(t\right) = 1 + \frac{T-1}{T} \cdot t$$

описывает пропорциональный рост нормы инвестиций и амортизаций ресурсов на всем рассматриваемом интервале времени $0 \le t \le T$.

Имманентная волатильность объемов внутренних инвестиций является причиной случайных колебаний величины $\Delta Q_i^W\left(t\right)$, которые могут быть представлены в виде стохастических стандартных винеровских процессов [36]:

$$\Delta Q_i^W(t) = \rho \cdot \left(Q_i(t) - Q_i^N\right) \cdot \left(1 - \frac{Q_i(t)}{Q_i^F}\right) \cdot \Delta w. \tag{11}$$

Здесь w – стандартный винеровский процесс, $\Delta w = \varepsilon(t) \cdot \sqrt{\Delta t}$, ρ – показатель волатильности факторов производства Q_i, ε – случайная величина с нормальным законом распределения, нулевым средним значением $\langle \varepsilon \rangle = 0$ и единичной дисперсией $\langle \varepsilon^2 \rangle = 1$.

Их формулы (11) следует, что в окрестности начальной точки $\left(Q_1^N, Q_2^N, \ldots, Q_n^N\right)$ пространства R^n и в окрестности предельной точки $\left(Q_1^F, Q_2^F, \ldots, Q_n^F\right)$ пространства R^n поведение функций $Q_i(t)$ становится практически детерминированным.

Подставляя формулы (1), (9)–(11) в уравнения баланса (8), находим

$$\Delta Q_i = \omega(t) \cdot \left(-A_i \cdot Q_i + B_i \cdot P \cdot \prod_{s=1}^{n} Q_s^{a_s}\right) \cdot \Delta t + \rho \cdot \left(Q_i - Q_i^N\right) \cdot \left(1 - \frac{Q_i}{Q_i^F}\right) \cdot \Delta w. \tag{12}$$

Предельный переход в соотношениях (12) при $\Delta t \to 0$ и $\Delta w \to 0$ приводит к системе стохастических дифференциальных уравнений диффузии Ито

$$dQ_i = S_i \cdot dt + Z_i \cdot dw. \tag{13}$$

Здесь

$$S_i = \omega(t) \cdot \left(-A_i \cdot Q_i(t) + B_i \cdot P \cdot \prod_{s=1}^{n} Q_s^{a_s}(t)\right) \tag{14}$$

– коэффициенты сноса системы (13),

$$Z_i = \rho \cdot \left(Q_i(t) - Q_i^N\right) \cdot \left(1 - \frac{Q_i(t)}{Q_i^F}\right) \tag{15}$$

– коэффициенты волатильности системы (13).

Начальные условия для системы уравнений (13) с коэффициентами (14) и (15) имеют вид

$$Q_i\big|_{t=0} = Q_i(0) = Q_i^N. \tag{16}$$

Уравнения (13)–(15) показывают, что увеличения объемов производственных факторов $Q_i(t)$ и соответствующих им объемов выпуска продукции будут продолжаться до тех пор, пока объемы внутренних инвестиций будут превосходить объемы амортизационных отчислений. Рост величин $Q_i(t)$ прекратится, и они достигнут своих предельных значений Q_i^F, когда объемы внутренних инвестиций и амортизационных отчислений совпадут. Поскольку в окрестности предельной точки $\left(Q_1^F, Q_2^F, \ldots, Q_n^F\right)$ пространства R^n случайный процесс становится практически детерминированным, то величины Q_i^F находятся из уравнения

$$B_i \cdot P \cdot \prod_{s=1}^{n} \left(Q_s^F\right)^{a_s} = A_i \cdot Q_i^F . \tag{17}$$

Целью любого производственного предприятия является организация такого режима его работы, при котором прибыль становится максимально возможной. Это достигается только в том случае, если все предельные величины ресурсов Q_i^F будут совпадать со значениями ресурсов Q_i^M, отвечающими максимальной прибыли PR^M.

В этом случае оптимальные коэффициенты нормы внутренних инвестиций B_i^M находятся из соотношения (17)

$$B_i^M = \frac{A_i \cdot Q_i^M}{P \cdot \prod_{s=1}^{n} \left(Q_s^M\right)^{a_s}} . \tag{18}$$

Численное решение системы стохастических дифференциальных уравнений (13) с коэффициентами (14), (15) и начальными условиями (16) строятся на временном отрезке $[0, T]$ разбитом системой точек $(t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n)$ методом последовательных приближений Эйлера – Маруямы в соответствии с алгоритмом [25]:

$$\begin{cases} Q_i^{p+1} = Q_i^p + S_i^p \cdot \Delta t_p + \varepsilon_p \cdot Z_i^p \left(Q_i^p, t_p\right) \cdot \sqrt{\Delta t_p} \, , \\ S_i^p = -A_i \cdot Q_i^p + B_i \cdot P \cdot \prod_{s=1}^{n} \left(Q_s^p\right)^{a_s}, \\ Z_i^p = \rho \cdot \left(Q_i^p - Q_i^N\right) \cdot \left(1 - \frac{Q_i^p}{Q_i^F}\right), \\ \left(p = 0, 1, 2, \ldots, n-1\right) \end{cases} . \tag{19}$$

Здесь $t_0 = 0$, $t_n = T$.

Начиная с начальных значений ресурсов $Q_i^0 = Q_i^N$ на каждом временном интервале с шагом $\Delta t_p = t_{p+1} - t_p$ генерируются случайные числа ε_p и вычисляются следующие значения Q_i^{p+1}. Полученные случайные последовательности $\{t_p\}$ и $\{Q_i^p\}$ на координатной плоскости образуют системы точек $\{t_p, Q_i^p\}$ и соответствующие им стохастические траектории. Повторная реализация алгоритма (19) всякий раз генерирует новые случайные значения величины ε и новые стохастические траектории.

Для вычисления математических ожиданий функций $Q_i(t)$ необходимо статистически усреднить систему уравнений (13) с коэффициентами (14) и (15):

$$\frac{\langle dQ_i \rangle}{dt} = \omega(t) \cdot \left(-A_i \cdot \langle Q_i \rangle + B_i \cdot P \cdot \left\langle \prod_{s=1}^{n} Q_s^{a_s} \right\rangle\right). \tag{20}$$

Рассмотрим важный частный случай $(n=1)$, согласно которому число ресурсов сводится к одному, а выручка предприятия определяется одним фактором производства $Q_i = Q$. В объем этого ресурса включены капитал, трудовые ресурсы, материалы, технологии, инновации и т. д.

Тогда формулы (1)–(3) принимают вид

$$V = P \cdot Q^a , \tag{21}$$

$$TC = H \cdot Q + TFC , \tag{22}$$

$$PR = P \cdot Q^a - H \cdot Q - TFC , \tag{23}$$

Максимальное значение прибыли PR^M и соответствующее ему значение ресурса Q^M находятся из условия

$$\frac{dPR}{dQ} = a \cdot P \cdot Q^{a-1} - H = 0 . \tag{24}$$

Решая уравнение (24), находим значение ресурса Q^M:

$$Q^M = \left(\frac{P \cdot a}{H} \right)^{\frac{1}{1-a}} . \tag{25}$$

Подставляя выражение (25) в формулу для прибыли (23), получаем максимальное значение прибыли:

$$PR^M = P \cdot \left(\frac{P \cdot a}{H} \right)^{\frac{a}{1-a}} - H \cdot \left(\frac{P \cdot a}{H} \right)^{\frac{1}{1-a}} - TFC \tag{26}$$

Уравнение (7) для предельных значений ресурсов, при которых прибыль предприятия обращается в нуль, принимает вид

$$P \cdot \left(Q^R \right)^a - H \cdot Q^R - TFC = 0 . \tag{27}$$

Система стохастических уравнений динамики роста производственных факторов (13) с коэффициентами (14), (15) для однофакторного предприятия принимает вид

$$\begin{cases} dQ = S(Q,t) \cdot dt + Z(Q,t) \cdot dw, \\ S(Q,t) = \omega(t) \cdot \left(-A \cdot Q(t) + B \cdot P \cdot Q(t)^a \right), \\ Z(Q,t) = \rho \cdot \left(Q(t) - Q^N \right) \cdot \left(1 - \dfrac{Q(t)}{Q^F} \right). \end{cases} \tag{28}$$

Начальное условие для системы (28) имеет вид

$$Q\big|_{t=0} = Q(0) = Q^N . \tag{29}$$

Формула (18) для оптимального коэффициента нормы внутренних инвестиций B^M записывается в виде

$$B^M = \frac{A \cdot \left(Q^M\right)^{1-a}}{P}. \tag{30}$$

Алгоритм (19) численного решения стохастического дифференциального уравнения (28) методом итераций Эйлера – Маруямы принимает вид

$$\begin{cases} Q^{p+1} = Q^p + S^p \cdot \Delta t_p + \varepsilon_p \cdot Z^p \cdot \sqrt{\Delta t_p}, \\ S^p = \omega\left(t_p\right) \cdot \left(-A_i \cdot Q^p + B_i \cdot P \cdot \prod_{s=1}^{n} \left(Q^p\right)^{a_s}\right), \\ Z^p = \rho \cdot \left(Q^p - Q^N\right) \cdot \left(1 - \frac{Q^p}{Q^F}\right). \end{cases} \tag{31}$$

При реализации алгоритма (31) получаются случайные системы точек $\left\{t_p, Q^p\right\}$ и соответствующие им стохастические траектории.

Для вычисления математического ожидания функции $Q(t)$ необходимо статистически усреднить систему уравнений (28):

$$\frac{\langle dQ \rangle}{dt} = \omega(t) \cdot \left(-A \cdot \langle Q \rangle + B \cdot P \cdot \left\langle Q^a \right\rangle\right). \tag{32}$$

Точное вычисление статистического момента $\left\langle Q^a \right\rangle$ не представляется возможным, поэтому приближенное значение этого момента вычисляется в предположении, что флуктуации величины $Q(t)$ относительно ее среднего значения пропорциональны случайной величине $\varepsilon(t)$:

$$Q - \langle Q \rangle = \xi \cdot \varepsilon. \tag{33}$$

Здесь

$$\xi = \rho \cdot \left(\langle Q \rangle - Q^N\right) \cdot \left(1 - \frac{\langle Q \rangle}{Q^F}\right) \tag{34}$$

– коэффициент пропорциональности.

Подставляя соотношение (34) в формулу (33), находим

$$Q^a = \left(\langle Q \rangle + \xi \cdot \varepsilon\right)^a = \langle Q \rangle^a \cdot \left(1 + \frac{\xi}{\langle Q \rangle} \cdot \varepsilon\right)^a. \tag{35}$$

В формуле (35) ограничимся тремя слагаемыми в разложении сходящегося биномиального ряда для малых флуктуаций $\left|\frac{\xi}{\langle Q \rangle} \cdot \varepsilon\right| < 1$:

$$Q^a = \langle Q \rangle^a \cdot \left(1 + a \cdot \frac{\xi}{\langle Q \rangle} \cdot \varepsilon + \frac{a \cdot (a-1)}{2} \cdot \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \cdot \varepsilon^2 + \cdots \right). \qquad (36)$$

Усредняя соотношение (36), находим

$$\langle Q^a \rangle = \langle Q \rangle^a \cdot \left(1 + \frac{a \cdot (a-1)}{2} \cdot \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \right). \qquad (37)$$

Подстановка выражения (37) в уравнение (32) приводит к дифференциальному уравнению относительно $\langle Q \rangle$

$$\frac{\langle dQ \rangle}{dt} = \omega(t) \cdot \left(-A \cdot \langle Q \rangle + B \cdot P \cdot \langle Q \rangle^a \cdot \left(1 + \frac{a \cdot (a-1)}{2} \cdot \frac{\xi^2}{\langle Q \rangle^2} \right) \right). \qquad (38)$$

Начальное условие для уравнения (38) имеет вид

$$\langle Q \rangle \big|_{t=0} = Q^N. \qquad (39)$$

Оптимальной организацией деятельности производственного предприятия является такой режим его работы, при котором нормы внутренних инвестиций B^M рассчитывается по формуле (30), функция прибыли стремится к своему максимальному значению PR^M, а функция ресурса $Q(t)$ стремиться к значению Q^M, соответствующему этому максимальному значению прибыли. При выборе любой другой нормы внутренних инвестиций B^F функция прибыли будет стремиться к другому меньшему предельному значению PR^F, соответствующему другому предельному значению ресурса Q^F.

На рисунке показано сравнение графиков стохастических траекторий и математических ожиданий функций объемов прибыли $PR(t)$, построенных по формуле (23), с результатами численной реализации алгоритма (31) и результатами численного решения задачи Коши (38), (39) для коэффициентов нормы инвестиций B^F и B^M.

Расчетные значения: $P=10$; $R=40$; $a=0,25$; $H=0,8$; $TFC=5$; $A=0,12$; $B^F=0,1$; $B^M=0,0376$; $n=100$; $T=12$; $PR^M=5,9651$; $PR^F=1,7580$; $\rho=0,25$.

Графики функций объемов прибыли на рисунке показывают, что коэффициент нормы инвестиций B^F выбран неудачно. После достижения максимального значения прибыль предприятия начинает снижаться.

Следует отметить, что кривые математических ожиданий, построенные по результатам решения задачи Коши (38), (39), и средние значения стохастических траекторий, построенных по результатам двухсот реализаций алгоритма (31), практически совпадают.

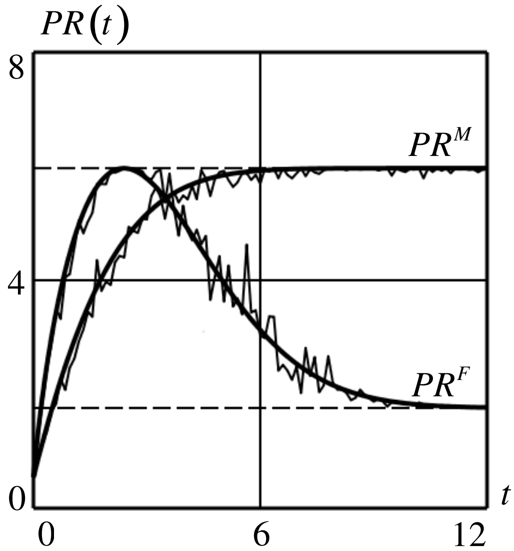

Рисунок – Сравнение графиков стохастических траекторий и математических ожиданий функций объемов прибыли $PR(t)$ построенных по формуле (23), с результатами численной реализации алгоритма (31) и результатами численного решения задачи Коши (38), (39) для коэффициентов нормы инвестиций B^F и B^M

Figure – Comparison of graphs of stochastic trajectories and mathematical expectations of functions of profit $PR(t)$ volumes constructed according to formula (23), the results of the numerical implementation of algorithm (31), and the results of the numerical solution of the Cauchy problem (38), (39) for the investment rate coefficients B^F and B^M

Заключение

1. Разработана новая стохастическая модель динамики развития предприятий, восстановление производственных ресурсов которых обеспечивается за счет внутренних инвестиций.

2. Для прогнозирования объемов производственных издержек, амортизационных отчислений, выручки и прибыли установлены системы стохастических дифференциальных уравнений.

3. Показано, что эффективность динамики развития предприятия зависит от выбора значений коэффициентов норм инвестиций. При неудачном выборе этих коэффициентов производственные мощности предприятий не способны выйти на режим работы с максимальной прибылью.

5. Получена система уравнений для вычисления эффективных коэффициентов норм инвестиций, при которых предприятия гарантированно выходят на режим работы с максимальной прибылью.

Библиографический список

1. Harrod R.F. The Trade Cycle. Oxford: Clarendon Press, 1936. 234 p. URL: https://archive.org/details/tradecycle0000unse/mode/2up.

2. Domar E.D. Capital Expansion, Rate of Growth, and Employment // Econometrica. April 1946, Vol. 14, no. 2. P. 137–147. DOI: https://doi.org/10.2307/1905364.

3. Solow R.M. A Contribution to the Theory of Economic Growth // Quarterly Journal of Economics. February 1956. Vol. 70, issue 1. P. 65–94. DOI: https://doi.org/10.2307/1884513.

4. Swan T.W. Economic Growth and Capital Accumulation // Economic Record. November 1956. Vol. 32. Issue 2. P. 334–361. URL: https://econpapers.repec.org/scripts/redir.pf?u=http %3A %2F %2Fhdl.handle.net % 2F10.1111 %2Fj.1475-4932.1956.tb00434.x;h=repec:bla:ecorec:v:32:y:1956:i:2:p:334-361.

5. Kuznets S. Long Swings in the Growth of Population and in Related Economic Variables // Proceedings of the American Philosophical Society. February 1958. Vol. 102, no. 1. P. 25–52. URL: https://www.jstor.org/stable/985303.

6. Kuznets S. Quantitative Aspects of the Economic Growth of Nations. Paper VIII: Distribution of Income by Size // Economic Development and Cultural Change. 1963. Vol. 11. No 2. Part 2. P. 1–80. DOI: https://doi.org/10.1086/450006.

7. Uzawa H. Optimum Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth // International Economic Review. 1965. Vol. 6, no. 1. P. 18–31. URL: http://links.jstor.org/sici?sici=0020-6598 %28196501 % 296 %3A1 %3C18 %3AOTCIAA %3E2.0.CO %3B2-Y.

8. Arrow K.J. The Economic Implications of Learning by Doing // The Review of Economic Studies. 1962. Vol. 29. Issue 3. P. 155–173. URL: https://econpapers.repec.org/scripts/redir.pf?u=http %3A %2F %2Fhdl.handle.net %2F10.2307 %2F2295952;h=repec:oup:restud:v:29:y:1962:i:3:p:155-173.

9. Denison E.F. The Contribution of Capital to Economic Growth // Financing Industrial Investment. London: Palgrave Macmillan, pp. 39–87. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-349-04021-6_3.

10. Romer P.M. Increasing Returns and Long-run Growth // Journal of Political Economy. October 1986, Vol. 94, number 5. P. 1002–1037. DOI: https://doi.org/10.1086/261420.

11. Lucas R.E. On the Mechanics of Economic Development // Journal of Monetary Economics. July 1988, Vol. 22, no. 1. P. 3–42. DOI: https://doi.org/10.1016/0304-3932 %2888 %2990168-7.

12. Romer P.M. Endogenous Technological Change // Journal of Political Economy. October 1990, Vol. 98. Number 5. Part 2. P. 71–102. DOI: https://doi.org/10.1086/261725.

13. Grossman G.M., Helpman E. Innovation and Growth in the Global Economy. Cambridge, MA: MIT Press. 1991. 376 p. URL: https://books.google.ru/books?id=4ikgmM2vLJ0C&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false.

14. Mankiw N., Romer D., Weil D. A Contribution to the Empirics of Economic Growth // Quarterly Journal of Economics. May 1992. Vol. 107, no. 2. P. 407–437. URL: http://links.jstor.org/sici?sici=0033-5533 %28199205 %29107 %3A2 %3C407 %3AACTTEO %3E2.0.CO %3B2-5.

15. Grossman G.M., Helpman E. Endogenous Innovation in the Theory of Growth // Journal of Economic Perspectives. 1994. Vol. 8, no. 1. P. 23–44. DOI: http://dx.doi.org/10.1257/jep.8.1.23.

16. Barro R.J., Sala-i-Martin X. Economic Growth. 2nd edition. Cambridge MA: MIT Press, 1995. 672 p. URL: http://piketty.pse.ens.fr/files/BarroSalaIMartin2004.pdf.

17. Bruno M., Easterly W. Inflation Crises and Long-Run Growth: NBER Working Papers 5209. National Bureau of Economic Research, Inc, 1995. URL: https://www.nber.org/papers/w5209 (дата обращения: 06.03.2012).

18. Gong G., Greiner A., Semmler W. The Uzawa – Lucas model without scale effects: theory and empirical evidence // Structural Change and Economic Dynamics. 2004. Vol. 15, issue 4. P. 401–420. DOI: https://doi.org/10.1016/j.strueco.2003.10.002.

19. Нижегородцев Р.М. Модели логистической динамики как инструмент экономического анализа и прогнозирования // Моделирование экономической динамики: риск, оптимизация, прогнозирование. Москва, 1997. С. 34–51.

20. Бадаш Х.З. Экономико-математическая модель экономического роста предприятия // Вестник Удмуртского университета. Серия Экономика и право. 2009. № 1. С. 5–9. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=11700881. EDN: https://elibrary.ru/jwbhyv.

21. Королев А.В., Матвеенко В.Д. О структуре равновесных нестационарных траекторий в модели эндогенного роста Лукаса // Автоматика и телемеханика. 2006. № 4. С. 126–136. URL: https://www.mathnet.ru/rus/at1170.

22. Кузнецов Ю.А., Мичасова О.В. Сравнительный анализ применения пакетов имитационного моделирования и систем компьютерной математики для анализа моделей теории экономического роста // Экономический анализ: теория и практика. 2007. № 5 (86). С. 23–30. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=9337066. EDN: https://elibrary.ru/hwikhf.

23. Кузнецов Ю.А. Обобщенная модель экономического роста с учетом накопления человеческого капитала // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2012. № 4. С. 46–57. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=18079557. EDN: https://elibrary.ru/pfqnbt.

24. Прасолов А.В. Математические методы экономической динамики. Санкт-Петербург: Лань, 2015. 352 с. URL: https://klex.ru/uzv.

25. Ильина Е.А., Сараев Л.А. К теории производственных функций, учитывающей изменение эластичностей выпуска по производственным ресурсам // Экономика и предпринимательство. 2018. № 10 (99). С. 145–150. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=35654399. EDN: https://elibrary.ru/sadnef.

26. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Показатели нелинейной динамики и предельное состояние производственного предприятия // Экономика и предпринимательство. 2018. № 11 (100). С. 1237–1241. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=36512728. EDN: https://elibrary.ru/ypfjhn.

27. Сараев А.Л. Уравнения динамики нестабильных многофакторных экономических систем, учитывающих эффект запаздывания внутренних инвестиций // Казанский экономический вестник. 2015. № 3 (17). С. 68–73. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=24899060. EDN: https://elibrary.ru/uywnhn.

28. Ильина Е.А., Сараев А.Л., Сараев Л.А. К теории модернизации производственных предприятий, учитывающей запаздывание внутренних инвестиций // Экономика и предпринимательство, 2017. № 9–4 (86). С. 1130–1134. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=30782945. EDN: https://elibrary.ru/zxqfaf.

29. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Экономико-математическая модель развития производственных предприятий, учитывающая эффект запаздывания внутренних инвестиций // Экономика и предпринимательство. 2019. № 5 (106). С. 1316–1320. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=39238012. EDN: https://elibrary.ru/aigtur.

30. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Многофакторная математическая модель развития производственного предприятия за счет внутренних и внешних инвестиций // Вестник Самарского университета. Экономика и управление. 2020. Т. 11, № 2. С. 157–165. DOI: https://doi.org/10.18287/2542-0461-2020-11-2-157-165. EDN: https://elibrary.ru/wdbmkv.

31. Ilyina E.A., Saraev L.A. Predicting the dynamics of the maximum and optimal profits of innovative enterprises // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1784. P. 012002. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1784/1/012002. EDN: https://www.elibrary.ru/xwxltx.

32. Saraev A.L., Saraev L.A. Mathematical models of the development of industrial enterprises, with the effect of lagging internal and external investments // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1784, P. 012010. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1784/1/012010. EDN: https://www.elibrary.ru/qvnrzq.

33. Ито К., Маккин Г. Диффузионные процессы и их траектории. Москва: Мир, 1968. 329 с. URL: https://reallib.org/reader?file=507133&ysclid=lnlbqh7jsw514150694.

34. Allen E. Modeling with Itô Stochastic Differential Equations. Springer: Mathematical Modelling: Theory and Applications, 2007. Vol. 22. 230 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5953-7.

35. Кузнецов Д.С. Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. Санкт-Петербург: Издательство Политехнический университет, 2009. 800 с. DOI: https://doi.org/10.18720/SPBPU/2/z17-4.

36. Соловьев В.И. Экономико-математическое моделирование рынка программного обеспечения. Москва: ГУУ ВЕГА-ИНФО, 2009. 176 с. URL: https://mpra.ub.uni-muenchen.de/28974/1/MMPO.pdf; https://www.elibrary.ru/item.asp?id=19911710. EDN: https://www.elibrary.ru/qtsxxz.

37. Кузнецова И.Ю. Численное решение стохастического дифференциального уравнения методом Эйлера – Маруямы // Международный исследовательский журнал. 2013. № 11–1 (18), С. 8–11. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21041543. EDN: https://www.elibrary.ru/rsltld.

38. Ильина Е.А., Парфенова А.Ю., Сараев Л.А. Влияние изменения общего объема рынка на кинетику процесса диффузии инноваций // Вестник Алтайской академии экономики и права. 2019. № 12–1. С. 61–67. DOI: https://doi.org/10.17513/vaael.848. EDN: https://www.elibrary.ru/kfhwfz.

39. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Математические модели стохастической динамики развития предприятий // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2020. Т. 24, № 2. С. 343–364. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1700. EDN: https://www.elibrary.ru/mltmba.

References

1. Harrod R.F. The Trade Cycle. Oxford: Clarendon Press, 1936, 234 p. Available at: https://archive.org/details/tradecycle0000unse/mode/2up.

2. Domar E.D. Capital Expansion, Rate of Growth, and Employment. *Econometrica*, April 1946, vol. 14, no. 2, pp. 137–147. DOI: https://doi.org/10.2307/1905364.

3. Solow R.M. A Contribution to the Theory of Economic Growth. *Quarterly Journal of Economics*, February 1956, vol. 70, issue 1, pp. 65–94. DOI: https://doi.org/10.2307/1884513.

4. Swan T.W. Economic Growth and Capital Accumulation // Economic Record. November 1956, vol. 32, issue 2, pp. 334–361. Available at: https://econpapers.repec.org/scripts/redir.pf?u=http %3A %2F %2Fhdl.handle.net % 2F10.1111 %2Fj.1475-4932.1956.tb00434.x;h=repec:bla:ecorec:v:32:y:1956:i:2:p:334-361.

5. Kuznets S. Long Swings in the Growth of Population and in Related Economic Variables. *Proceedings of the American Philosophical Society*, 1958, vol. 102, no. 1, pp. 25–52. Available at: https://www.jstor.org/stable/985303.

6. Kuznets S. Quantitative Aspects of the Economic Growth of Nations. Paper VIII: Distribution of Income by Size. *Economic Development and Cultural Change*, 1963, vol. 11, no 2, Part 2, pp. 1–80. DOI: https://doi.org/10.1086/450006.

7. Uzawa H. Optimum Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth. *International Economic Review*, 1965, vol. 6, no. 1, pp. 18–31. Available at: http://links.jstor.org/sici?sici=0020-6598 %28196501 %296 % 3A1 %3C18 %3AOTCIAA %3E2.0.CO %3B2-Y.

8. Arrow K.J. The Economic Implications of Learning by Doing. *Review of Economic Studies*, 1962, vol. 29, issue 3, pp. 155–173. Available at: https://econpapers.repec.org/scripts/redir.pf?u=http %3A %2F %2Fhdl.handle.net % 2F10.2307 %2F2295952;h=repec:oup:restud:v:29:y:1962:i:3:p:155-173.

9. Denison E.F. The Contribution of Capital to Economic Growth. In: *Financing Industrial Investment*. London: Palgrave Macmillan, pp. 39–87. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-349-04021-6_3.

10. Romer P.M. Increasing Returns and Long-run Growth. *Journal of Political Economy*, October 1986, vol. 94, number 5, pp. 1002–1037. DOI: https://doi.org/10.1086/261420.

11. Lucas R.E. On the Mechanics of Economic Development. *Journal of Monetary Economics*, July 1988, vol. 22, no. 1, pp. 3–42. DOI: https://doi.org/10.1016/0304-3932 %2888 %2990168-7.

12. Romer P.M. Endogenous Technological Change // Journal of Political Economy, October 1990, vol. 98, number 5, Part 2, pp. 71–102. DOI: https://doi.org/10.1086/261725.

13. Grossman G.M., Helpman E. Innovation and Growth in the Global Economy. Cambridge, MA: MIT Press. 1991, 376 p. Available at: https://books.google.ru/books?id=4ikgmM2vLJ0C&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false.

14. Mankiw N., Romer D., Weil D. A Contribution to the Empirics of Economic Growth. *Quarterly Journal of Economics*, May 1992, vol. 107, no. 2, pp. 407–437. Available at: http://links.jstor.org/sici?sici=0033-5533 %28199205 %29107 %3A2 %3C407 %3AACTTEO %3E2.0.CO %3B2-5.

15. Grossman G.M., Helpman E. Endogenous Innovation in the Theory of Growth. *Journal of Economic Perspectives*, 1994, vol. 8, issue 1, pp. 23–44. DOI: http://dx.doi.org/10.1257/jep.8.1.23.

16. Barro R.J., Sala-i-Martin X. Economic Growth. 2nd edition. Cambridge, MA: MIT Press, 1995, 672 p. Available at: http://piketty.pse.ens.fr/files/BarroSalaIMartin2004.pdf.

17. Bruno M., Easterly W. Inflation Crises and Long-Run Growth: NBER Working Papers 5209. [Electronic resource]. National Bureau of Economic Research, Inc, 1995. Available at: https://www.nber.org/papers/w5209 (accessed 06.03.2012).

18. Gong G., Greiner A., Semmler W. The Uzawa – Lucas model without scale effects: theory and empirical evidence. *Structural Change and Economic Dynamics*, 2004, vol. 15, issue 4, pp. 401–420. DOI: https://doi.org/10.1016/j.strueco.2003.10.002.

19. Nizhegorodtsev R.M. Models of logistics dynamics as a tool for economic analysis and forecasting. In: *Modeling of economic dynamics: risk, optimization, forecasting*. Moscow, 1997, pp. 34–51. (In Russ.)

20. Badash Kh.Z. The economic-mathematical model of the economic growth of enterprises. *Bulletin of Udmurt University. Series Economics and Law*, 2009, no. 1, pp. 5–9. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=11700881. EDN: https://elibrary.ru/jwbhyv. (In Russ.)

21. Korolev A.V., Matveenko V.D. Structure of equilibrium time-varying trajectories in the Lucas endogenous growth model. *Automation and Remote Control*, 2006, vol. 67, issue 4, pp. 624–633. DOI: https://doi.org/10.1134/S0005117906040102. (In English; original in Russian).

22. Kuznetsov Yu.A., Michasova O.V. Comparative analysis of the application of simulation packages and computer mathematics systems for the analysis of models of the theory of economic growth. *Economic Analysis: Theory and Practice*, 2007, no. 5 (86), pp. 23–30. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=9337066. EDN: https://elibrary.ru/hwikhf. (In Russ.)

23. Kuznetsov Yu.A., Michasova O.V. The generalized model of economic growth with human capital accumulation. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2012, no. 4, pp. 46–57. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=18079557. EDN: https://elibrary.ru/pfqnbt. (In Russ.)

24. Prasolov A.V. Mathematical methods of economic dynamics. Saint Petersburg: Lan', 2015, 352 p. Available at: https://klex.ru/uzv. (In Russian).

25. Ilyina E.A., Saraev L.A. To the theory of production functions, which takes into account the change in the elasticities of output by production resources. *Journal of Economy and entrepreneurship*, 2018, no. 10 (99), pp. 145–150. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=35654399. EDN: https://elibrary.ru/sadnef. (In Russ.)

26. Saraev A.L., Saraev L.A. Indicators of nonlinear dynamics and the limiting condition of a manufacturing enterprise. *Journal of Economy and entrepreneurship*, 2018, no. 11 (100), pp. 1237–1241. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=36512728. EDN: https://elibrary.ru/ypfjhn. (In Russ.)

27. Saraev A.L. Equations of dynamics of unstable multifactor economic systems taking into account retardation effects of internal investment. *Kazan economic vestnik*, 2015, no. 3 (17), pp. 68–73. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=24899060. EDN: https://elibrary.ru/uywnhn. (In Russ.)

28. Ilyina E.A., Saraev A.L., Saraev L.A. To the theory of modernization of manufacturing enterprises, taking into account the lag of internal investment. *Journal of Economy and entrepreneurship*, 2017, no. 9–4 (86), pp. 1130–1134. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=30782945. EDN: https://elibrary.ru/zxqfaf. (In Russ.)

29. Saraev A.L., Saraev L.A. Economic-mathematical model for the development of manufacturing enterprises, taking into account the effect of the lag of domestic investment. *Journal of Economy and entrepreneurship*, 2019, no. 5 (106), pp. 1316–1320. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=39238012. EDN: https://elibrary.ru/aigtur. (In Russ.)

30. Saraev A.L., Saraev L.A. Multi-factor mathematical model of development of a production enterprise accounted by internal and external investments. *Vestnik Samarskogo universiteta. Ekonomika i upravlenie Vestnik of Samara University. Economics and Management,* 2020, vol. 11, no. 2, pp. 157–165. DOI: https://doi.org/10.18287/2542-0461-2020-11-2-157-165. EDN: https://elibrary.ru/wdbmkv. (In Russ.)

31. Ilyina E.A., Saraev L.A. Predicting the dynamics of the maximum and optimal profits of innovative enterprises. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 1784, p. 012002. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1784/1/012002. EDN: https://www.elibrary.ru/xwxltx.

32. Saraev A.L., Saraev L.A. Mathematical models of the development of industrial enterprises, with the effect of lagging internal and external investments. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 1784, p. 012010. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1784/1/012010. EDN: https://www.elibrary.ru/qvnrzq.

33. Ito K., McKean H.P., Jr.. Diffusion processes and their sample paths. Moscow: Mir, 1986, 329 p. Available at: https://reallib.org/reader?file=507133&ysclid=lnlbqh7jsw514150694. (In Russ.)

34. Allen E. Modeling with Ito Stochastic Differential Equations. Springer: Mathematical Modelling: Theory and Applications, 2007, vol. 22, 230 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5953-7.

35. Kuznetsov D.S. Stochastic differential equations: theory and practice of numerical solution. Saint Petersburg: Izdatel'stvo Politekhnicheskii universitet, 2009, 800 p. DOI: https://doi.org/10.18720/SPBPU/2/z17-4. (In Russ.)

36. Solovyev V.I. Economic and mathematical modeling of software market. Moscow: GUU VEGA-INFO, 2009, 176 p. Available at: https://mpra.ub.uni-muenchen.de/28974/1/MMPO.pdf; https://www.elibrary.ru/item.asp?id=19911710. EDN: https://www.elibrary.ru/qtsxxz. (In Russ.)

37. Kuznetzova I.Y. Numerical solution of stochastic differential equation by Euler- Maruyama method. *International Research Journal*, 2013, № 11–1 (18), pp. 8–11. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21041543. EDN: https://www.elibrary.ru/rsltld. (In Russ.)

38. Ilyina E.A., Parphenova A.Yu., Saraev L.A. Influence of changes to the total volume of the market on the kinetics of the process of diffusion of innovations. *Vestnik Altaiskoi akademii ekonomiki i prava*, 2019, no. 12–1, pp. 61–67. DOI: https://doi.org/10.17513/vaael.848. EDN: https://www.elibrary.ru/kfhwfz. (In Russ.)

39. Saraev A.L., Saraev L.A. Stochastic calculation of curves dynamics of enterprise. *Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2020, vol. 24, no 2, pp. 343–364. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1700. EDN: https://www.elibrary.ru/mltmba. (In Russ.)