DOI: 10.18287/2542-0461-2023-14-2-197-213

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

УДК 330.42

Дата поступления: 23.01.2023
рецензирования: 02.03.2023
принятия: 30.05.2023

Стохастические модели динамики максимальной и оптимальной прибыли производственного предприятия, внедряющего технологические инновации

Е.А. Ильина
Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,
г. Самара, Российская Федерация
E-mail: elenaalex.ilyina@yandex.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2590-6138
Л.А. Сараев
Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,
г. Самара, Российская Федерация
E-mail: saraev_leo@mail.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3625-5921

Аннотация: В публикуемой статье представлены новые стохастические модели, описывающие динамику формирования, прибыли производственных предприятий, использующих инновационные технологии. Исследована зависимость прибыли предприятия не только от уровня производственных (трансформационных) издержек, но и от уровня непроизводственных (транзакционных) издержек, возникающих в результате поиска и обработки экономической информации, финансирования процедур проведения переговоров, заключения контрактов с партнерами, защиты прав собственности и оплаты оппортунистического поведения сотрудников и руководства предприятия. Установлено, что для отыскания оптимальных значений прибыли необходимо максимизировать не только функцию прибыли, но и целевую транзакционную функцию полезности, перераспределяющую прибыль предприятия, как в интересах руководства, так и для реализации социально ориентированных программ. Показано, что наличие транзакционных издержек делает недостижимым получение предприятием максимально возможного значения прибыли, вместо которого приходится ограничиваться его меньшим оптимальным значением. Для показателей инновационных преобразований производства предприятия, влияющих на увеличение выпуска продукции и снижение издержек, установлены стохастические дифференциальные уравнения, случайные решения которых описывают стохастический диффузионный процесс внедрения технологических инноваций. Алгоритмы численного решения стохастических дифференциальных уравнений модели построены методом Эйлера – Маруямы, в соответствии с которым каждая их реализация представляет собой стохастические траектории случайных функций показателей динамики развития производственных предприятий. Для математических ожиданий рассматриваемых случайных функций получены соответствующие дифференциальные уравнения. Численный анализ разработанной модели показал, что учет в стохастической модели внешнего случайного возмущающего фактора приводит к существенным отклонениям от детерминированной модели динамики формирования прибыли производственных предприятий.

Ключевые слова: винеровский процесс; инновации; коэффициент волатильности; коэффициент сноса; предприятие; прибыль; производственная функция; ресурсы; стохастические уравнения; транзакционная функция полезности; транзакционные издержки; трансформационные издержки; факторы производства.
Цитирование. Ильина Е.А., Сараев Л.А. Стохастические модели динамики максимальной и оптимальной прибыли производственного предприятия, внедряющего технологические инновации // Вестник Самарского университета. Экономика и управление. 2023. Т. 14, № 2. С. 197–213. DOI: http://doi.org/10.18287/2542-0461-2023-14-2-197-213.
Информация о конфликте интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Елена Алексеевна Ильина – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и бизнес-информатики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Леонид Александрович Сараев – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и бизнес-информатики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

SCIENTIFIC ARTICLE

Submitted: 23.01.2023
Revised: 02.03.2023
Accepted: 30.05.2023

Stochastic models of the dynamics of the maximum and optimal profit of a manufacturing enterprise introducing technological innovations

E.I. Ilyina
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: elenaalex.ilyina@yandex.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2590-6138
L.A. Saraev
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: saraev_leo@mail.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3625-5921

Abstract: The published article presents new stochastic models that describe the dynamics of profit formation in manufacturing enterprises using innovative technologies. The dependence of the enterprise's profit not only on the level of production (transformation) costs, but also on the level of non-production (transactional) costs resulting from the search and processing of economic information, financing of negotiation procedures, conclusion of contracts with partners, protection of property rights and payment for opportunistic behavior has been studied. employees and management of the company. It has been established that in order to find the optimal values of profit, it is necessary to maximize not only the profit function, but also the target transactional utility function that redistributes the profit of the enterprise, both in the interests of management and for the implementation of socially oriented programs. It is shown that the presence of transaction costs makes it unattainable for an enterprise to obtain the maximum possible value of profit, instead of which it is necessary to limit itself to its lower optimal value. For indicators of innovative transformations in the production of an enterprise that affect the increase in output and reduce costs, stochastic differential equations are established, random solutions of which describe the stochastic diffusion process of introducing technological innovations. Algorithms for the numerical solution of the stochastic differential equations of the model are constructed using the Euler–Maruyama method, according to which each of their implementations is a stochastic trajectory of random functions of indicators of the dynamics of the development of manufacturing enterprises. For the mathematical expectations of the considered random functions, the corresponding differential equations are obtained. Numerical analysis of the developed model showed that taking into account the external random perturbing factor in the stochastic model leads to significant deviations from the deterministic model of the profit formation dynamics of manufacturing enterprises.
Key words: wiener process; innovation; volatility coefficient; drift coefficient; enterprise; profit; production function; resources; stochastic equations; transaction utility function; transaction costs; transformation costs; factors of production.
Citation. Ilyina E.A., Saraev L.A. Stochastic models of the dynamics of the maximum and optimal profit of a manufacturing enterprise introducing technological innovations. *Vestnik Samarskogo universiteta. Ekonomika i upravlenie = Vestnik of Samara University. Economics and Management*, 2023, vol. 14, no. 2, pp. 197–213. DOI: http://doi.org/10.18287/2542-0461-2022-14-2-197-213. (In Russ.)
Information on the conflict of interest: authors declare no conflict of interest.

Elena A. Ilyina – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Mathematics and Business Informatics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.
Leonid A. Saraev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, head of the Department of Mathematics and Business Informatics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Введение

Предприятие не только производит продукцию, но и взаимодействует с социальной сферой, тратит деньги на поиск информации, переговоры, защиту прав и т. д. Это называется непроизводственной деятельностью и включает в себя транзакции, которые порождают непроизводственные транзакционные издержки. Руководство может направлять часть прибыли на социальные программы, такие как повышение квалификации сотрудников, экологию, благотворительность и т. д. Эти программы могут улучшить качество продукции, увеличить объемы продаж, привлечь инвестиции и способствовать развитию инноваций [1–9].

Основная цель предприятия – получение наибольшей прибыли, и для ее расчета обычно используется максимум функции прибыли. Однако при учете транзакционных издержек задача становится более сложной, и предприятие должно максимизировать не только функцию прибыли, но и транзакционную функцию полезности менеджмента, которая учитывает отток части прибыли на непроизводственные нужды и оппортунистические интересы руководства. Транзакционные издержки могут препятствовать предприятию в достижении максимальной прибыли, и ему приходится ограничиваться оптимальным значением [10–13].

Если предприятие модернизируется с помощью инновационных технологий, параметры производственной функции, функции общих издержек и прибыли изменяются во времени. В результате таких инновационных процессов максимальная прибыль предприятия может представляться функцией времени. Управляя параметрами внедрения инновационных технологий, становится возможным прогнозировать максимальную прибыль предприятия в нужные моменты времени [14–21].

Достаточно широкий набор известных статистических данных, описывающих динамику развития модернизируемых предприятий, демонстрируют ее стохастический характер. Поэтому для построения математических моделей динамического поведения производственных предприятий следует опираться на теорию случайных функций. Стохастическое моделирование позволяет наиболее полно учесть волатильность экономических показателей работы предприятия и внести существенные дополнения в имеющиеся аналогичные детерминистские модели.

Эффективным инструментом для построения недетерминированных моделей динамики развития предприятий является теория стохастических дифференциальных уравнений, учитывающая влияние случайных внешних воздействий. Построение на основе этой теории определяющих уравнений динамики выручки, издержек и прибыли предприятия существенно обогащает соответствующие известные детерминированные модели, в которых нельзя учесть внешние случайные возмущающие факторы. Методы исследования приложений теории стохастических дифференциальных уравнений для моделирования случайных процессов подробно изложены в работах [22–28].

Целью публикуемой работы является обобщение результатов экономико-математической модели динамики формирования прибыли производственных предприятий, полученных в работе [29], на случай стохастического характера внедрения в производство технологических инноваций.

Таким образом, создание математических моделей, учитывающих уровень транзакционных издержек, становится важным для расчета экономических показателей работы предприятия.

Постановка задачи

Объемы производственных ресурсов многофакторного производственного предприятия $\left(Q_1, Q_2, \ldots, Q_m, S_1, S_2, \ldots, S_n\right)$ можно разделить на две группы. Величины Q_i – представляют собой основные, материальные, финансовые и трудовые ресурсы, а величины S_j – представляют собой ресурсы, обеспечивающие непроизводственную и социальную деятельность предприятия. При этом, ресурсы Q_i формируют только производственные издержки, а ресурсы S_j формируют как производственные, так и транзакционные издержки [29].

Процесс внедрения технологических инноваций в производство рассматриваемого предприятия происходит на некотором временном интервале, поэтому все объемы ресурсов зависят от времени t.

Производственная мультипликативная функция Кобба – Дугласа, пропорциональные издержки и прибыль предприятия задаются формулами [29]:

$$V(t) = P(t) \cdot \prod_{i=1}^{m} Q_i(t)^{a_i(t)} \cdot \prod_{j=1}^{n} S_j(t)^{c_j(t)}, \tag{1}$$

$$TC(t)=\sum_{i=1}^{m} A_Q^i(t)\cdot Q_i(t)+\sum_{j=1}^{n} A_S^j(t)\cdot S_j(t)+TFC\ , \tag{2}$$

$$PR(t)=P(t)\cdot\prod_{i=1}^{m} Q_i(t)^{a_i(t)}\cdot\prod_{j=1}^{n} S_j(t)^{c_j(t)}-$$
$$-\sum_{i=1}^{m} A_Q^i(t)\cdot Q_i(t)-\sum_{j=1}^{n} A_S^j(t)\cdot S_j(t)-TFC. \tag{3}$$

Здесь $a_i(t), c_j(t)$ – эластичности выпуска по соответствующим ресурсам $\left(0<a_i(t)<1, 0<c_j(t)<1\right)$; $P(t)$ – стоимость продукции произведенной на единичные объемы ресурсов; $A_Q^i(t), A_S^j(t)$ – стоимости затрат на единичные объемы ресурсов, TFC – постоянные затраты предприятия.

Максимальное значение функции прибыли (3) соответствует наибольшему доходу рассматриваемого предприятия. Перераспределение прибыли предприятия, учитывающее отток ее части на непроизводственные нужды и оппортунистические интересы руководства, обеспечивается целевой транзакционной функцией полезности, которая зависит от прибыли $PR(t)$ и ресурсов $S_j(t)$ и принимается здесь линейной:

$$\Omega(t)=PR(t)+\prod_{j=1}^{n} q_j(t)\cdot S_j(t)\ . \tag{4}$$

Здесь $q_j(t)$ – коэффициенты функции полезности (4). Следует отметить, что все коэффициенты функции полезности (6) неотрицательны $\left(\forall i: q_i(t)\geq 0\right)$.

Если выпуск продукции предприятием обеспечивается одним производственным фактором $Q(t)$ и одним непроизводственным ресурсом $S(t)$, то формулы (1)–(4) принимают вид:

$$V(t)=P(t)\cdot Q(t)^{a(t)}\cdot S(t)^{c(t)}\ , \tag{5}$$

$$V(t)=A_Q(t)\cdot Q(t)+A_S(t)\cdot S(t)+TFC\ , \tag{6}$$

$$PR(t)=P(t)\cdot Q(t)^{a(t)}\cdot S(t)^{c(t)}-A_Q(t)\cdot Q(t)-A_S(t)\cdot S(t)-TFC\ , \tag{7}$$

$$\Omega(t)=PR(t)+q(t)\cdot S(t). \tag{8}$$

Формула для целевой транзакционной функции полезности предприятия (8) показывает, что перераспределение прибыли в интересах руководства предприятия и для реализации социально ориентированных программ полностью определяется параметром $q(t)$, который удовлетворяет неравенству

$$0\leq q(t)\leq q_F(t). \tag{9}$$

Нижняя граница параметра $q(t)=0$ соответствует частному случаю, при котором предприятие совершенно не финансирует никакие непроизводственные программы и функция полезности совпадает с функцией прибыли.

Верхняя граница параметра $q=q_F(t)$ соответствует ситуации, при которой в текущий момент времени *t* предприятие тратит на социальные программы всю прибыль.

Значения объемов ресурсов $Q_F(t)$ и $S_F(t)$, при которых прибыль предприятия в текущий момент времени *t* обращается в нуль находятся из уравнения

$$P(t)\cdot Q_F(t)^{a(t)}\cdot S_F(t)^{c(t)}-A_Q(t)\cdot Q_F(t)-A_S(t)\cdot S_F(t)-TFC=0. \tag{10}$$

Значения верхней границы неравенства (9) $q_F(t)$ в текущий момент времени *t* находятся из уравнения

$$q_F(t) = -\frac{\partial PR(t)}{\partial S_F(t)} = A_S(t) - \frac{P(t)\cdot Q_F(t)^{a(t)}\cdot c(t)}{S_F(t)^{1-c(t)}}. \tag{11}$$

Процесс внедрения инноваций на предприятии будем описывать безразмерной случайной функцией $U = U(t)$, а процесс оттока прибыли на реализацию социальных программ и обеспечения интересов менеджмента предприятия будем описывать безразмерной случайной функцией $H = H(t)$, $(0 \le U(t) \le 1)$, $(0 \le W(t) \le 1)$.

Значение функции $U = 0$ соответствует началу процесса внедрения инноваций в производство, значения функции $U \to 1$ соответствуют завершению этого процесса.

Значение функции $H = 0$ соответствует началу процесса оттока прибыли на реализацию социальных программ и обслуживание интересов руководства предприятия, значения функции $H \to 1$ соответствуют завершению этого процесса.

Приращения каждого показателя ΔU и ΔH за малый временной интервал Δt можно записать в виде суммы

$$\begin{cases} \Delta U = \Delta U^N + \Delta U^I + \Delta U^W, \\ \Delta H = \Delta H^N + \Delta H^I + \Delta H^W. \end{cases} \tag{12}$$

Здесь $\Delta U^N, \Delta H^N$ – частичные приращения показателей внедрения инноваций в производство предприятия за малый временной интервал Δt, соответствующие начальному новаторскому этапу цифровой трансформации, $\Delta U^I, \Delta H^I$ – частичные приращения показателей внедрения инноваций в производство предприятия за тот же малый временной интервал Δt, соответствующие развернутому этапу цифровой трансформации, $\Delta U^W, \Delta H^W$ – случайные колебания показателей внедрения инноваций в производство предприятия. Величины $\Delta U^N, \Delta W^N$; $\Delta U^I, \Delta W^I$ и $\Delta U^W, \Delta H^W$ можно представить в виде

$$\begin{cases} \Delta U^N(t) = p_U \cdot (1 - U(t)) \cdot \Delta t, \\ \Delta U^I(t) = h_U \cdot U(t) \cdot (1 - U(t)) \cdot \Delta t, \\ \Delta U^W(t) = \rho \cdot h_U \cdot U(t) \cdot (1 - U(t)) \cdot \Delta w, \\ \Delta H^N(t) = p_H \cdot (1 - H(t)) \cdot \Delta t, \\ \Delta H^I(t) = h_H \cdot H(t) \cdot (1 - H(t)) \cdot \Delta t, \\ \Delta H^W(t) = \rho \cdot h_H \cdot H(t) \cdot (1 - H(t)) \cdot \Delta w. \end{cases} \tag{13, 14}$$

Здесь p_U, p_W – коэффициенты начальной трансформации показателей; h_U, h_W – коэффициенты развернутой трансформации показателей; $\theta(t)$ – функция, описывающая относительную скорость процесса трансформации показателей; множители $(1 - U(t))$ и $(1 - H(t))$ описывают выход процессов трансформации показателей на их завершающую стадию; w – стандартный винеровский процесс, $\Delta w = \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta t}$, ρ – волатильность процесса внедрения инноваций, ε – случайная величина с нормальным законом распределения, нулевым средним значением $\langle \varepsilon \rangle = 0$ и единичной дисперсией $\langle \varepsilon^2 \rangle = 1$.

Подстановка формул (13, 14) в формулы (12) дает

$$\begin{cases} \Delta U(t) = (1 - U(t)) \cdot \left((p_U + h_U \cdot U(t)) \cdot \Delta t + \rho \cdot h_U \cdot U(t) \cdot \Delta w \right), \\ \Delta H(t) = (1 - H(t)) \cdot \left((p_H + h_H \cdot H(t)) \cdot \Delta t + \rho \cdot h_H \cdot H(t) \cdot \Delta w \right) \end{cases}. \tag{15}$$

Предельный переход при $\Delta t \to 0, \Delta w \to 0$ в соотношениях (15) приводит к системе нелинейных стохастических дифференциальных уравнений Ито [25]:

$$\begin{cases} dU(t) = R_U(U(t),t) \cdot dt + Z_U(U(t),t) \cdot dw, \\ dH(t) = R_H(H(t),t) \cdot dt + Z_H(H(t),t) \cdot dw. \end{cases} \tag{16}$$

Здесь

$$\begin{cases} R_U(U(t),t) = (p_U + h_U \cdot U(t)) \cdot (1 - U(t)), \\ R_H(H(t),t) = (p_H + h_H \cdot H(t)) \cdot (1 - H(t)). \end{cases} \tag{17}$$

– коэффициенты сноса системы (16),

$$\begin{cases} Z_U(U(t),t) = \rho \cdot h_U \cdot U(t) \cdot (1 - U(t)), \\ Z_H(H(t),t) = \rho \cdot h_H \cdot H(t) \cdot (1 - H(t)). \end{cases} \tag{18}$$

– коэффициенты волатильности системы (16).

Начальные условия для системы (16) имеют вид

$$\begin{cases} U(0) = 0, \\ H(0) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Численные решения систем стохастических дифференциальных уравнений (16) с коэффициентами (17), (18) и начальными условиями (19) строятся на разбитом системой точек $(t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n)$ временном отрезке $[t_0, t_n]$ методом последовательных приближений Эйлера – Маруямы в соответствии с алгоритмами [25]

$$\begin{cases} U_{s+1} = U_s + R_U(U_s, t_s) \cdot \Delta t_s + \varepsilon_s \cdot Z_U(U_s, t_s) \cdot \sqrt{\Delta t_s}, \quad (s = 0,1,2,\ldots,n-1), \\ H_{p+1} = H_p + R_H(H_p, t_p) \cdot \Delta t_p + \varepsilon_p \cdot Z_H(H_p, t_p) \cdot \sqrt{\Delta t_p}, (p = 0,1,2,\ldots,n-1). \end{cases} \tag{20}$$

На каждом временном шаге $\Delta t_s = t_{s+1} - t_s$, начиная с начальных значений U_0, H_0, генерируются случайные числа $\varepsilon_s, \varepsilon_p$ и вычисляются следующие значения U_{s+1}, H_{p+1}.

Таким образом, образуются случайные последовательности $\{t_i\}$, $\{U_i\}$ и $\{H_i\}$. На координатной плоскости эти последовательности образуют системы точек $\{t_s, U_s\}$ и $\{t_p, H_p\}$ и соответствующие им стохастические траектории.

При повторении реализации алгоритмов (20) всякий раз образуются новые стохастические траектории, поскольку каждый раз случайная величина ε генерирует новые случайные значения.

Для вычисления математических ожиданий функций $U(t)$ и $H(t)$ необходимо статистически усреднить систему уравнений (16) с коэффициентами (17) и (18):

$$\begin{cases} \langle dU(t) \rangle = \langle (p_U + h_U \cdot U(t)) \cdot (1 - U(t)) \rangle \cdot dt, \\ \langle dH(t) \rangle = \langle (p_H + h_H \cdot H(t)) \cdot (1 - H(t)) \rangle \cdot dt. \end{cases} \tag{21}$$

В результате получается система дифференциальных уравнений, содержащих статистические моменты искомых функций второго порядка $\langle U(t)^2 \rangle$ и $\langle H(t)^2 \rangle$:

$$\begin{cases} \dfrac{d\langle U(t) \rangle}{dt} = \left(p_U + (h_U - p_U) \cdot \langle U(t) \rangle - h_U \cdot \langle U(t)^2 \rangle \right), \\ \dfrac{d\langle H(t) \rangle}{dt} = \left(p_H + (h_H - p_H) \cdot \langle H(t) \rangle - h_H \cdot \langle H(t)^2 \rangle \right). \end{cases} \tag{22}$$

Последовательные вычисления моментов $\left\langle U(t)^2\right\rangle$ и $\left\langle H(t)^2\right\rangle$ приводят к появлению моментов третьего, четвертого и более высоких порядков. Образуется бесконечная цепочка статистических уравнений, которую необходимо оборвать, сделав определенные допущения.

В рассматриваемом случае естественно предположить, что флуктуации величин $U(t)$ и $H(t)$ определяются случайными колебаниями числа покупателей-имитаторов, и ее можно представить в виде [28]:

$$\begin{cases} U(t)=\langle U(t)\rangle+\rho\cdot\langle U(t)\rangle\cdot\left(1-\langle U(t)\rangle\right)\cdot\varepsilon, \\ H(t)=\langle H(t)\rangle+\rho\cdot\langle H(t)\rangle\cdot\left(1-\langle H(t)\rangle\right)\cdot\varepsilon. \end{cases} \tag{23}$$

Тогда

$$\begin{cases} U(t)^2=\langle U(t)\rangle^2\cdot\left(1+2\cdot\rho\cdot\left(1-\langle U(t)\rangle\right)\cdot\varepsilon+\rho^2\cdot\left(1-\langle U(t)\rangle\right)^2\cdot\varepsilon^2\right), \\ H(t)^2=\langle H(t)\rangle^2\cdot\left(1+2\cdot\rho\cdot\left(1-\langle H(t)\rangle\right)\cdot\varepsilon+\rho^2\cdot\left(1-\langle H(t)\rangle\right)^2\cdot\varepsilon^2\right). \end{cases} \tag{24}$$

Усреднение формул (24) дает

$$\begin{cases} \left\langle U^2\right\rangle=\langle U\rangle^2\cdot\left(1+\rho^2\cdot\left(1-\langle U\rangle\right)^2\right), \\ \left\langle H^2\right\rangle=\langle H\rangle^2\cdot\left(1+\rho^2\cdot\left(1-\langle H\rangle\right)^2\right). \end{cases} \tag{25}$$

Подставляя формулы (25) в соотношения (22), находим систему дифференциальных уравнений относительно математических ожиданий величин $U(t)$ и $H(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{d\langle U\rangle}{dt}=\left(p_U+\left(h_U-p_U\right)\cdot\langle U\rangle-h_U\cdot\langle U\rangle^2\cdot\left(1+\rho^2\cdot\left(1-\langle U\rangle\right)^2\right)\right), \\ \dfrac{d\langle H\rangle}{dt}=\left(p_H+\left(h_H-p_H\right)\cdot\langle H\rangle-h_H\cdot\langle H\rangle^2\cdot\left(1+\rho^2\cdot\left(1-\langle H\rangle\right)^2\right)\right). \end{cases} \tag{26}$$

Начальные условия для системы (26) имеют вид

$$\begin{cases} \langle U(0)\rangle=0, \\ \langle H(0)\rangle=0. \end{cases} \tag{27}$$

На рисунке 1 представлены стохастическая траектория для функции $U(t)$, построенная по результатам численной реализации алгоритма Эйлера – Маруямы (20), и график функции математического ожидания $\langle U(t)\rangle$, полученного в результате численного решения задачи Коши (25), (27).

В результате инновационной деятельности предприятия и мероприятий менеджмента по перераспределению прибыли функция стоимости продукции произведенной на единичный объем ресурса $P(t)$, функции эластичности выпуска $a(t)$, $c(t)$, коэффициенты издержек $A_Q(t), A_S(t)$ и функция $q(t)$ будут изменяться во времени в соответствии с формулами:

$$\begin{cases} P(t)=P_0+\left(P_\infty-P_0\right)\cdot U(t), \\ a(t)=a_0+\left(a_\infty-a_0\right)\cdot U(t), \\ c(t)=c_0+\left(c_\infty-c_0\right)\cdot U(t), \\ A_Q(t)=A_Q^0+\left(A_Q^\infty-A_Q^0\right)\cdot U(t), \\ A_S(t)=A_S^0+\left(A_S^\infty-A_S^0\right)\cdot U(t), \\ q(t)=r\cdot\left(q_0+\left(q_\infty-q_0\right)\cdot H(t)\right) \end{cases}. \tag{28}$$

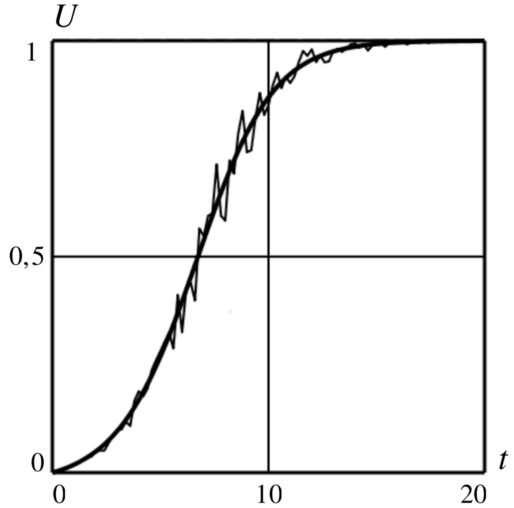

Рисунок 1 – Стохастическая траектория для функции $U(t)$ и график функции математического ожидания $\langle U(t)\rangle$. Расчетные значения: $n=100$; $p_U=0{,}01$; $h_U=0{,}5$; $\rho=0{,}25$

Figure 1 – Stochastic trajectory for a function $U(t)$ and a graph of the function of mathematic expectation $\langle U(t)\rangle$. Estimated values: $n=100$; $p_U=0{,}01$; $h_U=0{,}5$; $\rho=0{,}25$

Здесь P_0, P_∞ – начальное и конечное значения величины $P(t)$, a_0, a_∞ – начальное и конечное значения величины $a(t)$, c_0, c_∞ – начальное и конечное значения величины $c(t)$, A_Q^0, A_Q^∞ – начальное и конечное значения величины $A_Q(t)$, A_S^0, A_S^∞ – начальное и конечное значения величины $A_S(t)$, q_0, q_∞ – начальное и конечное значения величины $q(t)$, r – предельный коэффициент перераспределения прибыли предприятия. При $r=0$ вся прибыль вкладывается в развитие производства, при $r=1$ вся прибыль постепенно вкладывается в развитие социальных программ и обслуживание оппортунистических интересов руководства.

Поскольку с развитием процесса внедрения технологических инноваций выручка предприятия возрастает, а издержки убывают, то

$$P_0 \le P_\infty,\ a_0 \le a_\infty,\ c_0 \le c_\infty,\ q_0 \le q_\infty \text{ и } A_Q^0 \ge A_Q^\infty,\ A_S^0 \ge A_S^\infty .$$

Очевидно, что математические ожидания функций (30) выражаются формулами

$$\begin{cases} \langle P\rangle = P_0 + (P_\infty - P_0)\cdot\langle U\rangle, \\ \langle a\rangle = a_0 + (a_\infty - a_0)\cdot\langle U\rangle, \\ \langle c\rangle = c_0 + (c_\infty - c_0)\cdot\langle U\rangle, \\ \langle A_Q\rangle = A_Q^0 + (A_Q^\infty - A_Q^0)\cdot\langle U\rangle, \\ \langle A_S\rangle = A_S^0 + (A_S^\infty - A_S^0)\cdot\langle U\rangle, \\ \langle q\rangle = r\cdot\left(q_0 + (q_\infty - q_0)\cdot\langle H\rangle\right) \end{cases}. \tag{29}$$

Модель стохастической динамики развития производственного предприятия в краткосрочный период

Временной интервал, в течение которого существенных изменений основных и трудовых ресурсов не происходит, называется краткосрочным периодом. В рамках этого периода можно считать, что $Q(t)=const$ и $a(t)=const$.

Тогда формулы (5)–(8), принимают вид:

$$V(t)=P(t)\cdot Q^{a}\cdot S(t)^{c(t)}\ , \tag{30}$$

$$TC(t)=A_{Q}\cdot Q+A_{S}(t)\cdot S(t)+TFC\ , \tag{31}$$

$$PR(t)=P(t)\cdot Q^{a}\cdot S(t)^{c(t)}-A_{Q}\cdot Q-A_{S}(t)\cdot S(t)-TFC, \tag{32}$$

$$\Omega(t)=PR(t)+q(t)\cdot S(t). \tag{33}$$

Функция максимальных значений прибыли $PR_{\max}(t)$ и соответствующая ей функция ресурса $S_{\max}(t)$ находится из условия

$$\frac{dPR(t)}{dS(t)}=c(t)\cdot\left(P(t)\cdot Q^{a}\cdot S(t)^{c(t)-1}-\alpha_{S}(t)\right)=0\ . \tag{34}$$

Здесь $\alpha_{S}(t)=\dfrac{A_{S}(t)}{c(t)}$.

Решая уравнение (34) относительно $S(t)$ и вычисляя по формуле (32) максимальную прибыль, находим

$$\begin{cases} S_{\max}(t)=\left(\dfrac{P(t)\cdot Q^{a}}{\alpha_{S}(t)}\right)^{\frac{1}{1-c(t)}}, \\ PR_{\max}(t)=P(t)\cdot Q^{a}\cdot S_{\max}(t)^{c(t)}-A_{Q}\cdot Q-A_{S}(t)\cdot S_{\max}(t)-TFC. \end{cases} \tag{35}$$

Пренебрегая в соотношениях (35) флуктуациями величин, получим приближенные формулы для математических ожиданий величин $S_{\max}(t)$ и $PR_{\max}(t)$:

$$\begin{cases} \langle S_{\max}\rangle=\left(\dfrac{\langle P\rangle\cdot Q^{a}}{\langle\alpha_{S}\rangle}\right)^{\frac{1}{1-\langle c\rangle}}, \\ \langle PR_{\max}\rangle=\langle P\rangle\cdot Q^{a}\cdot\langle S_{\max}\rangle^{\langle c\rangle}-A_{Q}\cdot Q-\langle A_{S}\rangle\cdot\langle S_{\max}\rangle-TFC. \end{cases} \tag{36}$$

Величины (36) ограничены снизу и сверху своими предельными значениями

$$\begin{gathered} S_{\max}^{0}\le\langle S_{\max}\rangle<S_{\max}^{\infty}, \\ PR_{\max}^{0}\le\langle PR_{\max}\rangle<PR_{\max}^{\infty}. \end{gathered} \tag{37}$$

Здесь

$$\begin{gathered} S_{\max}^{0}=\left(\frac{P_{0}\cdot Q^{a}}{\alpha_{S}^{0}}\right)^{\frac{1}{1-c_{0}}}, S_{\max}^{\infty}=\left(\frac{P_{\infty}\cdot Q^{a}}{\alpha_{S}^{\infty}}\right)^{\frac{1}{1-c_{\infty}}}, \alpha_{S}^{0}=\frac{A_{S}^{0}}{c_{0}}, \alpha_{S}^{\infty}=\frac{A_{S}^{\infty}}{c_{0}}, \\ PR_{\max}^{0}=P_{0}\cdot Q^{a}\cdot\left(S_{\max}^{0}\right)^{c_{0}}-A_{Q}\cdot Q-A_{S}^{0}\cdot S_{\max}-TFC, \\ PR_{\max}^{\infty}=P_{\infty}\cdot Q^{a}\cdot\left(S_{\max}^{\infty}\right)^{c_{\infty}}-A_{Q}\cdot Q-A_{S}^{\infty}\cdot S_{\max}-TFC. \end{gathered} \tag{38}$$

Для вычисления оптимального значения прибыли необходимо оптимизировать целевую транзакционную функцию полезности (33), которая с учетом выражения (32) принимает вид

$$\Omega(t)=P(t)\cdot Q^{a}\cdot S(t)^{c(t)}-A_{Q}\cdot Q-A_{S}(t)\cdot S(t)-TFC+q(t)\cdot S(t). \tag{39}$$

Функция оптимальных значений прибыли $PR_{\mathrm{opt}}(t)$ и соответствующая ей функция ресурса $S_{\mathrm{opt}}(t)$ находится из условия

$$\frac{d\Omega}{dS}=c(t)\cdot\left(P(t)\cdot Q^{a}\cdot S(t)^{c(t)-1}-\alpha_{S}(t)\right)+q(t)=0\ . \tag{40}$$

Решение уравнения (40) и вычисление по формуле (32) максимальной прибыли дает оптимальное значение ресурса $S_{\mathrm{opt}}(t)$, оптимальное значение прибыли $PR_{\mathrm{opt}}(t)$:

$$\begin{cases} S_{\mathrm{opt}}(t)=\left(\dfrac{P(t)\cdot Q^{a}}{\eta_S(t)}\right)^{\frac{1}{1-c(t)}}, \\ PR_{\mathrm{opt}}(t)=P(t)\cdot Q^{a}\cdot S_{\mathrm{opt}}(t)^{c(t)}-A_Q\cdot Q-A_S(t)\cdot S_{\mathrm{opt}}(t)-TFC. \end{cases} \tag{41}$$

Здесь $\eta_S(t)=\alpha_S(t)-\dfrac{q(t)}{c(t)}$.

Пренебрегая в соотношениях (41) флуктуациями величин, получим приближенные формулы для математических ожиданий величин $S_{\mathrm{opt}}(t)$ и $PR_{\mathrm{opt}}(t)$:

$$\begin{cases} \left\langle S_{\mathrm{opt}}\right\rangle=\left(\dfrac{\langle P\rangle\cdot Q^{a}}{\langle\eta_S\rangle}\right)^{\frac{1}{1-\langle c\rangle}}, \\ \left\langle PR_{\mathrm{opt}}\right\rangle=\langle P\rangle\cdot Q^{a}\cdot\left\langle S_{\mathrm{opt}}\right\rangle^{\langle c\rangle}-A_Q\cdot Q-\langle A_S\rangle\cdot\left\langle S_{\mathrm{opt}}\right\rangle-TFC. \end{cases} \tag{42}$$

Из неотрицательности коэффициентов $c(t), q(t)$ следует, что имеет место неравенства:

$$\begin{cases} \eta_S(t)<\alpha_S(t), \\ S_{\mathrm{opt}}(t)>S_{\max}(t), \\ PR\left(S_{\mathrm{opt}}(t)\right)<PR\left(S_{\max}(t)\right). \end{cases} \tag{43}$$

Уравнения (10) и (11) записываются в виде

$$\begin{cases} P(t)\cdot Q^{a}\cdot S_F(t)^{c(t)}-A_Q\cdot Q-A_S(t)\cdot S_F(t)-TFC=0, \\ q_F(t)=A_S(t)-\dfrac{P(t)\cdot Q^{a}\cdot c(t)}{S_F(t)^{1-c(t)}}. \end{cases} \tag{44}$$

Соответствующие соотношения для математических ожиданий принимают вид

$$\begin{cases} \langle P\rangle\cdot Q^{a}\cdot\langle S_F\rangle^{\langle c\rangle}-A_Q\cdot Q-\langle A_S\rangle\cdot\langle S_F\rangle-TFC=0, \\ \langle q_F\rangle=\langle A_S\rangle-\dfrac{\langle P\rangle\cdot Q^{a}\cdot\langle c\rangle}{\langle S_F\rangle^{1-\langle c\rangle}}. \end{cases} \tag{45}$$

На рисунке 2 изображена поверхность математического ожидания функции прибыли

$$\langle PR\rangle=\langle P\rangle\cdot Q^{a}\cdot\langle S\rangle^{\langle c\rangle}-A_Q\cdot Q-\langle A_S\rangle\cdot\langle S\rangle-TFC\ . \tag{46}$$

На поверхность (46) нанесены пространственные линии ее касания с поверхностями безразличия математического ожидания целевой транзакционной функции полезности $\Omega(\langle PR\rangle,\langle S\rangle)=\Omega\left(\left\langle PR_{\mathrm{opt}}\right\rangle,\left\langle S_{\mathrm{opt}}\right\rangle\right)$, построенные по формулам (42) при различных значениях параметра r. Каждая такая линия сопровождается пространственными стохастическими траекториями, построенными по формулам (41) при различных значениях параметра r. Плоские линии на координатной плоскости $PR=0$ соответствуют решениям уравнений (44), (46) относительно функций $S_F(t)$ и $\langle S_F\rangle$.

Линии на рисунке 2, соответствующие параметрам $r=0$ и $r=1$, представляют собой верхнюю и нижнюю границы всевозможных вариантов перераспределения прибыли предприятия между производственными и непроизводственными затратами. Один из таких вариантов построен для значения параметров $r=0,75$.

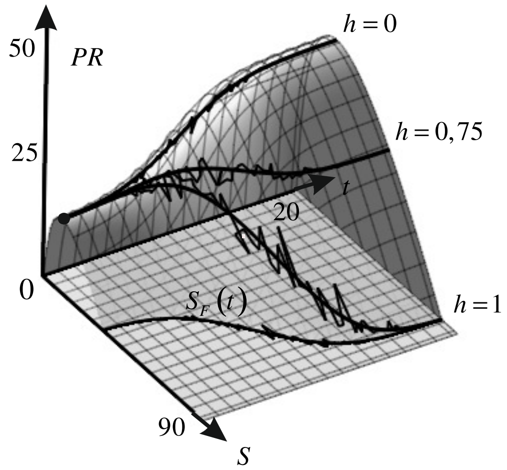

Рисунок 2 – График поверхности математического ожидания функции прибыли (46) с нанесенными на нее пространственными линиями ее касания с поверхностями безразличия математического ожидания целевой транзакционной функции полезности $\Omega\left(\langle PR\rangle,\langle S\rangle\right)=\Omega\left(\langle PR_{\text{opt}}\rangle,\langle S_{\text{opt}}\rangle\right)$, построенных по формулам (42) при различных значениях параметра r. Каждой такой линии соответствует пространственная стохастическая траектория, построенная по формулам (41) при различных значениях параметра r. Плоские линии на координатной плоскости $PR=0$ соответствуют решениям уравнений (44), (46) относительно функций $S_F(t)$ и $\langle S_F\rangle$

Figure 2 – Graph of the surface of the mathematical expectation of the profit function (46) with the spatial lines of its contact with the indifference surfaces of the mathematical expectation of the target transactional utility function $\Omega\left(\langle PR\rangle,\langle S\rangle\right)=\Omega\left(\langle PR_{\text{opt}}\rangle,\langle S_{\text{opt}}\rangle\right)$ built according to formulas (42) for various values of the parameter r. To each such lines a spatial stochastic trajectory corresponds built according to formulas (41) at different values of the parameter r. Flat lines on the coordinate plane $PR=0$ corresponds to the solutions of equations (44), (46) with respect to the functions $S_F(t)$ и $\langle S_F\rangle$

На рисунке 3 приведены проекции на координатную плоскость $S=0$ поверхности математического ожидания функции прибыли (48) и пространственных линий ее касания с поверхностями безразличия математического ожидания целевой транзакционной функции полезности $\Omega\left(\langle PR\rangle,\langle S\rangle\right)=\Omega\left(\langle PR_{\text{opt}}\rangle,\langle S_{\text{opt}}\rangle\right)$, построенные по формулам (44) при различных значениях параметра r. Каждая такая проекция сопровождается пространственными стохастическими траекториями, построенными по формулам (43) при различных значениях параметра r.

Расчетные значения: $P_0=20$; $P_\infty=25$; $Q=1{,}5$; $a=0{,}5$; $c_0=0{,}33$; $c_\infty=0{,}35$; $A_Q=0{,}4$; $A_S^0=1{,}7$; $A_S^\infty=1{,}5$; $TFC=20$; $T=20$; $p_U=0{,}01$; $h_U=0{,}5$; $p_H=0{,}015$; $h_H=0{,}6$.

Модель стохастической динамики развития производственного предприятия в долгосрочный период

В долгосрочном периоде работы предприятия производственный фактор $Q=Q(t)$ и эластичность $a=a(t)$ являются переменными величинами, а функции выпуска продукции, издержек и прибыли описываются формулами (5)–(8).

Значения функции прибыли (7), отвечающие ее максимуму, находятся из условий:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial PR(t)}{\partial Q(t)}=a(t)\cdot\left(P(t)\cdot Q(t)^{a(t)-1}\cdot S(t)^{c(t)}-\alpha_Q(t)\right)=0,\\ \dfrac{\partial PR(t)}{\partial S(t)}=c(t)\cdot\left(P(t)\cdot Q(t)^{a(t)}\cdot S(t)^{c(t)-1}-\alpha_S(t)\right)=0.\end{cases} \quad (47)$$

Здесь $\alpha_Q(t) = \dfrac{A_Q(t)}{a(t)}$.

Уравнения (49) эквивалентны системе

$$\begin{cases} P(t)\cdot Q(t)^{a(t)}\cdot S(t)^{c(t)} = \alpha_Q(t)\cdot Q(t), \\ P(t)\cdot Q(t)^{a(t)}\cdot S(t)^{c(t)} = \alpha_S(t)\cdot S(t). \end{cases} \tag{48}$$

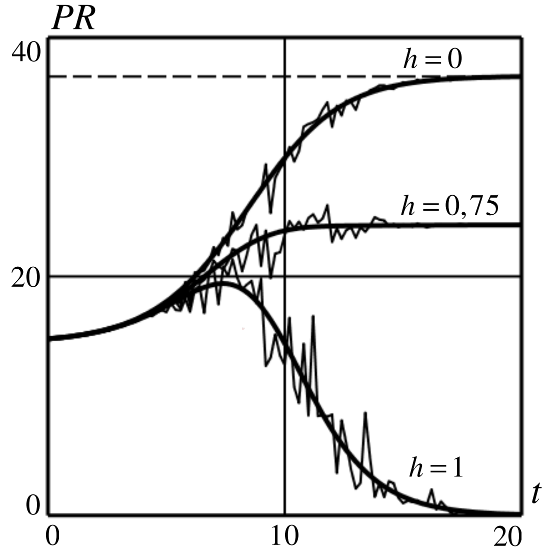

Рисунок 3 – Проекции на координатную плоскость $S=0$ поверхности математического ожидания функции прибыли (48) и пространственных линий ее касания с поверхностями безразличия математического ожидания целевой транзакционной функции полезности $\Omega(\langle PR\rangle,\langle S\rangle)=\Omega(\langle PR_{\text{opt}}\rangle,\langle S_{\text{opt}}\rangle)$, построенные по формулам (42) при различных значениях параметра r. Каждой такой линии соответствует проекция пространственной стохастической траектории, построенной по формулам (41) при различных значениях параметра r

Figure 3 – Projections onto the coordinate plane $S=0$ of the surface of mathematical expectation of the profit (48) and spatial lines of its contact with the indifference surfaces of mathematical expectation of the target transactional utility function $\Omega(\langle PR\rangle,\langle S\rangle)=\Omega(\langle PR_{\text{opt}}\rangle,\langle S_{\text{opt}}\rangle)$, built according to formulas (42) at different values of the parameter r. Each such line corresponds to the projection of a spatial stochastic trajectory constructed according to formulas (41) for various values of the parameter r

Из системы уравнений (48) следует, что величины $S_{\max}(t)$ и $Q_{\max}(t)$ связаны соотношением

$$S_{\max}(t) = \frac{\alpha_Q(t)}{\alpha_S(t)}\cdot Q_{\max}(t)\,. \tag{49}$$

Подставляя формулу (49) в первое уравнение системы (48), находим

$$P(t)\cdot Q_{\max}(t)^{a(t)+c(t)-1}\cdot\left(\frac{\alpha_Q(t)}{\alpha_S(t)}\right)^{c(t)} = \alpha_Q(t)\,. \tag{50}$$

Решая уравнения (49), (50) относительно $S_{\max}(t)$ и $Q_{\max}(t)$, и вычисляя по формуле (7) максимальную прибыль, находим

$$\begin{cases} Q_{\max}(t)=\left(\dfrac{P(t)}{\alpha_Q(t)^{1-c(t)}\cdot\alpha_S(t)^{c(t)}}\right)^{\frac{1}{1-a(t)-c(t)}}, \\ S_{\max}(t)=\left(\dfrac{P(t)}{\alpha_Q(t)^{a(t)}\cdot\alpha_S(t)^{1-a(t)}}\right)^{\frac{1}{1-a(t)-c(t)}}, \\ PR_{\max}(t)=P(t)\cdot Q_{\max}(t)^{a(t)}\cdot S_{\max}(t)^{c(t)}- \\ -A_Q(t)\cdot Q_{\max}(t)-A_S(t)\cdot S_{\max}(t)-TFC. \end{cases} \qquad (51)$$

Пренебрегая в соотношениях (51) флуктуациями величин, получим приближенные формулы для математических ожиданий величин $S_{\max}(t)$, $Q_{\max}(t)$ и $PR_{\max}(t)$:

$$\begin{cases} \langle Q_{\max}\rangle=\left(\dfrac{\langle P\rangle}{\langle\alpha_Q\rangle^{1-\langle c\rangle}\cdot\langle\alpha_S\rangle^{\langle c\rangle}}\right)^{\frac{1}{1-\langle a\rangle-\langle c\rangle}}, S_{\max}(t)=\left(\dfrac{\langle P\rangle}{\langle\alpha_Q\rangle^{\langle a\rangle}\cdot\langle\alpha_S\rangle^{1-\langle a\rangle}}\right)^{\frac{1}{1-\langle a\rangle-\langle c\rangle}}, \\ \langle PR_{\max}\rangle=\langle P\rangle\cdot\langle Q_{\max}\rangle^{\langle a\rangle}\cdot\langle S_{\max}\rangle^{\langle c\rangle}-\langle A_Q\rangle\cdot\langle Q_{\max}\rangle-\langle A_S\rangle\cdot\langle S_{\max}\rangle-TFC. \end{cases} \qquad (52)$$

Значения оптимальной прибыли предприятия, связанные с целевой транзакционной функцией полезности (10), находятся из условий

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Omega(t)}{\partial Q(t)}=a(t)\cdot\left(P(t)\cdot Q(t)^{a(t)-1}\cdot S(t)^{c}(t)-\alpha_Q(t)\right)=0, \\ \dfrac{\partial\Omega(t)}{\partial S(t)}=c(t)\cdot\left(P(t)\cdot Q(t)^{a(t)}\cdot S(t)^{c(t)-1}-\alpha_S(t)\right)+q(t)=0. \end{cases} \qquad (53)$$

Решая уравнения (53) относительно $S_{\text{opt}}(t)$ и $Q_{\text{opt}}(t)$ и вычисляя по формуле (7) оптимальную прибыль, находим

$$\begin{cases} Q_{\text{opt}}(t)=\left(\dfrac{P(t)}{\alpha_Q(t)^{1-c(t)}\cdot\eta_S(t)^{c(t)}}\right)^{\frac{1}{1-a(t)-c(t)}}, \\ S_{\text{opt}}(t)=\left(\dfrac{P(t)}{\alpha_Q(t)^{a(t)}\cdot\eta_S(t)^{1-a(t)}}\right)^{\frac{1}{1-a(t)-c(t)}}, \\ PR_{\text{opt}}(t)=P(t)\cdot Q_{\text{opt}}(t)^{a(t)}\cdot S_{\text{opt}}(t)^{c(t)}- \\ -A_Q(t)\cdot Q_{\text{opt}}(t)-A_S(t)\cdot S_{\text{opt}}(t)-TFC. \end{cases} \qquad (54)$$

Пренебрегая в соотношениях (54) флуктуациями величин, получим приближенные формулы для математических ожиданий величин $S_{\text{opt}}(t)$, $Q_{\text{opt}}(t)$ и $PR_{\text{opt}}(t)$:

$$\begin{cases} \langle Q_{\text{opt}}\rangle=\left(\dfrac{\langle P\rangle}{\langle\alpha_Q\rangle^{1-\langle c\rangle}\cdot\langle\eta_S\rangle^{\langle c\rangle}}\right)^{\frac{1}{1-\langle a\rangle-\langle c\rangle}}, S_{\text{opt}}(t)=\left(\dfrac{\langle P\rangle}{\langle\alpha_Q\rangle^{\langle a\rangle}\cdot\langle\eta_S\rangle^{1-\langle a\rangle}}\right)^{\frac{1}{1-\langle a\rangle-\langle c\rangle}}, \\ \langle PR_{\text{opt}}\rangle=\langle P\rangle\cdot\langle Q_{\text{opt}}\rangle^{\langle a\rangle}\cdot\langle S_{\text{opt}}\rangle^{\langle c\rangle}-\langle A_Q\rangle\cdot\langle Q_{\text{opt}}\rangle-\langle A_S\rangle\cdot\langle S_{\text{opt}}\rangle-TFC. \end{cases} \qquad (55)$$

Построить график поверхности математического ожидания функции прибыли

$$\langle PR\rangle=\langle P\rangle\cdot\langle Q\rangle^{\langle a\rangle}\cdot\langle S\rangle^{\langle c\rangle}-\langle A_Q\rangle\cdot\langle Q\rangle-\langle A_S\rangle\cdot\langle S\rangle-TFC, \qquad (56)$$

и графики поверхности безразличия математического ожидания целевой транзакционной функции полезности $\Omega\left(\langle PR\rangle,\langle Q\rangle,\langle S\rangle\right)=\Omega\left(\langle PR_{\text{opt}}\rangle,\langle Q_{\text{opt}}\rangle,\langle S_{\text{opt}}\rangle\right)$ для случая долгосрочного периода работы предприятия невозможно, поскольку они являются объектами четырехмерного пространства. Поэтому ограничимся проекциями этих объектов на координатную плоскость $S=0$.

На рисунке 4 приведены проекции на координатную плоскость $S=0$ поверхности математического ожидания функции прибыли (56) и пространственных линий ее касания с поверхностями безразличия математического ожидания целевой транзакционной функции полезности $\Omega\left(\langle PR\rangle,\langle Q\rangle,\langle S\rangle\right)=\Omega\left(\langle PR_{\text{opt}}\rangle,\langle Q_{\text{opt}}\rangle,\langle S_{\text{opt}}\rangle\right)$, построенные по формулам (55) при различных значениях параметра r. Каждая такая проекция сопровождается пространственными стохастическими траекториями, построенными по формулам (54) при различных значениях параметра r.

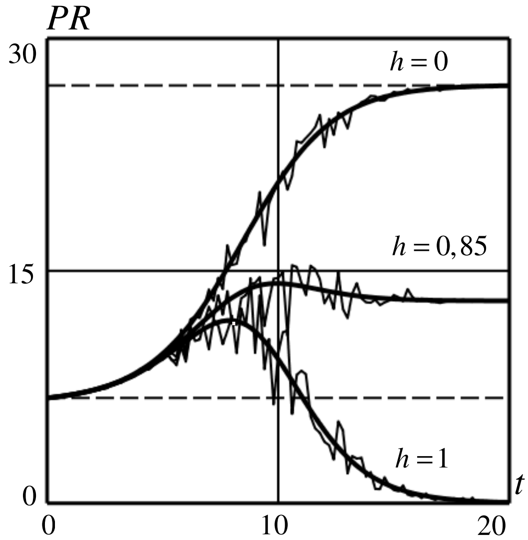

Рисунок 4 – Проекции на координатную плоскость $S=0$ поверхности математического ожидания функции прибыли (56) и пространственных линий ее касания с поверхностями безразличия математического ожидания целевой транзакционной функции полезности $\Omega\left(\langle PR\rangle,\langle Q\rangle,\langle S\rangle\right)=\Omega\left(\langle PR_{\text{opt}}\rangle,\langle Q_{\text{opt}}\rangle,\langle S_{\text{opt}}\rangle\right)$, построенные по формулам (55) при различных значениях параметра r. Каждой такой линии соответствует проекция пространственной стохастической траектории, построенной по формулам (54) при различных значениях параметра r

Figure 4 – Projections onto the coordinate plane $S=0$ of the surface of the mathematical expectation of the profit function (56) and the spatial lines of its contact with the indifference surfaces of the mathematical expectation of the target transactional utility function $\Omega\left(\langle PR\rangle,\langle Q\rangle,\langle S\rangle\right)=\Omega\left(\langle PR_{\text{opt}}\rangle,\langle Q_{\text{opt}}\rangle,\langle S_{\text{opt}}\rangle\right)$, constructed according to formulas (55) for various values of the parameter r. Each such line corresponds to a projection of a spatial stochastic trajectory constructed according to formulas (54) for various values of the parameter r

Расчетные значения: $P_0=20$; $P_\infty=25$; $a_0=0,251$; $a_\infty=0,252$; $c_0=0,233$; $c_\infty=0,235$; $A_Q^0=1,8$; $A_Q^\infty=1,6$; $A_S^0=1,7$; $A_S^\infty=1,5$; $TFC=20$; $T=20$; $p_U=0,01$; $h_U=0,5$; $p_W=0,015$; $h_W=0,6$.

Заключение

1. Представлены новые стохастические модели, описывающие динамику прибыли производственных предприятий, использующих инновационные технологии.

2. Исследована зависимость прибыли предприятия не только от уровня производственных (трансформационных) издержек, но и от уровня непроизводственных (транзакционных) издержек, возникающих в результате поиска и обработки экономической информации, финансирования процедур проведения переговоров, заключения контрактов с партнерами, защиты прав собственности и оплаты оппортунистического поведения сотрудников и руководства предприятия.

3. Установлено, что для отыскания оптимальных значений прибыли необходимо максимизировать не только функцию прибыли, но и целевую транзакционную функцию полезности, перераспределя-

ющую прибыль предприятия, как в интересах руководства, так и для реализации социально ориентированных программ.

4. Показано, что наличие транзакционных издержек делает недостижимым получение предприятием максимально возможного значения прибыли, вместо которого приходится ограничиваться его меньшим оптимальным значением.

5. Для показателей инновационных преобразований производства предприятия, влияющих на увеличение выпуска продукции и снижение издержек, установлены стохастические дифференциальные уравнения, случайные решения которых описывают стохастический диффузионный процесс внедрения технологических инноваций.

6. Алгоритмы численного решения стохастических дифференциальных уравнений модели построены методом Эйлера – Маруямы, в соответствии с которым каждая их реализация представляет собой стохастические траектории случайных функций показателей динамики развития производственных предприятий.

7. Для математических ожиданий рассматриваемых случайных функций получены соответствующие дифференциальные уравнения.

8. Численный анализ разработанной модели показал, что учет в стохастической модели внешнего случайного возмущающего фактора приводит к существенным отклонениям от детерминированной модели динамики формирования прибыли производственных предприятий.

Библиографический список

1. Coase R.H. The nature of the firm // Economica, New Series. 1937. Vol. 4, no. 16. P. 386–405. URL: https://faculty.washington.edu/mfan/is582/articles/Coase1937.pdf.

2. Coase R.H. The problem of social cost // Journal of Law and Economics. 1960. Vol. 3, no 3. P. 1–44. URL: http://www2.econ.iastate.edu/classes/tsc220/hallam/Coase.pdf.

3. Williamson O.E. Transaction-cost economics: The governance of contractual relations // Journal of Law and Economics. 1979. Vol. 22, no. 2. P. 233–261. URL: http://www.jstor.org/stable/725118?origin=JSTOR-pdf.

4. Williamson O.E. Comparative economic organization: The analysis of discrete structural alternatives // Administrative Science Quarterly. 1991, Vol. 36, no. 2. P. 269–296. URL: http://cadia.ru.is/wiki/_media/public:economic-organization-williamson.pdf.

5. Williamson O.E. Opportunism and its critics // Managerial and Decision Economics. 1993. Vol. 14, issue 2. P. 97–107. DOI: https://doi.org/10.1002/MDE.4090140203.

6. Williamson O.E. The Economic Institutions of Capitalism: Firms, Markets, Relational Contracting. Detroit: Free Press, 1998. 450 p.

7. Williamson O.E. Strategy research: Governance and competence perspectives // Strategic Management Journal. 1999. Vol. 20, issue 12. P. 1087–1108. DOI: https://doi.org/10.1002/%28SICI%291097-0266%28199912%2920%3A12%3C1087%3A%3AAID-SMJ71%3E3.0.CO%3B2-Z.

8. Williamson O.E. The new institutional economics: Taking stock, looking ahead // Journal of Economic Literature. 2000. Vol. 38, no. 3. P. 595–613. DOI: http://dx.doi.org/10.1257/jel.38.3.595.

9. Williamson O.E. Transaction cost economics: The origins // Journal of Retailing. 2010. Vol. 86, issue 3. P. 227–231. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jretai.2010.07.006.

10. Benkler Y. Coase's penguin, or, Linux and the nature of the firm // Yale Law Journal. 2002. Vol. 112, no. 3. P. 369–446. DOI: https://doi.org/10.2307/1562247.

11. Benkler Y. The wealth of networks. New Haven: Yale University Press, 2006. URL: https://www.benkler.org/Benkler_Wealth_Of_Networks.pdf. Benkler Y. Peer production, the commons and the future of the firm // Strategic Organization, 2017. Vol. 15, issue 2. P. 264–274. DOI: http://dx.doi.org/10.1177/1476127016652606.

12. Benkler, Y. (2017). Peer production, the commons and the future of the firm // Strategic Organization. Vol. 15, issue 2. P. 264–274. DOI: http://dx.doi.org/10.1177/1476127016652606.

13. Furubotn E.G., Richter R. Institutions and economic theory: The contribution of the new institutional economics. Ann Arbor: University of Michigan Press, 1997. 542 p.

14. Попов Е.В., Коновалов А.А. Модель оптимизации затрат на поиск информации // Проблемы управления. 2008. № 3. С. 69–72. URL: https://www.mathnet.ru/rus/pu160.

15. Мантуленко А.В., Сараев А.Л., Сараев Л.А. К теории оптимального распределения факторов производства, производственных и транзакционных издержек // Вестник Самарского государственного университета. Экономика и управление. 2013. № 7 (108). С. 117–126. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=20886447. EDN: https://elibrary.ru/rpbncv.

16. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Модель оптимизации прибыли предприятия, учитывающая сверхпропорциональные производственные и транзакционные затраты // Вестник Самарского государственного университета. Экономика и управление. 2013. № 10 (111). С. 230–237. URL: http://vestnikoldsamgu.ssau.ru/articles/111_35.pdf.

17. Ильина Е.А. Модель формирования оптимальной прибыли предприятия, учитывающая взаимодействие трансформационных и транзакционных издержек // Экономика и предпринимательство. 2018. № 12 (101). С. 1191–1199. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=36722316. EDN: https://elibrary.ru/yswtqd.

18. Ильина Е.А. К расчету оптимальной прибыли предприятия, несущего производственные и транзакционные издержки // Экономика и предпринимательство. 2019. № 8 (109). С. 842–849. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=41482468. EDN: https://elibrary.ru/fhjlby.

19. Ильина Е.А. Влияние транзакционных издержек производственного предприятия на формирование его прибыли // Вестник Самарского университета. Экономика и управление. 2020. Т. 11, № 1. С. 144–152. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=42834925. EDN: https://elibrary.ru/gryyvl.

20. Ильина Е.А., Сараев Л.А. Динамика формирования экономических показателей производственного предприятия в условиях цифровой трансформации // Вестник Самарского университета. Экономика и управление. 2020. Т. 11. № 2. С. 115–124. DOI: http://doi.org/10.18287/2542-0461-2020-11-2-115-124.

21. Ильина Е.А., Сараев Л.А., Тюкавкин Н.М. К расчету экономических показателей производственного предприятия, внедряющего инновационные технологии // Вестник Самарского университета. Экономика и управление. 2019. Т. 10. № 3. С. 64–70. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=43137865. EDN: https://elibrary.ru/tqjapc.

22. Ито К., Маккин Г. Диффузионные процессы и их траектории. Москва: Мир, 1968, 329 с.

23. Allen E. Modeling with Ito Stochastic Differential Equations. Springer, 2007. 230 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5953-7.

24. Кузнецов Д.С. Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. Санкт-Петербург: Издательство Политехнический университет, 2009. 800 с.

25. Соловьев В.И. Экономико-математическое моделирование рынка программного обеспечения. Москва: ГУУ ВЕГА-ИНФО, 2009. 176 с.

26. Кузнецова И.Ю. Численное решение стохастического дифференциального уравнения методом Эйлера-Маруямы // Международный исследовательский журнал. 2013. № 11 (18). С. 8–11. URL: https://research-journal.org / archive/11-18-2013-november/chislennoe-reshenie-stoxasticheskogo-differencialnogo-uravneniya-metodom-ejlera-maruyamy.

27. Ильина Е.А., Парфенова А.Ю., Сараев Л.А. Влияние изменения общего объема рынка на кинетику процесса диффузии инноваций // Вестник Алтайской академии экономики и права. 2019. № 12–1. С. 61–67. DOI: https://doi.org/10.17513/vaael.848. EDN: https://elibrary.ru/kfhwfz.

28. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Математические модели стохастической динамики развития предприятий // Вестник Самарского государственного технического ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24, № 2. С. 343–364. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1700. EDN: https://elibrary.ru/mltmba.

References

1. Coase R.H. The nature of the firm. *Economica, New Series*, 1937, vol. 4, no. 16, pp. 386–405. Available at: https://faculty.washington.edu/mfan/is582/articles/Coase1937.pdf.

2. Coase R.H. The problem of social cost. Journal of Law and Economics, 1960, vol. 3, no. 3, pp. 1–44. Available at: http://www2.econ.iastate.edu/classes/tsc220/hallam/Coase.pdf.

3. Williamson O.E. Transaction-cost economics: The governance of contractual relations. *Journal of Law and Economics*, 1979, vol. 22, no. 2, pp. 233–261. Available at: http://www.jstor.org/stable/725118?origin=JSTOR-pdf.

4. Williamson O.E. (1991). Comparative economic organization: The analysis of discrete structural alternatives. *Administrative Science Quarterly*, 1991, vol. 36, no. 2, pp. 269–296. Available at: http://cadia.ru.is/wiki/_media/public:economic-organization-williamson.pdf.

5. Williamson, O. E. (1993). Opportunism and its critics. *Managerial and Decision Economics*, 1993, vol. 14, no. 2, pp. 97–107. DOI: https://doi.org/10.1002/MDE.4090140203.

6. Williamson O.E. The Economic Institutions of Capitalism: Firms, Markets, Relational Contracting. Detroit: Free Press, 1998, 450 p.

7. Williamson O.E. Strategy research: Governance and competence perspectives. *Strategic Management Journal*, 1999, vol. 20, issue 12, pp. 1087–1108. DOI: https://doi.org/10.1002/%28SICI%291097-0266%28199912%2920%3A12%3C1087%3A%3AAID-SMJ71%3E3.0.CO%3B2-Z.

8. Williamson O.E. The new institutional economics: Taking stock, looking ahead. *Journal of Economic Literature*, 2000, vol. 38, no. 3, pp. 595–613. DOI: http://dx.doi.org/10.1257/jel.38.3.595.

9. Williamson O.E. Transaction cost economics: The origins. *Journal of Retailing*, 2010, vol. 86, issue 3, pp. 227–231. DOI: https://doi.org/10.1016/J.JRETAI.2010.07.006.

10. Benkler Y. Coase's penguin, or, Linux and the nature of the firm. *Yale Law Journal*, 2002, vol. 112, no. 3, pp. 369–446. DOI: https://doi.org/10.2307/1562247.

11. Benkler Y. The wealth of networks. New Haven: Yale University Press, 2006. Available at: https://www.benkler.org/Benkler_Wealth_Of_Networks.pdf. Benkler Y. Peer production, the commons and the future of the firm. *Strategic Organization*, 2017, vol. 15, issue 2, pp. 264–274. DOI: http://dx.doi.org/10.1177/1476127016652606.

12. Benkler Y. Peer production, the commons and the future of the firm. *Strategic Organization*, 2017, vol. 15, issue 2, pp. 264–274. DOI: http://dx.doi.org/10.1177/1476127016652606.

13. Furubotn E.G., Richter R. Institutions and economic theory: The contribution of the new institutional economics. Ann Arbor: University of Michigan Press, 1997, 542 p.

14. Popov E.V., Konovalov A.A. A model of information retrieval costs optimization. *Control Sciences*, 2008, no. 3, pp. 69–72. Available at: https://www.mathnet.ru/rus/pu160. (In Russ.)

15. Mantulenko A.V., Saraev A.L., Saraev L.A. On the theory of optimal allocation of production factors and transaction costs. *Vestnik of Samara State University. Series: Economics and Management*, 2013, no. 7 (108), pp. 117–126. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=20886447. EDN: https://elibrary.ru/rpbncv. (In Russ.)

16. Saraev A.L., Saraev L.A. Optimization model of profit of organizations, considering superproportionally production and transaction costs. *Vestnik of Samara State University. Series: Economics and Management*, 2013, no. 10 (111), pp. 230–237. Available at: http://vestnikoldsamgu.ssau.ru/articles/111_35.pdf. (In Russ.)

17. Ilyina E.A. The model of formation of the optimal profit of the enterprise, taking into account the interaction of transformational and transactional costs. *Journal of Economy and entrepreneurship*, 2018, no. 12 (101), pp. 1191–1999. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=36722316. EDN: https://elibrary.ru/yswtqd. (In Russ.)

18. Ilyina E.A. To the calculation of the optimal profit of the enterprise, bearing production and transaction costs. *Journal of Economy and entrepreneurship*, 2019, no. 8 (111), pp. 842–849. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=41482468. EDN: https://elibrary.ru/fhjlby. (In Russ.)

19. Ilyina E.A. Influence of transaction costs of a production enterprise on the formation of its profit. *Vestnik Samarskogo universiteta. Ekonomika i upravlenie = Vestnik of Samara University. Economics and Management*, 2020, vol. 11, no. 1, pp. 144–152. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=42834925. EDN: https://elibrary.ru/gryyvl. (In Russ.)

20. Ilyina E.A., Saraev L.A. Dynamics of formation of economic indicators of a production enterprise under digital transformation. *Vestnik Samarskogo universiteta. Ekonomika i upravlenie = Vestnik of Samara University. Economics and Management*, 2020, vol. 11, no. 2, pp. 115–124. DOI: http://doi.org/10.18287/2542-0461-2020-11-2-115-124. (In Russ.)

21. Ilyina E.A., Saraev L.A., Tyukavkin N.M. On the calculation of economic indicators of a manufacturing enterprise that implements innovative technologies. *Vestnik Samarskogo universiteta. Ekonomika i upravlenie = Vestnik of Samara University. Economics and Management*, 2019, vol. 10, no. 3, pp. 64–70. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=43137865. EDN: https://elibrary.ru/tqjapc. (In Russ.)

22. Ito K., Mackin G. Diffusion processes and their trajectories. Moscow: Mir, 1986, 329 p. (In Russ.)

23. Allen E. Modeling with Ito Stochastic Differential Equations. Springer, 2007, 230 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5953-7.

24. Kuznetsov D.S. Stochastic differential equations: theory and practice of numerical solution. Saint Petersburg: Izdatel'stvo Politekhnicheskii universitet, 2009, 800 p. (In Russ.).

25. Solovyev V.I. Economic and mathematical modeling of the software market. Moscow: GUU VEGA-INFO 2009, 176 p. (In Russ.).

26. Kuznetzova I.Y. Numerical solution of stochastic differential equation by Euler-Maruyama method. *International Research*, 2013, issue 11 (18), pp. 8–11. Available at: https://research-journal.org/archive/11-18-2013-november/chislennoe-reshenie-stoxasticheskogo-differencialnogo-uravneniya-metodom-ejlera-maruyamy. (In Russ.)

27. Ilyina E.A., Parphenova A.Yu., Saraev L.A. Influence of changes to the total volume of the market on the kinetics of the process of diffusion of innovations. *Vestnik Altaiskoi akademii ekonomiki i prava*, 2019, no. 12, pp. 61–67. DOI: https://doi.org/10.17513/vaael.848. EDN: https://elibrary.ru/kfhwfz. (In Russ.).

28. Saraev A.L., Saraev L.A. Stochastic calculation of curves dynamics of enterprise. *Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2020, vol. 24, no. 2, pp. 343–364. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1700. EDN: https://elibrary.ru/mltmba. (In Russ.).