DOI: 10.18287/2542-0461-2023-14-1-172-191

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

УДК 330.42

Дата поступления: 12.12.2022
рецензирования: 18.01.2023
принятия: 15.03.2023

К теории капитализации прибыли многофакторного производственного предприятия

Е.А. Ильина
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: elenaalex.ilyina@yandex.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2590-6138
Л.А. Сараев
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: saraev_leo@mail.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3625-5921

Аннотация: В публикуемой статье предложена новые экономико-математические модели динамики развития многофакторных предприятий, восстановления производственных ресурсов которых обеспечиваются за счет капитализации прибыли. Особенности этих моделей заключаются в том, что для расчета прибыли предприятий используются мультипликативные производственные функции с переменными эластичностями по ресурсам, функции, описывающие пропорциональные, прогрессивные и дигрессивные объемы производственных издержек, и функции, описывающие пропорциональные, прогрессивные и дигрессивные объемы амортизационных отчислений. Для прогнозирования объемов производственных издержек и объемов амортизационных отчислений установлены системы дифференциальных уравнений. Показано, что эффективность динамики развития предприятий зависит от выбора значений коэффициентов капитализации. Неудачный выбор этих коэффициентов не дает возможности предприятию обеспечить свою максимальную прибыль. Получена система уравнений для вычисления эффективных коэффициентов капитализации, применяя которые предприятие гарантированно выходит на режим работы с максимальной прибылью. Рассмотрены варианты динамики развития предприятия для пропорциональных, прогрессивных и дигрессивных издержек и пропорциональных, прогрессивных и дигрессивных амортизационных отчислений. Показаны различные режимы работы предприятий, к которым относятся стабильный выпуск продукции предприятиями, временная приостановка работы предприятий на время их технического переоснащения и временное частичное сворачивание производства.

Ключевые: амортизация; издержки; капитализация прибыли; коэффициенты капитализации; предприятие; производственная функция; производственные факторы; производство; ресурсы.
Цитирование. Ильина Е.А., Сараев Л.А. К теории капитализации прибыли многофакторного производственного предприятия // Вестник Самарского университета. Экономика и управление. 2023. Т. 14. № 1. С. 172–191. DOI: http://doi.org/10.18287/2542-0461-2023-14-1-172-191.
Информация о конфликте интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Елена Алексеевна Ильина – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и бизнес-информатики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.
Леонид Александрович Сараев – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и бизнес-информатики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

SCIENTIFIC ARTICLE

Submitted: 12.12.2022
Revised: 18.01.2023
Accepted: 15.03.2023

On the theory of profit capitalization of a multifactorial manufacturing enterprise

E.I. Ilyina
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: elenaalex.ilyina@yandex.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2590-6138
L.A. Saraev
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: saraev_leo@mail.ru. ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3625-5921

Abstract: The published article proposes new economic and mathematical models of the dynamics of development of multifactorial enterprises, the restoration of production resources of which is ensured by the capitalization of profits. The features of these models are that to calculate the profit of enterprises, multiplicative production functions with variable resource elasticities, functions describing proportional, progressive and digressive volumes of production costs, and functions describing proportional, progressive and digressive volumes of depreciation deductions are used. To predict the volume of production costs and the volume of depreciation deductions, systems of differential equations are established. It is shown that the effectiveness of the dynamics of the development of enterprises depends on the choice of values of capitalization coefficients. An unsuccessful choice of these coefficients does not allow the company to ensure its maximum profit. A system of equations has been obtained for calculating effective capitalization ratios, using which the enterprise is guaranteed to enter the operating mode with maximum profit. Variants of enterprise development dynamics for proportional, progressive and digressive costs and proportional, progressive and digressive depreciation charges are considered. Various modes of operation of enterprises are shown, which include stable output by enterprises, temporary suspension of work of enterprises during its technical re-equipment, and temporary partial curtailment of production.
Key words: depreciation; costs; profit capitalization; capitalization ratios; enterprise; production function; production factors; production; resources.
Citation. Ilyina E.A., Saraev L.A. On the theory of profit capitalization of a multifactorial manufacturing enterprise. *Vestnik Samarskogo universiteta. Ekonomika i upravlenie = Vestnik of Samara University. Economics and Management*, 2023, vol. 14, no. 1, pp. 172–191. DOI: http://doi.org/10.18287/2542-0461-2023-14-1-172-191. (In Russ.)
Information on the conflict of interest: authors declare no conflict of interest.

Elena A. Ilyina – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Mathematics and Business Informatics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.
Leonid A. Saraev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, head of the Department of Mathematics and Business Informatics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Введение

Стабильное развитие национальной экономики, устойчивое увеличение ее показателей определяется экономическим ростом входящих в нее производственных предприятий и экономических систем. Прогнозирование на основе экономико-математических методов показателей динамики развития производственных предприятий является одной из актуальных проблем современной экономической теории. Успешное решение такого рода проблем позволяет в тех или иных случаях выполнить адекватный анализ деятельности предприятий, вычислить эффективные параметры для их ресурсов, объемов выпуска продукции, издержек и прибыли. На основе такого анализа возможно достаточно точно описать динамику выпуска продукции, издержек и прибыли и т. д. Основы теории экономического роста предприятий и экономических систем подробно представлен в работах [1–7].

На базе этих теоретических положений создан целый спектр моделей роста экономических систем, учитывающий роль технических инноваций и информационных технологий [8–18].

Динамика развития предприятий определяется взаимодействием капитализацией в производство объемов прибыли и амортизационных отчислений на восстановление объемов ресурсов и затрат на модернизацию средств производства. Одним из главных математических инструментов для построения моделей экономического развития предприятий является аппарат дифференциальных уравнений и их систем [19–33].

Целью публикуемой работы является разработка новых экономико-математических моделей динамики развития предприятия, которая учитывает влияние сопровождающих издержек производства, амортизационных отчислений и капитализации прибыли. Такой учет позволяет прогнозировать выход мощностей предприятия на эффективное предельное состояние производства, при котором прибыль предприятия становится максимальной.

Научная оригинальность этой модели состоит в том, что она описывает взаимодействие капитализации прибыли, пропорциональных, прогрессивных и дигрессивных издержек, пропорциональных, прогрессивных и дигрессивных амортизационных отчислений позволяет вычислить эффективный коэффициент капитализации, при котором прибыль становится максимальной.

Построенная модель позволяет рассмотреть варианты стабильного поступательного развития предприятия, приостановки его работы во время переоснащения производства и временного кризисного сворачивания производства при замене оборудования.

1. Производственная функция с переменной эластичностью по ресурсу.

Пусть выпуск продукции предприятия обеспечивается некоторым набором факторов производства $\left(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\right)$.

Объемы этих ресурсов могут представлять основной капитал, оборотный капитал, финансовый капитал, трудовые ресурсы, привлекаемые в производство материалы, технологии и инновации и т.д.

Ограниченные величины Q_i, $\left(Q_i^N \le Q_i \le Q_i^F\right)$ являются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми функциями времени $Q_i = Q_i(t)$. Единицами измерения переменной величины t, в зависимости от рассматриваемой экономической ситуации, могут быть один месяц, один квартал или один год.

Начальное значение $Q_i^N = Q_i(0)$ фактора производства $Q_i = Q_i(t)$ считается известным.

Предельное значение $Q_i^F = \lim\limits_{t\to\infty} Q_i(t)$ фактора производства $Q_i = Q_i(t)$ определяется складывающейся экономической ситуацией и подлежат вычислению.

В самом общем случае объем выручки предприятия V обеспечивается некоторой многофакторной производственной функцией

$$V = V\left(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\right). \quad (1)$$

Ограничимся здесь мультипликативной многофакторной производственной функцией

$$V = P \cdot V_1(Q_1) \cdot V_2(Q_2) \cdot \ldots \cdot V_n(Q_n) = \prod_{s=1}^{n} V_s(Q_s). \quad (2)$$

Здесь $V_s(Q_s)$ – безразмерные функции, описывающие вклад каждого ресурса Q_s в выручку предприятия и удовлетворяющие условиям $V_s(1) = 1$, P – значение объема выпуска продукции, приходящегося на единицы производственных факторов $Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_n = 1$.

Для всех $(i = 1, 2, \ldots, n)$ функции $V_i(Q_i)$ связаны со своими эластичностями выпуска продукции $EV_i = EV_i(Q_i)$ по ресурсам Q_i и удовлетворяю дифференциальным уравнениям с начальными условиями [25]

$$\begin{cases} \dfrac{dV_i}{dQ_i} \cdot \dfrac{Q_i}{V_i} = EV_i(Q_i), \\ V_i\big|_{Q_i=1} = V_i(1) = 1. \end{cases} \quad (3)$$

Безразмерные величины эластичностей $EV_i = EV_i(Q_i)$ показывают, на сколько процентов изменяться функции $V_i(Q_i)$, если производственные факторы Q_i изменятся на один процент. Следует отметить, что для всех эластичностей выполняются условия $(0 \le EV_i \le 1)$.

Если в уравнениях (3) все эластичности функций $V_i(Q_i)$ по ресурсам Q_i принять константами $E_i = a_i = const$, то решением задач Коши (3) будут функции $V_i(Q_i) = Q_i^{a_i}$, а мультипликативная многофакторная производственная функция (2) преобразуется в мультипликативную многофакторную степенную функцию Кобба-Дугласа

$$V = P \cdot \prod_{s=1}^{n} Q_s^{a_s} . \tag{4}$$

Все частные производные производственной функции (4) в начальной точке $Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_m = 0$ обращаются в бесконечность. Это означает, что при бесконечно малых приращениях ресурсов Q_i выпуск продукции принимает бесконечно большие значения. На самом деле прирост выручки предприятия в малой окрестности точки $Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_m = 0$ должен иметь конечные значения, следовательно, частные производные производственной функции должны в этой окрестности иметь конечные значения. Конечные значения частных производных производственной функции в точке $Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_m = 0$ могут быть только в том случае, когда эластичности $EV_i = EV_i(Q_i)$ в этой точке принимают единичные значения, а затем снижаются до некоторого постоянного значения $EV_i = a_i = const$.

В качестве функций эластичности $EV_i = EV_i(Q_i)$ примем дробно-линейные функции

$$EV_i(Q_i) = \frac{a_i \cdot Q_i + Q_i^V}{Q_i + Q_i^V}, \tag{5}$$

где Q_i^V – значения ресурсов Q_i, при которых эластичности выпуска продукции принимают среднее значение $EV_i\left(Q_i^V\right) = \dfrac{1 + a_i}{2}$.

Решениями задач Коши (3) с формулами для эластичностей (5) будут функции

$$V_i = Q_i \cdot \left(\frac{1 + Q_i^V}{Q_i + Q_i^V} \right)^{1-a_i} . \tag{6}$$

Таким образом, мультипликативная многофакторная производственная функция (2) принимает вид

$$V = P \cdot \prod_{s=1}^{n} Q_s \cdot \left(\frac{1 + Q_s^V}{Q_s + Q_s^V} \right)^{1-a_s} . \tag{7}$$

Формула (7) показывает, что при бесконечно малых значениях производственных факторов $(Q_i \to 0)$ производственная функция предприятия бесконечно близка к линейной функции

$$V^N = P \cdot \prod_{s=1}^{n} Q_s . \tag{8}$$

а для бесконечно больших значений производственных факторов $(Q_i \to \infty)$ она асимптотически приближается к некоторой предельной функции Кобба-Дугласа

$$V^F = P \cdot \prod_{s=1}^{n} Q_s^{a_s} \cdot \left(1 + Q_s^V\right)^{1-a_s}. \qquad (9)$$

Следует отметить, что величины Q_i^V угловой коэффициент $R_i = \left.\dfrac{dV_i}{dQ_i}\right|_{Q_i=0}$ наклона функции $V_i(Q_i)$ в начальной точке связаны соотношениями

$$\begin{cases} R_i = \left.\dfrac{dV_i}{dQ_i}\right|_{Q_i=0} = \left(\dfrac{1+Q_i^V}{Q_i^V}\right)^{1-a_i}, \\ Q_i^V = \dfrac{1}{R_i^{\frac{1}{1-a_i}} - 1}. \end{cases} \qquad (10)$$

2. Функция производственных издержек и прибыли предприятия.

Рост производственных факторов предприятия $\left(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\right)$ и увеличение выпуска предприятием продукции $V = V\left(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n\right)$ сопровождается соответствующим ростом производственных издержек.

В общем случае издержки многофакторного предприятия имеют вид

$$TC = \sum_{s=1}^{n} TVC_s\left(Q_s\right) + TFC. \qquad (11)$$

Здесь $TVC_s\left(Q_s\right)$ – переменные издержки предприятия по каждому ресурсу Q_s, TFC – общие постоянные затраты предприятия.

Для пропорциональных переменные издержек предприятия функции $TVC_s\left(Q_s\right)$ являются линейными, и формула (11) принимает вид

$$TC = \sum_{s=1}^{n} H_s \cdot Q_s + TFC. \qquad (12)$$

Здесь H_s – стоимости переменных затрат на единичные объемы ресурсов $Q_s \equiv 1$.

Для нелинейных прогрессивных и дигрессивных издержек функций переменных издержек $TVC_s\left(Q_s\right)$ будут отклоняться от линейной зависимости. Отклонения функций $TVC_s\left(Q_s\right)$ можно описать с помощью величин эластичностей издержек.

Безразмерные величины эластичностей издержек $EH_s = EH_s\left(Q_s\right)$ показывают, на сколько процентов изменятся функции $TVC_s\left(Q_s\right)$, если производственные факторы Q_s изменятся на один процент.

Таким образом, функции издержек $EH_s = EH_s\left(Q_s\right)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{dTVC_s}{dQ_s} \cdot \frac{Q_s}{TVC_s} = EH_s\left(Q_s\right). \qquad (13)$$

Начальными условиями для уравнений (13) являются условия пропорциональности издержек в бесконечно малой окрестности точек $Q_s = 0$

$$\left.\frac{dTVC_s}{dQ_s}\right|_{Q_s=0} = H_s. \tag{14}$$

Очевидно, что линейные функции издержек $TVC_s\left(Q_s\right) = H_s \cdot Q_s$ являются решениями задачи (13), (14) при единичных эластичностях $EH_s = 1$. Отклонения функций издержек $TVC_s\left(Q_s\right)$ от линейных зависимостях будут только в том случае, когда эластичности $EH_s = EH_s\left(Q_s\right)$ при увеличении ресурсов Q_s будут изменяться от единичного значения до некоторых постоянных значений $EH_s = h_s$.

Если значения функции эластичности $EH_s = EH_s\left(Q_s\right)$ будут отклоняться от единицы в большую сторону $\left(h_s > 1\right)$, то соответствующие издержки будут становиться прогрессивными, если же значения функции эластичности $EH_s = EH_s\left(Q_s\right)$ будут отклоняться от единицы в меньшую сторону $\left(h_s < 1\right)$, то соответствующие издержки будут становиться дигрессивными.

В качестве функций эластичностей $EH_s = EH_s\left(Q_s\right)$ примем дробно-линейные функции

$$EH_s\left(Q_s\right) = \frac{h_s \cdot Q_s + Q_s^H}{Q_s + Q_s^H}. \tag{15}$$

Здесь Q_i^H – значения ресурсов Q_i, при которых эластичности издержек принимают средние значения $EH_i\left(Q_i^H\right) = \dfrac{1+h_i}{2}$.

Решениями задач Коши (13), (14) с формулами для эластичностей (15) будут функции

$$TVC_i = H_i \cdot Q_i \cdot \left(\frac{1+Q_i^H}{Q_i + Q_i^H}\right)^{1-h_i}. \tag{16}$$

Таким образом, многофакторная функция общих производственных издержек (11) принимает вид

$$TC = \sum_{s=1}^{n} H_s \cdot Q_s \cdot \left(\frac{1+Q_s^H}{Q_s + Q_s^H}\right)^{1-h_s} + TFC. \tag{17}$$

Формула для прибыли рассматриваемого предприятия $PR = V - TC$ представляет собой разность выражений (7) и (17)

$$PR = P \cdot \prod_{s=1}^{n} Q_s \cdot \left(\frac{1+Q_s^V}{Q_s + Q_s^V}\right)^{1-a_s} - \sum_{s=1}^{n} H_s \cdot Q_s \cdot \left(\frac{1+Q_s^H}{Q_s + Q_s^H}\right)^{1-h_s} - TFC. \tag{18}$$

Для вычисления максимальной прибыли предприятия необходимо приравнять нулю все частные производные функции прибыли (18)

$$\frac{\partial PR}{\partial Q_i} = 0,$$

и составить систему уравнений

$$\frac{H_i \cdot Q_i}{P} \cdot \frac{EH_i\left(Q_i\right)}{EV_i\left(Q_i\right)} \cdot Q_i \cdot \left(\frac{1+Q_i^H}{Q_i + Q_i^H}\right)^{1-h_i} = \prod_{s=1}^{n} Q_s \cdot \left(\frac{1+Q_s^V}{Q_s + Q_s^V}\right)^{1-a_s}. \tag{19}$$

Структура системы уравнений (19) показывает, что она не имеет аналитического решения, и может быть решена только численно.

С помощью численных решений системы уравнений (19) Q_i^M вычисляется максимальное значение прибыли PR^M

$$PR^M = P \cdot \prod_{s=1}^{n} Q_s^M \cdot \left(\frac{1+Q_s^V}{Q_s^M + Q_s^V} \right)^{1-a_s} - \sum_{s=1}^{n} H_s \cdot Q_s^M \cdot \left(\frac{1+Q_s^H}{Q_s^M + Q_s^H} \right)^{1-h_s} - TFC \,. \quad (20)$$

Предельные значения ресурсов Q_i^R, при которых прибыль предприятия обращается в нуль находятся из условий $PR\left(Q_i^R\right)=0$.

$$P \cdot \prod_{s=1}^{n} Q_s^R \cdot \left(\frac{1+Q_s^V}{Q_s^R + Q_s^V} \right)^{1-a_s} - \sum_{s=1}^{n} H_s \cdot Q_s^R \cdot \left(\frac{1+Q_s^H}{Q_s^R + Q_s^H} \right)^{1-h_s} - TFC = 0 \,.$$

3. Уравнение динамики развития предприятия, учитывающие амортизацию ресурсов и капитализацию прибыли.

Динамика развития производственного предприятия, опирающегося только на внутренние инвестиции, определяется объемом капитализации прибыли и объемами амортизацией или объемами износа (wearout) ресурсов.

Поэтому приращение объемов ресурсов $\Delta Q_i = Q_i\left(t+\Delta t\right) - Q_i\left(t\right)$ за некоторый малый промежуток времени Δt можно выразить суммой двух компонентов

$$\Delta Q_i = \Delta Q_i^W + \Delta Q_i^{PR} \,. \quad (21)$$

Здесь ΔQ_i^W – частичные амортизационные утраты ресурсов Q_i за время Δt, ΔQ_i^{PR} – частичные восстановления ресурсов Q_i за время Δt за счет капитализации прибыли предприятия.

Величины ΔQ_i^W могут быть выражены через функции амортизации $W_i = W_i\left(Q_i\right)$

$$\Delta Q_i^W = -\theta\left(t\right) \cdot W_i\left(Q_i\right) \cdot \Delta t \,. \quad (22)$$

Выражения для частичных восстановлений ресурсов Q_i за промежуток времени Δt вследствие капитализации прибыли предприятия ΔQ_i^{PR} могут быть записаны в виде

$$\Delta Q_i^{PR}\left(t\right) = \theta\left(t\right) \cdot I_i\left(t\right) \cdot \Delta t \,. \quad (23)$$

Здесь $I_i\left(t\right) = K_i \cdot PR\left(t\right)$ – внутренние инвестиции, восстанавливающие ресурсы Q_i за счет капитализации прибыли, K_i – коэффициенты капитализации прибыли, доли прибыли инвестируемые в ресурсы Q_i.

Подставляя формулы (22), (23) в уравнения баланса (21), находим

$$\Delta Q_i\left(t\right) = \theta\left(t\right) \cdot \left(-W_i\left(Q_i\right) + K_i \cdot PR\left(t\right)\right) \cdot \Delta t \,. \quad (24)$$

Предельный переход в уравнениях (24) при $\Delta t \to 0$ приводит к системе нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dQ_i}{dt} = \theta \cdot \left(-W_i\left(Q_i\right) + K_i \cdot PR\right). \quad (25)$$

Начальными условиями для системы уравнений (25) являются условия

$$Q_i\Big|_{t=0} = Q_i\left(0\right) = Q_i^N \,. \quad (26)$$

Функция $\theta = \theta\left(t\right)$ в уравнениях (25) определяет варианты развития рассматриваемого предприятия. Для постоянной и единичной функции $\theta\left(t\right) \equiv 1$ развитие предприятия будет стабильным. Различные размеры отклонения значения функции $\theta\left(t\right)$ от единицы в сторону уменьшения будут соответствовать замедлению процесса развития предприятия, его временной остановке во время смены технологий производства, частичному сворачиванию производства [26].

Форма интегральной кривой задачи Коши (25), (26) существенно зависят от вида функции $\theta(t)$, определяющей центр временного интервала, его протяженность и величину отклонения от единичного значения, при котором предприятие работает стабильно.

Если в интервале времени $\left(t^{*}-\sigma, t^{*}+\sigma\right)$ предприятие производит полную или частичную замену технологического оборудования, то функцию $\theta(t)$ можно записать в виде [28]

$$\theta(t)=1-\omega \cdot \exp\left(-\frac{\left(t-t^{*}\right)^{2}}{2 \cdot \sigma^{2}}\right), \tag{27}$$

где ω – максимальный размер отклонения функции $\theta(t)$ от единицы, t^{*} – центр временного интервала, σ – радиус временного интервала.

Если $\omega=0$, то предприятие будет работать стабильно, если $0<\omega<1$, то в окрестности точки $t=t^{*}$ рост функций $Q_i(t)$ замедляется, если $\omega=1$, то в момент времени $t=t^{*}$ рост функций $Q_i(t)$ прекращается, и на интервале времени $\left(t^{*}-\sigma, t^{*}+\sigma\right)$ происходит переоснащение производства, если $\omega>1$, то на интервале времени $\left(t^{*}-\sigma, t^{*}+\sigma\right)$ происходит переоснащение производства, сопровождаемое его некоторым сворачиванием.

Уравнения (25) показывают, что увеличения объемов производственных факторов $Q_i(t)$ и соответствующих им объемов выпуска продукции будут продолжаться до тех пор, пока производные $\frac{dQ_i}{dt}$ остаются положительными. Если производные $\frac{dQ_i}{dt}$ обратятся в нуль, то развитие предприятия остановится. Это произойдет в том случае, когда объемы капитализации прибыли станут равными объемам амортизационных отчислений.

Таким образом, предельные величины Q_i^F находятся в результате численного решения системы уравнений

$$-W_i\left(Q_i^F\right)+K_i \cdot PR\left(Q_1^F, Q_2^F, \ldots, Q_n^F\right)=0. \tag{28}$$

Следует отметить, что значение объема ресурса Q_F зависит от значения коэффициента капитализации K_i.

Для пропорциональных амортизаций функции $W_i=W_i\left(Q_i\right)$ являются линейными

$$W_i=A_i \cdot Q_i. \tag{29}$$

Формулы (22) принимают вид

$$\Delta Q_i^W=-\theta(t) \cdot A_i \cdot Q_i \cdot \Delta t. \tag{30}$$

Коэффициенты пропорциональной амортизации A_i выражают доли утраченных объемов ресурсов Q_i за единицу времени.

Если в силу каких-либо причин условия работы предприятия усложняются, то амортизации производственных факторов Q_i могут стать прогрессирующими. И, наоборот, если условия работы предприятия упрощаются, то амортизации производственных факторов Q_i могут стать дигрессивными. И в том и другом случае функции амортизации $W_i=W_i\left(Q_i\right)$ будут отклоняться от линейной зависимости. Такие отклонения функций $W_i=W_i\left(Q_i\right)$ можно описать с помощью величин эластичности амортизаций.

Безразмерные величины эластичностей амортизаций $EW_i = EW_i(Q_i)$ показывают, на сколько процентов изменятся функции $W_i = W_i(Q_i)$, если производственные факторы Q_i изменятся на один процент. Таким образом, функции амортизации $W_i = W_i(Q_i)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{dW_i}{dQ_i} \cdot \frac{Q_i}{W_i} = EW_i(Q_i). \quad (31)$$

Начальными условиями для уравнений (31) являются условия пропорциональности амортизаций в бесконечно малых окрестностях точек $Q_i = 0$

$$\left.\frac{dW_i}{dQ_i}\right|_{Q_i=0} = A_i. \quad (32)$$

Очевидно, что линейные функции амортизации (29) являются решениями задач Коши (31), (32) при единичных эластичностях $EW_i \equiv 1$. Отклонения функций амортизаций $W_i = W_i(Q_i)$ от линейных зависимостей могут быть только в том случае, когда эластичности $EW_i = EW_i(Q_i)$ при увеличении ресурсов Q_i будут изменяться от единичного значения до некоторого постоянного значения $EW_i = w_i$.

Если значения функций эластичностей амортизаций $EW_i = EW_i(Q_i)$ будут отклоняться от единицы в большую сторону $(w_i > 1)$, то амортизации ресурсов на предприятии будут становиться прогрессивными, если же значения функций эластичностей амортизаций $EW_i = EW_i(Q_i)$ будут отклоняться от единицы в меньшую сторону $(w_i < 1)$, то амортизации ресурсов на предприятии будут становиться дигрессивными.

В качестве функций эластичностей амортизации $EW_i = EW_i(Q_i)$ примем дробно-линейные функции

$$EW_i(Q_i) = \frac{w_i \cdot Q_i + Q_i^W}{Q_i + Q_i^W}. \quad (33)$$

Здесь Q_i^W – значения ресурсов Q_i, при которых эластичности амортизации принимают средние значения $EW_i(Q_i^W) = \frac{1 + w_i}{2}$.

Решениями задач Коши (31), (32) с формулами для эластичностей (33) будут функции

$$W_i = A_i \cdot Q_i \cdot \left(\frac{1 + Q_i^W}{Q_i + Q_i^W}\right)^{1-w_i}. \quad (34)$$

Таким образом, система уравнений (25) принимает вид

$$\frac{dQ_i}{dt} = \theta \cdot \left(-A_i \cdot Q_i \cdot \left(\frac{1 + Q_i^W}{Q_i + Q_i^W}\right)^{1-w_i} + K_i \cdot PR\right), \quad (35)$$

а система уравнений для вычисления предельных величин ресурсов Q_i^F (28) записывается в виде

$$K_i \cdot PR\left(Q_1^F, Q_2^F, \ldots, Q_n^F\right) - A_i \cdot Q_i^F \cdot \left(\frac{1 + Q_i^W}{Q_i^F + Q_i^W}\right)^{1-w_i} = 0. \quad (36)$$

Целью любого производственного предприятия является организация такого режима его работы, при котором прибыль становится максимально возможной.

Это достигается только в том случае, если все предельные величины ресурсов Q_i^F будут совпадать со значениями ресурсов Q_i^M, отвечающим максимальной прибыли PR^M.

В этом случае оптимальные коэффициенты капитализации K_i^M находятся из соотношений (20) и (36)

$$K_i^M = \frac{A_i \cdot Q_i^M \cdot \left(\dfrac{1+Q_i^W}{Q_i^M + Q_i^W} \right)^{1-w_i}}{P \cdot \prod\limits_{s=1}^{n} Q_s^M \cdot \left(\dfrac{1+Q_s^V}{Q_s^M + Q_s^V} \right)^{1-a_s} - \sum\limits_{s=1}^{n} H_s \cdot Q_s^M \cdot \left(\dfrac{1+Q_s^H}{Q_s^M + Q_s^H} \right)^{1-h_s} - TFC}. \quad (37)$$

4. Модель капитализации прибыли однофакторного производственного предприятия.

Рассмотрим важный частный случай, согласно которому число ресурсов сводится к одному $(n=1)$, а выпуск продукции предприятия обеспечивается одним фактором производства $Q_i = Q$.

В объем этого ресурса включены основной капитал, оборотный капитал, финансовый капитал, трудовые ресурсы, привлекаемые в производство материалы, технологии и инновации и т.д.

Тогда функция эластичности (5) для производственной функции записывается в виде

$$\begin{cases} EV(Q) = \dfrac{a \cdot Q + Q^V}{Q + Q^V}, \\ EV\left(Q^V\right) = \dfrac{1+a}{2}. \end{cases} \quad (38)$$

Производственные функции (7) – (9) задаются формулами

$$\begin{cases} V = P \cdot Q \cdot \left(\dfrac{1+Q^V}{Q+Q^V} \right)^{1-a}, \\ V^N = P \cdot Q, \\ V^F = P \cdot Q^a \cdot \left(1+Q^V\right)^{1-a} \end{cases}. \quad (39)$$

Величина Q^V и угловой коэффициент $R = \left.\dfrac{dV}{dQ}\right|_{Q=0}$ наклона функции $V(Q)$ в начальной точке связаны соотношениями

$$\begin{cases} R = \left(\dfrac{1+Q^V}{Q^V} \right)^{1-a}, \\ Q^V = \dfrac{1}{R^{\frac{1}{1-a}} - 1}. \end{cases} \quad (40)$$

На рисунке 1 показан график функции эластичности выпуска продукции (38) по ресурсу Q.

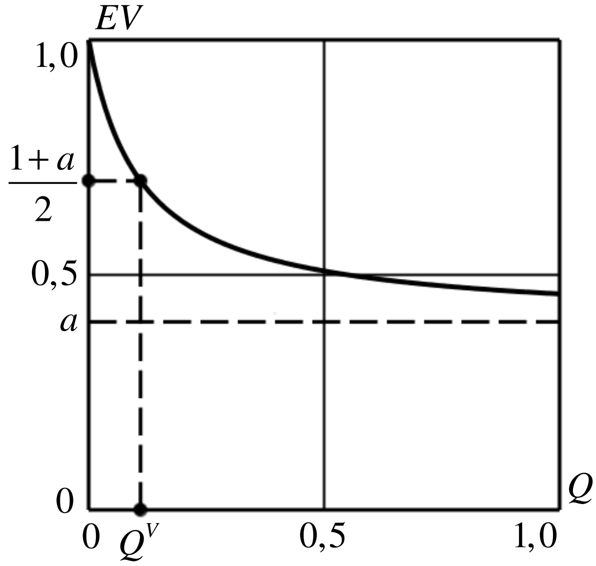

Рисунок 1 – График функций эластичности выпуска продукции по ресурсу Q, построенный по формуле (38). Расчетные значения $a = 0,4$, амортизации $Q^V = 0,1101$

Figure 1 – Graph of the elasticity functions of output by resource Q, constructed according to the formula (38). Calculated values $a = 0,4$, depreciation $Q^V = 0,1101$

На рисунке 2 показаны графики производственных функций (39).

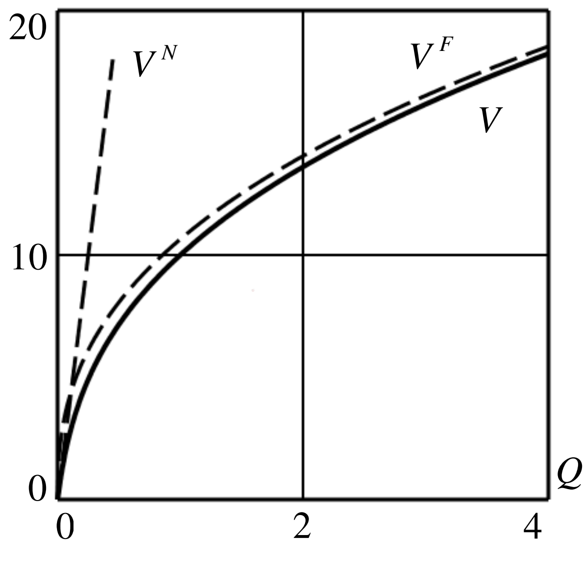

Рисунок 2 – Графики производственных функций V^N, V и V^F, построенные по формулам (39). Расчетные значения $P = 10$; $R = 40$; $a = 0,4$; $Q^V = 0,1101$

Figure 2 – Graphs of production functions V^N, V and V^F, constructed according to formulas (39). Calculated values $P = 10$; $R = 40$; $a = 0,4$; $Q^V = 0,1101$

Функция эластичности (15) для производственных издержек принимает вид

$$EH(Q) = \frac{h \cdot Q + Q^H}{Q + Q^H}. \tag{41}$$

Функция общих производственных издержек (17) принимает вид

$$TC = H \cdot Q \cdot \left(\frac{1+Q^H}{Q+Q^H} \right)^{1-h} + TFC. \tag{42}$$

На рисунке 3 показаны графики функций издержек (42) для различных значений параметра h.

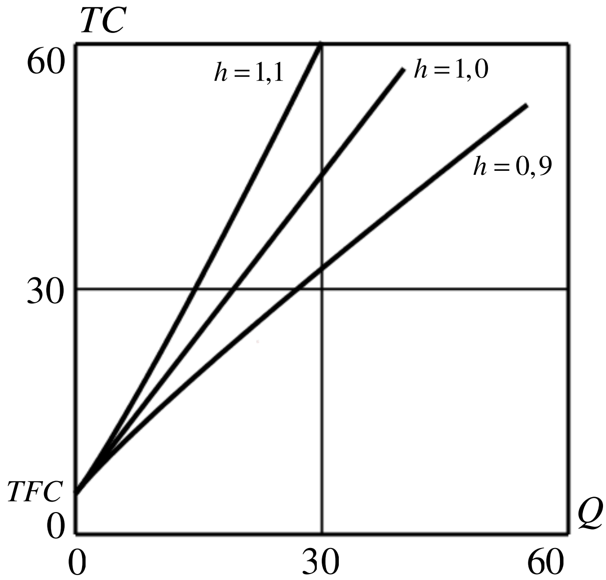

Рисунок 3 – Графики производственных функций, построенные по формуле (42) для различных значений параметра h, $Q^H = 0,95$

Figure 3 – Graphs of production functions constructed according to formula (42) for various parameter values h, $Q^H = 0,95$

Общая формула для прибыли (18) для однофакторного предприятия принимает вид

$$PR = P \cdot Q \cdot \left(\frac{1+Q^V}{Q+Q^V} \right)^{1-a} - H \cdot Q \cdot \left(\frac{1+Q^H}{Q+Q^H} \right)^{1-h} - TFC. \tag{43}$$

Система уравнений (19) для вычисления максимальной прибыли предприятия сводится к одному уравнению

$$\frac{H \cdot Q^M}{P} \cdot \frac{EH\left(Q^M\right)}{EV\left(Q^M\right)} \cdot \left(\frac{1+Q^H}{Q^M+Q^H} \right)^{1-h} = \left(\frac{1+Q^V}{Q^M+Q^V} \right)^{1-a}. \tag{44}$$

Уравнение (44) не имеет аналитического решения, и может быть решено только численно. С помощью численного решения уравнения (44) Q^M вычисляется максимальное значение прибыли PR^M

$$PR^M = P \cdot Q^M \cdot \left(\frac{1+Q^V}{Q^M+Q^V} \right)^{1-a} - H \cdot Q^M \cdot \left(\frac{1+Q^H}{Q^M+Q^H} \right)^{1-h} - TFC. \tag{45}$$

Предельное значение ресурса Q^R, при котором прибыль предприятия обращается в нуль находится из условия $PR\left(Q^R\right) = 0$.

На рисунке 4 показаны графики функции прибыли (43).

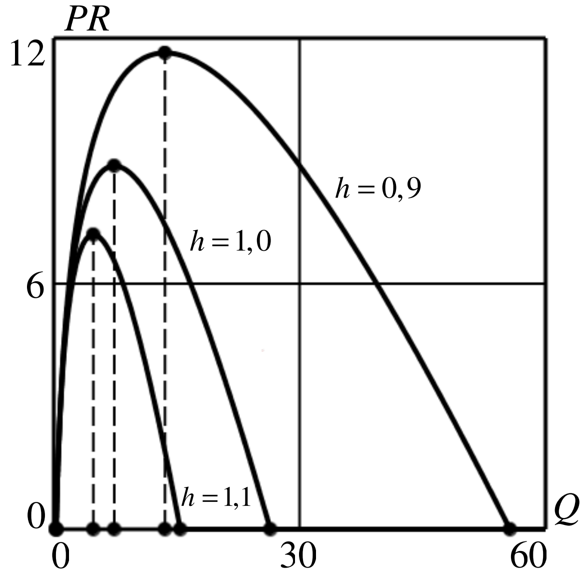

Рисунок 4 – Графики функции прибыли PR, построенные по формуле (43). Цифры у кривых – значения параметра h. Расчетные значения: $P = 10$; $R = 40$; $a = 0,4$; $H = 1,3$; $TFC = 5$; $Q^H = 0,95$

Figure 4 – Graphs of the profit function PR, constructed according to the formula (43). The figures for the curves are the values of the parameter h. Calculated values: $P = 10$; $R = 40$; $a = 0,4$; $H = 1,3$; $TFC = 5$; $Q^H = 0,95$

Система уравнений динамики роста производственных факторов для однофакторного предприятия (35) сводится к одному уравнению

$$\frac{dQ}{dt} = \theta \cdot \left(K \cdot \left(P \cdot Q \cdot \left(\frac{1+Q^V}{Q+Q^V} \right)^{1-a} - H \cdot Q \cdot \left(\frac{1+Q^H}{Q+Q^H} \right)^{1-h} - TFC \right) - A \cdot Q \cdot \left(\frac{1+Q^W}{Q+Q^W} \right)^{1-w} \right), \quad (46)$$

с начальным условием

$$Q\big|_{t=0} = Q(0) = Q^N. \quad (47)$$

Формула для оптимального коэффициента капитализации K^M следует из формул (37)

$$K^M = \frac{A \cdot Q \cdot \left(\frac{1+Q^W}{Q+Q^W} \right)^{1-w}}{P \cdot Q \cdot \left(\frac{1+Q^V}{Q+Q^V} \right)^{1-a} - H \cdot Q \cdot \left(\frac{1+Q^H}{Q+Q^H} \right)^{1-h} - TFC}. \quad (48)$$

Оптимальной организацией деятельности производственного предприятия является такой режима его работы, при котором коэффициент капитализации рассчитывается по формуле (48), функция прибыли стремится к своему максимальному значению $PR(t) \to PR^M$, а функция ресурса $Q(t)$ стремиться к значению Q^M, соответствующему этому максимальному значению прибыли. При выборе любого другого коэффициента капитализации K^F функция прибыли будет стремится к другому меньшему предельному значению $PR(t) \to PR^F$, соответствующему другому предельному значению ресурса Q^F.

На рисунке 5 показано сравнение трех вариантов графиков функций объемов прибыли $PR(t)$ построенных по формуле (43) и результатам численного решения задачи Коши (46), (47) для коэффициентов капитализации K^F и K^M. Первый вариант соответствует дигрессивным издержкам и дигрессивной амортизации предприятия, второй вариант соответствует пропорциональным издержкам и пропорциональной амортизации предприятия, третий вариант соответствует прогрессивным издержкам и прогрессивной амортизации предприятия.

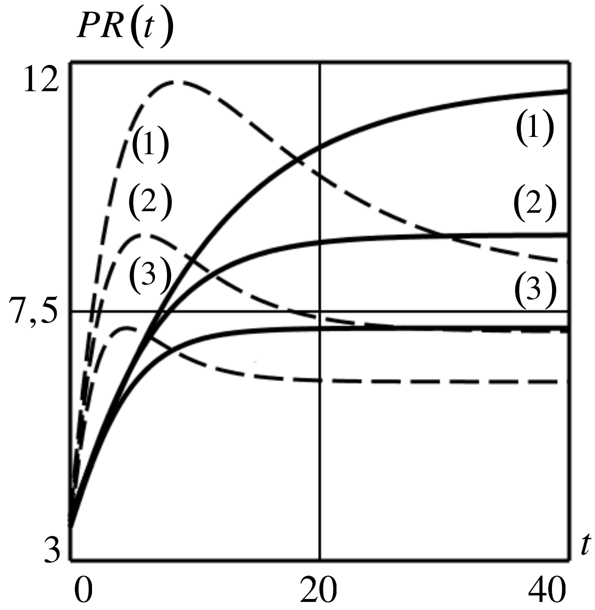

Рисунок 5 – Сравнение трех вариантов графиков функций объемов прибыли, построенных по формуле (43) и результатам численного решения задачи Коши (46), (47) для коэффициентов капитализации K^F и K^M. Сплошные линии соответствуют коэффициентам капитализации K_i^M, штриховые линии соответствуют коэффициентам капитализации K_i^F. Расчетные значения: $P=10$; $R=40$; $a=0,4$; $H=1,3$; $TFC=5$; $Q^H=0,95$; $h_1=0,9$; $w_1=0,8$; $K_1^M=0,0682$; $K_1^F=0,2$; $h_2=1,0$; $w_2=1,0$; $K_2^M=0,0831$; $K_2^F=0,2$; $h_3=1,1$; $w_3=1,2$; $K_3^M=0,0955$; $K_2^F=0,2$

Figure 5 – Comparison of three variants of graphs of profit volume functions based on the formula (43) and the results of numerical solution of the Cauchy problem (46), (47) for capitalization coefficients K^F and K^M. Solid lines correspond to capitalization coefficients K_i^M, dashed lines correspond to capitalization coefficients K_i^F. Calculated values: $P=10$; $R=40$; $a=0,4$; $H=1,3$; $TFC=5$; $Q^H=0,95$; $h_1=0,9$; $w_1=0,8$; $K_1^M=0,0682$; $K_1^F=0,2$; $h_2=1,0$; $w_2=1,0$; $K_2^M=0,0831$; $K_2^F=0,2$; $h_3=1,1$; $w_3=1,2$; $K_3^M=0,0955$; $K_2^F=0,2$

Графики функций объемов прибыли на рисунке 5 показывают, что коэффициенты капитализации $K_1^F=K_2^F=K_3^F=0,2$ выбраны неудачно. После достижения максимального значения прибыль предприятия начинает снижаться.

На рисунке 6 показаны три варианта графиков функций объемов прибыли $PR(t)$ построенных по формулам (27), (43) и результатам численных решений задач Коши (46), (47) для случаев пропорциональных издержек, регрессивной, пропорциональной и прогрессивной амортизаций и стабильной работы предприятия $(\omega=0)$.

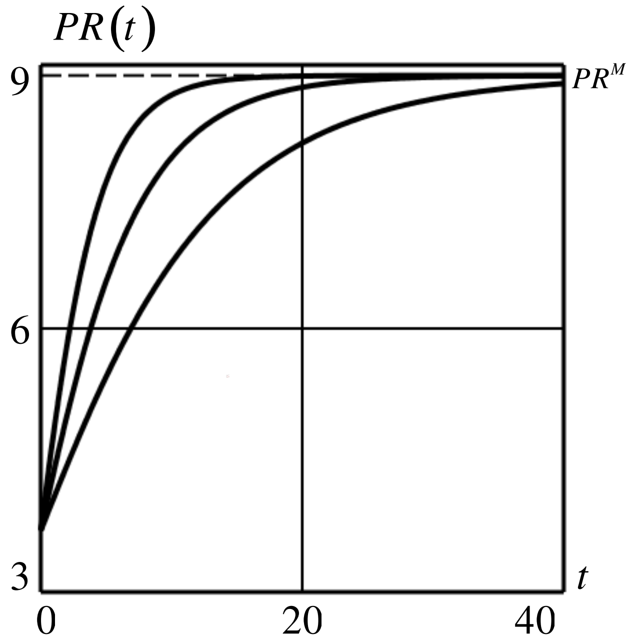

Рисунок 6 – Три варианта графиков функций объема прибыли предприятия $PR(t)$ построенных по формулам (27), (43) и результатам численных решений задач Коши (46), (47) для случаев пропорциональных издержек, регрессивной, пропорциональной и прогрессивной амортизаций и стабильной работы предприятия $(\omega = 0)$. Расчетные значения: $P = 10$; $R = 40$; $a = 0,4$; $H_N = 10$; $H_F = 1,3$; $TFC = 5,0$; $A = 0,1$; $\omega = 0$

Figure 6 – Three variants of graphs of the company's profit volume functions $PR(t)$ constructed according to formulas (27), (43) and the results of numerical solutions to Cauchy problems (46), (47) for cases of proportional costs, regressive, proportional and progressive depreciation and stable operation of the enterprise $(\omega = 0)$. Calculated values: $P = 10$; $R = 40$; $a = 0,4$; $H_N = 10$; $H_F = 1,3$; $TFC = 5,0$; $A = 0,1$; $\omega = 0$

На рисунке 7 показаны три варианта графиков функций объемов прибыли $PR(t)$ построенных по формулам (27), (43) и результатам численных решений задач Коши (46), (47) для случаев пропорциональных издержек, регрессивной, пропорциональной и прогрессивной амортизаций и временной приостановки работы предприятия работы предприятия $\omega = 1,0$; $t^* = 20$; $\sigma = 4,0$.

На рисунке 8 показаны три варианта графиков функций объемов прибыли $PR(t)$ построенных по формулам (27), (43) и результатам численных решений задач Коши (46), (47) для случаев пропорциональных издержек, регрессивной, пропорциональной и прогрессивной амортизаций и частичного сворачивания работы предприятия $\omega = 1,5$; $t^* = 20$; $\sigma = 4,0$.

Заключение

1. Предложены новые экономико-математические модели динамики развития многофакторных предприятий, восстановление производственных ресурсов которых обеспечивается за счет капитализации прибыли.

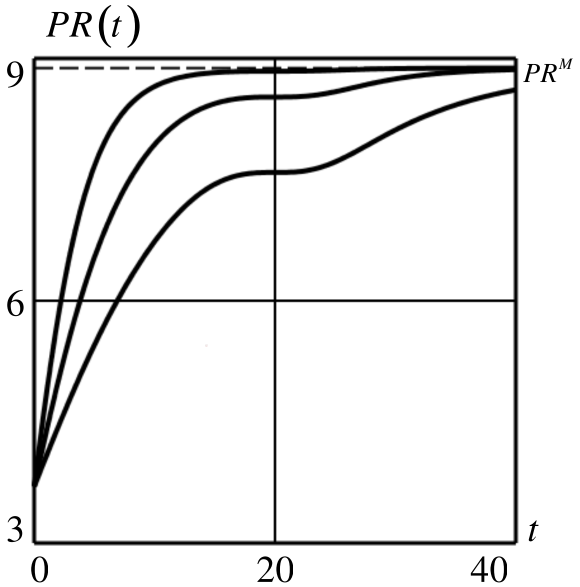

Рисунок 7 – Три варианта графиков функций объема прибыли предприятия $PR(t)$ построенных по формулам (27), (43) и результатам численных решений задач Коши (46), (47) для случаев пропорциональных издержек, регрессивной, пропорциональной и прогрессивной амортизаций и временной приостановки работы предприятия работы предприятия $\omega = 1,0$; $t^* = 20$; $\sigma = 4,0$

Figure 7 – Three variants of graphs of the company's profit volume functions $PR(t)$ constructed according to formulas (27), (43) and the results of numerical solutions to Cauchy problems (46), (47) for cases of proportional costs, regressive, proportional and progressive depreciation and temporary suspension of the company's work $\omega = 1,0$; $t^* = 20$; $\sigma = 4,0$

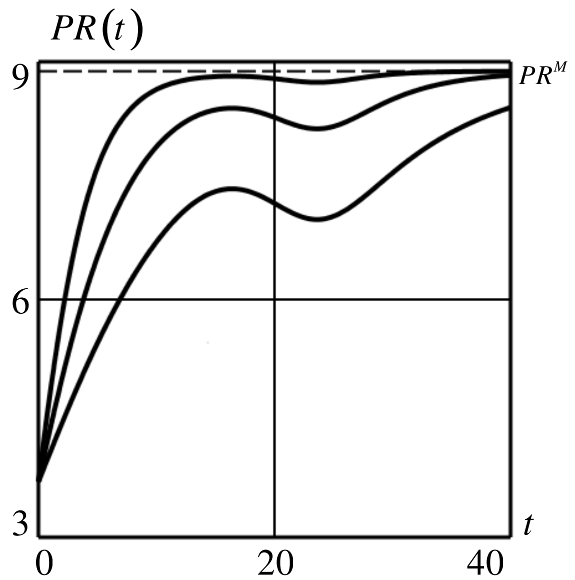

Рисунок 8 – Три варианта графиков функций объема прибыли предприятия $PR(t)$ построенных по формулам (27), (43) и результатам численных решений задач Коши (46), (47) для случаев пропорциональных издержек, регрессивной, пропорциональной и прогрессивной амортизаций и частичного сворачивания работы предприятия $\omega = 1,5$; $t^* = 20$; $\sigma = 4,0$

Figure 8 – Three variants of graphs of the company's profit volume functions $PR(t)$ constructed according to formulas (27), (43) and the results of numerical solutions to Cauchy problems (46), (47) for cases of proportional costs, regressive, proportional and progressive depreciation and partial shutdown of the company $\omega = 1,5$; $t^* = 20$; $\sigma = 4,0$

2. Особенности этих моделей заключаются в том, что для расчета прибыли предприятия используются мультипликативные многофакторные производственные функции с переменными эластичностями по ресурсам, функции, описывающие пропорциональные, прогрессивные и дигрессивные объемы производственных издержек, и функции, описывающие пропорциональные, прогрессивные и дигрессивные объемы амортизационных отчислений.

3. Для прогнозирования объемов производственных издержек и объемов амортизационных отчислений установлены системы дифференциальных уравнений.

4. Показано, что эффективность динамики развития предприятия зависит от выбора значений коэффициентов капитализации. При неудачном выборе этих коэффициентов производственные мощности предприятий не способны выйти на режим работы с максимальной прибылью.

5. Получена система уравнений для вычисления эффективных коэффициентов капитализации, при которых предприятия гарантированно выходят на режим работы с максимальной прибылью.

6. Рассмотрены варианты динамики развития предприятий для пропорциональных, прогрессивных и дигрессивных объемов амортизационных отчислений.

7. Показаны различные режимы работы предприятий, которым относятся стабильный выпуск продукции предприятиями, временная приостановка работы предприятий на время его технического переоснащения, и временное частичное сворачивание производства.

Библиографический список

1. Harrod R.F. The trade cycle. Oxford: Clarendon Press, 1936. URL: https://archive.org/details/tradecycle0000unse.

2. Domar E.D. Capital expansion, rate of growth, and employment // Econometrica, April 1946, Vol. 14, № 2. P. 137–147. DOI: http://doi.org/10.2307/1905364.

3. Solow R.M. A Contribution to the Theory of Economic Growth // The Quarterly Journal of Economics. February 1956, Vol. 70, № 1. P. 65–94. DOI: http://doi.org/10.2307/1884513.

4. Swan T.W. Economic Growth and Capital Accumulation // Economic Record. 1956, Vol. 32, issue 2. Pp. 334–361. DOI: http://doi.org/10.1111/j.1475-4932.1956.tb00434.x.

5. Kuznets S. Long Swings in the Growth of Population and in Related Economic Variables // Proceedings of the American Philosophical Society. 1958. Vol. 102. P. 25–52.

6. Kuznets S. Quantitative Aspects of the Economic Growth of Nations. Paper VIII: Distribution of Income by Size // Economic Development and Cultural Change. 1963. Vol. 11, no 2. Part 2. Pp. 1–80. DOI: http://doi.org/10.1086/450006.

7. Uzawa H. Optimum Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth // International Economic Review. 1965. Vol. 6, no. 1. P. 18–31. URL: http://links.jstor.org/sici?sici=0020-6598%28196501%296%3A1%3C18%3AOTCIAA%3E2.0.CO%3B2-Y.

8. Arrow K.J. The economic implications of learning by doing // The Review of Economic Studies. 1962. Vol. 29, issue 3. P. 155-173. DOI: http://doi.org/10.2307/2295952.

9. Denison E.F. The Contribution of Capital to Economic Growth // The American Economic Review. 1980. Vol. 70, no. 2. Pp. 220–224. DOI: http://doi.org/10.1007/978-1-349-04021-6_3.

10. Romer P.M. Increasing Returns and Long-run Growth // Journal of Political Economy. October 1986, Vol. 94, no. 5. P. 1002–1037. DOI: http://doi.org/10.1086/261420.

11. Lucas R.E. On the Mechanics of Economic Development // Journal of Monetary Economics. July 1988, Vol. 22, no 1. P. 3–42. DOI: http://doi.org/10.1016/0304-3932%2888%2990168-7.

12. Romer P.M. Endogenous Technological Change // Journal of Political Economy. October 1990, Vol. 98, no. 5. Part 2. P. 71–102. DOI: http://doi.org/10.1086/261725.

13. Grossman G.M., Helpman E. Innovation and Growth in the Global Economy. Cambridge, MA: MIT Press. 1991. URL: https://archive.org/details/innovationgrowth00gros; https://books.google.ru/books?id=4ikgmM2vLJ0C&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false.

14. Mankiw N., Romer D., Weil D. A Contribution to the Empirics of Economic Growth // Quarterly Journal of Economics. 1992. Vol. 107, no 2. P. 407–437. URL: http://piketty.pse.ens.fr/files/MankiwEtal92.pdf.

15. Grossman G.M., Helpman E. Endogenous Innovation in the Theory of Growth // Journal of Economic Perspectives. 1994. Vol. 8, no. 1. P. 23–44. DOI: http://dx.doi.org/10.1257/jep.8.1.23.

16. Barro R.J., Sala-i-Martin X. Economic Growth. Cambridge MA: MIT Press, 1995. 672 p. URL: http://piketty.pse.ens.fr/files/BarroSalaIMartin2004.pdf.

17. Bruno M., Easterly W. Inflation Crises and Long-Run Growth: NBER Working Papers 5209 // National Bureau of Economic Research, Inc, 1995. Available at: http://www.nber.org>papers/w5209. (Дата обращения: 06.03.2012).

18. Gong G., Greiner A., Semmler W. The Uzawa – Lucas model without scale effects: theory and empirical evidence // Structural Change and Economic Dynamics. 2004. Vol. 15, issue 4. P. 401–420. DOI: http://doi.org/10.1016/j.strueco.2003.10.002.

19. Нижегородцев Р.М. Модели логистической динамики как инструмент экономического анализа и прогнозирования // Моделирование экономической динамики: риск, оптимизация, прогнозирование. Москва, 1997. С. 34–51.

20. Бадаш Х.З. Экономико-математическая модель экономического роста предприятия // Вестник Удмуртского университета. Серия Экономика и право. 2009. № 1. С. 5–9. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=11700881. EDN: https://www.elibrary.ru/jwbhyv.

21. Королев А.В., Матвеенко В.Д. О структуре равновесных нестационарных траекторий в модели эндогенного роста Лукаса // Автоматика и телемеханика. 2006. № 4. С. 126–136. URL: https://www.mathnet.ru/rus/at1170.

22. Кузнецов Ю.А., Мичасова О.В. Сравнительный анализ применения пакетов имитационного моделирования и систем компьютерной математики для анализа моделей теории экономического роста // Экономический анализ: теория и практика. 2007. Т. 6, № 5 (86). С. 23–30. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/sravnitelnyy-analiz-primeneniya-paketov-imitatsionnogo-modelirovaniya-i-sistem-kompyuternoy-matematiki-dlya-analiza-modeley.

23. Кузнецов Ю.А., Мичасова О.В. Обобщенная модель экономического роста с учетом накопления человеческого капитала // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2012. № 4. С. 46–57. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=18079557. EDN: https://www.elibrary.ru/pfqnbt.

24. Прасолов А.В. Математические методы экономической динамики. Санкт-Петербург: Лань, 2015. 352 с. URL: https://klex.ru/uzv.

25. Ильина Е.А., Сараев Л.А. К теории производственных функций, учитывающей изменение эластичностей выпуска по производственным ресурсам // Экономика и предпринимательство. 2018. № 10 (99). С. 145–150. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=35654399. EDN: https://www.elibrary.ru/sadnef.

26. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Показатели нелинейной динамики и предельное состояние производственного предприятия // Экономика и предпринимательство. 2018. № 11 (100). С. 1237–1241. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36512728. EDN: https://www.elibrary.ru/ypfjhn.

27. Сараев А.Л. Уравнения динамики нестабильных многофакторных экономических систем, учитывающих эффект запаздывания внутренних инвестиций // Казанский экономический вестник. 2015. № 3 (17). С. 68–73. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=24899060. EDN: https://www.elibrary.ru/uywnhn.

28. Ильина Е.А., Сараев А.Л., Сараев Л.А. К теории модернизации производственных предприятий, учитывающей запаздывание внутренних инвестиций // Экономика и предпринимательство, 2017. № 9–4 (86). С. 1130–1134. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=30782945. EDN: https://www.elibrary.ru/zxqfaf.

29. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Экономико-математическая модель развития производственных предприятий, учитывающая эффект запаздывания внутренних инвестиций // Экономика и предпринимательство. 2019. № 5 (106). С. 1316–1320. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=39238012. EDN: https://www.elibrary.ru/aigtur.

30. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Многофакторная математическая модель развития производственного предприятия за счет внутренних и внешних инвестиций // Вестник Самарского университета. Экономика и управление. 2020. Т. 11, № 2. С. 157–165. DOI: https://doi.org/10.18287/2542-0461-2020-11-2-157-165. EDN: https://www.elibrary.ru/wdbmkv.

31. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Математические модели стохастической динамики развития предприятий // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки, 2020. Т. 24, № 2. С. 343–364. DOI: http://doi.org/10.14498/vsgtu1700. EDN: https://www.elibrary.ru/mltmba.

32. Ilyina E.A., Saraev L.A. Predicting the dynamics of the maximum and optimal profits of innovative enterprises // Journal of Physics: Conference Series. The Fifth Workshop on Computer Modelling in Decision Making (CMDM 2020). 2021. Vol. 1784, P. 012002. DOI: http://doi.org/10.1088/1742-6596/1784/1/012002. EDN: https://www.elibrary.ru/xwxltx.

33. Saraev A.L., Saraev L.A. Mathematical models of the development of industrial enterprises, with the effect of lagging internal and external investments // Journal of Physics: Conference Series. The Fifth Workshop on Computer Modelling in Decision Making (CMDM 2020). 2021. Vol. 1784, P. 012010. DOI: http://doi.org/10.1088/1742-6596/1784/1/012010. EDN: https://www.elibrary.ru/qvnrzq.

References

1. Harrod R.F. The trade cycle. Oxford: Clarendon Press, 1936. Available at: https://archive.org/details/tradecycle0000unse.

2. Domar E.D. Capital expansion, rate of growth, and employment. *Econometrica*, April 1946, vol. 14, no. 2, pp. 137–147. DOI: http://doi.org/10.2307/1905364.

3. Solow R.M. A Contribution to the Theory of Economic Growth. *The Quarterly Journal of Economics*, February 1956, vol. 70, no. 1, pp. 65–94. DOI: http://doi.org/10.2307/1884513.

4. Swan T.W. Economic Growth and Capital Accumulation. Economic Record, 1956, vol. 32, issue 2, pp. 334–361. DOI: http://doi.org/10.1111/j.1475-4932.1956.tb00434.x.

5. Kuznets S. Long Swings in the Growth of Population and in Related Economic Variables // Proceedings of the American Philosophical Society. 1958. Vol. 102. P. 25–52.

6. Kuznets S. Quantitative Aspects of the Economic Growth of Nations. Paper VIII: Distribution of Income by Size. *Economic Development and Cultural Change*, 1963, vol. 11, no. 2, part 2, pp. 1–80. DOI: http://doi.org/10.1086/450006.

7. Uzawa H. Optimum Technical Change in an Aggregative Model of Economic Growth. *International Economic Review*, 1965, vol. 6, no. 1, pp. 18–31. Available at: http://links.jstor.org/sici?sici=0020-6598%28196501%296%3A1%3C18%3AOTCIAA%3E2.0.CO%3B2-Y.

8. Arrow K.J. The economic implications of learning by doing. *The Review of Economic Studies*, 1962, vol. 29, issue 3, pp. 155–173. DOI: http://doi.org/10.2307/2295952.

9. Denison E.F. The Contribution of Capital to Economic Growth. *The American Economic Review*, 1980, vol. 70, no. 2, pp. 220–224. DOI: http://doi.org/10.1007/978-1-349-04021-6_3.

10. Romer P.M. Increasing Returns and Long-run Growth. *Journal of Political Economy*, October 1986, vol. 94, number 5, pp. 1002–1037. DOI: http://doi.org/10.1086/261420.

11. Lucas R.E. On the Mechanics of Economic Development. *Journal of Monetary Economics*, July 1988, vol. 22, pp. 3-42. DOI: http://doi.org/10.1016/0304-3932%2888%2990168-7.

12. Romer P.M. Endogenous Technological Change. *Journal of Political Economy*, October 1990, vol. 98, number 5, part 2, pp. 71-102. DOI: http://doi.org/10.1086/261725.

13. Grossman G.M., Helpman E. Innovation and Growth in the Global Economy. Cambridge, MA: MIT Press. 1991. Available at: https://archive.org/details/innovationgrowth00gros; https://books.google.ru/books?id=4ikgmM2vLJ0C&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false.

14. Mankiw N., Romer D., Weil D. A Contribution to the Empirics of Economic Growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 1992, vol. 107, no 2, pp. 407–437. Available at: http://piketty.pse.ens.fr/files/MankiwEtal92.pdf.

15. Grossman G.M., Helpman E. Endogenous Innovation in the Theory of Growth. *Journal of Economic Perspectives*, 1994, vol. 8, no. 1, pp. 23–44. DOI: http://dx.doi.org/10.1257/jep.8.1.23.

16. Barro R.J., Sala-i-Martin X. Economic Growth. Cambridge MA: MIT Press, 1995, 672 p. Available at: http://piketty.pse.ens.fr/files/BarroSalaIMartin2004.pdf.

17. Bruno M., Easterly W. Inflation Crises and Long-Run Growth: NBER Working Papers 5209. *Retrieved from the official website of the National Bureau of Economic Research, Inc, 1995.* Available at: http://www.nber.org>papers/w5209 (accessed 06.03.2012)

18. Gong G., Greiner A., Semmler W. The Uzawa – Lucas model without scale effects: theory and empirical evidence. Structural Change and Economic Dynamics. 2004. Vol. 15, issue 4, pp. 401–420. DOI: http://doi.org/10.1016/j.strueco.2003.10.002.

19. Nizhegorodtsev R.M. Models of logistics dynamics as a tool for economic analysis and forecasting. In: *Modeling of economic dynamics: risk, optimization, forecasting*. Moscow, 1997, pp. 34–51. (In Russian).

20. Badash Kh.Z. The economic-mathematical model of the economic growth of enterprises. *Bulletin of Udmurt University. Series Economics and Law*, 2009, no. 1, pp. 5–9. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=11700881. EDN: https://www.elibrary.ru/jwbhyv. (In Russ.)

21. Korolev A.V., Matveenko V.D. Structure of equilibrium time-varying trajectories in the Lucas endogenous growth model. *Automation and Remote Control*, 2006, vol. 67, issue 4, pp. 624–633. DOI: https://doi.org/10.1134/S0005117906040102. (In Russ.)

22. Kuznetsov Yu.A., Michasova O.V. Comparative analysis of the application of simulation packages and computer mathematics systems for the analysis of models of the theory of economic growth. *Economic Analysis: Theory and Practice*, 2007, vol. 6, no. 5 (86), pp. 23–30. Available at: https://cyberleninka.ru/article/n/sravnitelnyy-analiz-primeneniya-paketov-imitatsionnogo-modelirovaniya-i-sistem-kompyuternoy-matematiki-dlya-analiza-modeley. (In Russ.)

23. Kuznetsov Yu.A., Michasova O.V. The generalized model of economic growth with human capital accumulation. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2012, no. 4, pp. 46–57. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=18079557. EDN: https://www.elibrary.ru/pfqnbt. (In Russ.)

24. Prasolov A.V. Mathematical methods of economic dynamics. Saint Petersburg: Lan', 2015, 352 p. Available at: https://klex.ru/uzv. (In Russ.)

25. Ilyina E.A., Saraev L.A. To the theory of production functions which takes into account the change in the elasticities of output by production resources. *Journal of Economy and entrepreneurship*, 2018, no. 10 (99), pp. 145–150. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=35654399. EDN: https://www.elibrary.ru/sadnef. (In Russ.)

26. Saraev A.L., Saraev L.A. Indicators of nonlinear dynamics and the limiting condition of a manufacturing enterprise. *Journal of Economy and entrepreneurship*, 2018, no. 11 (100), pp. 1237–1241. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36512728. EDN: https://www.elibrary.ru/ypfjhn. (In Russ.)

27. Saraev A.L. Equations of dynamics of unstable multifactor economic systems taking into account retardation effects of internal investment. *Kazan Economic Bulletin*, 2015, no. 3 (17), pp. 68–73. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=24899060. EDN: https://www.elibrary.ru/uywnhn. (In Russ.)

28. Ilyina E.A., Saraev A.L., Saraev L.A. To the theory of modernization of manufacturing enterprises, taking into account the lag of domestic investment. *Journal of Economy and entrepreneurship*, 2017, no. 9–4 (86), pp. 1130–1134. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=30782945. EDN: https://www.elibrary.ru/zxqfaf. (In Russ.)

29. Saraev A.L., Saraev L.A. Economic-mathematical model for the development of manufacturing enterprises, taking into account the effect of the lag of domestic investment. *Journal of Economy and entrepreneurship*, 2019, no. 5 (106), pp. 1316–1320. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=39238012. EDN: https://www.elibrary.ru/aigtur. (In Russ.)

30. Saraev A.L., Saraev L.A. Multi-factor mathematical model of development of a production enterprise accounted by internal and external investments. *Vestnik Samarskogo universiteta. Ekonomika i upravlenie = Vestnik of Samara University. Economics and Management*, 2020, vol. 11, no. 2, pp. 157–165. DOI: http://doi.org/10.18287/2542-0461-2020-11-2-157-165. EDN: https://www.elibrary.ru/wdbmkv. (In Russ.)

31. Saraev A.L., Saraev L.A. Stochastic calculation of curves dynamics of enterprise. *Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2020, vol. 24, no. 2, pp. 343–364. DOI: http://doi.org/10.14498/vsgtu1700. EDN: https://www.elibrary.ru/mltmba. (In Russ.)

32. Ilyina E.A., Saraev L.A. Predicting the dynamics of the maximum and optimal profits of innovative enterprises. *Journal of Physics: Conference Series. The Fifth Workshop on Computer Modelling in Decision Making (CMDM 2020)*, 2021, vol. 1784, p. 012002. DOI: http://doi.org/10.1088/1742-6596/1784/1/012002. EDN: https://www.elibrary.ru/xwxltx.

33. Saraev A.L., Saraev L.A. Mathematical models of the development of industrial enterprises, with the effect of lagging internal and external investments. *Journal of Physics: Conference Series. The Fifth Workshop on Computer Modelling in Decision Making (CMDM 2020)*. 2021. Vol. 1784, p. 012010. DOI: http://doi.org/10.1088/1742-6596/1784/1/012010. EDN: https://www.elibrary.ru/qvnrzq.