



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

УДК 339.43

Дата поступления: 05.09.2022
рецензирования: 12.10.2022
принятия: 06.12.2022

**Современные методы решения задачи оптимального управления
в экономике**

Ю.В. Матвеева

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева,
г. Самара, Российская Федерация

E-mail: dr.yumatveeva@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4755-226X>

М.Т. Чигванда

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева,
г. Самара, Российская Федерация

E-mail: marlvin.chigwanda@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9707-6033>

Аннотация: В данной работе дана современная постановка задачи оптимального управления, после чего проведен обзор методов, применяемых в настоящее время при решении задачи оптимального управления в экономике, с акцентом на численные методы. Приведены и объяснены наиболее важные проблемы применения численных методов при решении задачи оптимального управления. Затем в статье перечислены и объяснены наиболее распространенные вычислительные методы решения задачи оптимального управления, которые применяются в современной экономической сфере, насколько далеко эти методы продвинулись с точки зрения достижения своих целей и предоставления решений, трудности в реализации этих методов и сопутствующие ограничения. Перечислены новейшие разработки программного обеспечения и программ, которые начинают использоваться в основном экономистами при решении некоторых наиболее распространенных задач оптимального управления, а также объяснены их преимущества и ограничения. Наконец, сделан общий анализ некоторых методов следующего поколения и будущего задачи оптимального управления в целом.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения; математические методы в экономике; оптимальное управление; численные методы; вычислительные методы.

Цитирование. Матвеева Ю.В., Чигванда М.Т. Современные методы решения задачи оптимального управления в экономике // Вестник Самарского университета. Экономика и управление. 2022. Т. 13, № 4. С. 97–105. DOI: <http://doi.org/10.18287/2542-0461-2022-13-4-97-105>.

Информация о конфликте интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Матвеева Ю.В., Чигванда М.Т., 2022

Юлия Валерьевна Матвеева – кандидат экономических наук, доцент кафедры менеджмента и организации производства, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Марлвин Татенда Чигванда – аспирант кафедры менеджмента и организации производства, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

SCIENTIFIC ARTICLE

Submitted: 05.09.2022
Revised: 12.10.2022
Accepted: 06.12.2022

Modern methods for solving the optimal control problem in economics

Yu.V. Matveeva

Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: dr.ymatveeva@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4755-226X>

M.T. Chigwanda

Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: marlvin.chigwanda@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9707-6033>

Abstract: The modern formulation of the optimal control problem is given, following which a survey of the methods currently applied in solving the optimal control problem in economics is conducted, with a focus given to numerical methods. The most important problems in the application of numerical methods in solving the optimal control problem are given and explained. The article then lists and explains the most common computational methods of solving the optimal control problem that are being applied in today's economic sphere, how far these methods go in terms of achieving their objectives and providing solutions, the difficulties in implementing these methods, and the associated limitations. The latest developments in software and programs that are beginning to be used by mainly economists in solving some of the most common optimal control problems are listed, and their advantages and limitations are explained. Lastly, a general analysis of some of the next-generation methods and the future of the optimal control problem in general is made.

Key words: ordinary differential equations; mathematical methods in economics; optimal control; numerical methods; computational methods.

Citation. Matveeva Yu.V., Chigwanda M.T. Modern methods for solving the optimal control problem in economics. *Vestnik Samarskogo universiteta. Ekonomika i upravlenie = Vestnik of Samara University. Economics and Management*, 2022, vol. 13, no. 4, pp. 97–105. DOI: <http://doi.org/10.18287/2542-0461-2022-13-4-97-105>. (In Russ.)

Conflict of interest information: authors declare no conflict of interest.

© Matveeva Yu.V., Chigwanda M.T., 2022

Yuliya V. Matveeva – Candidate of Economics, associate professor of the Department of General and Operations Management, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Marlvin T. Chigwanda – postgraduate student of the Department of General and Operations Management, Samara National Research University, 34, Moskovskoe shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Научная новизна исследования

Стремительный рост цифровизации и применение цифровых методов искусственного интеллекта в экономической сфере привели к развитию новых численных методов решения задачи оптимального управления, использующих возможности вычислительных и математических программ для поиска решений экономических задач, которые ранее считались слишком сложными для решения даже с помощью численных методов. Эта работа важна тем, что она дает представление о современных численных методах, основанных на используемом компьютерном программном обеспечении, исследует некоторые из основных преимуществ и выгод и анализирует, как эти методы могут быть улучшены в будущем. Таким образом, эта работа послужит основой для дальнейшего развития методов следующего поколения (next-generation methods), которые будут более способными и более эффективными в численном решении задачи оптимального управления в экономике.

Введение

Оптимальное управление – это применение математических принципов к заданной динамической системе с целью определения ее входных параметров, позволяющих оптимизировать функционирование системы за счет минимизации или максимизации ее выходных параметров, описывается в виде заданного индекса производительности, полностью удовлетворяя заданным ограничениям системы. Другими словами, для данной динамической системы с заданными ограничениями оптимальное управление стремится максимизировать или минимизировать индекс производительности этой системы с использованием математических методов. Для описания этой задачи оптимизации использу-

ется термин «задача оптимального управления» (ЗОП). Принцип оптимального управления был впервые предложен русским математиком Львом Семеновичом Понтрягиным в 1950-х годах, а затем сформулирован в виде Принципа максимума Понтрягина, который Понтрягин и его ученики использовали для поиска метода управления динамической системой, переходящей из одного состояния в другое при наличии заранее заданных ограничений состояния или входных элементов управления. Позже в своей статье 1969 года Дорфман [1] вывел метод решения задачи оптимального управления, рассмотрев экономический аспект проблемы.

Общая математическая постановка задачи оптимального управления

Задача оптимального управления обычно записывается как состоящая из двух функций:

- 1) $x(t)$ – функция состояния, описывающая поведение системы, u ;
- 2) $u(t)$ – функция управления, направляющая эволюцию системы от одного шага к другому.

Поиску путей решения задачи оптимального управления наиболее эффективным способом посвящено множество различных работ [2–7]. Однако эти методы либо не позволяют достичь аналитического решения задачи оптимального управления, либо метод оказывается слишком сложным для решения. На этом фоне исследователи обратились к численным методам решения задачи оптимального управления, основываясь на Принципе максимума Понтрягина. Здесь численные методы делятся на два типа: прямые методы и косвенные методы. Принцип максимума Понтрягина приводит к краевой и нелинейной задаче. В косвенном методе необходимо извлекать необходимые условия оптимальности в аналитическом виде, что часто трудно решить. Кроме того, область сходимости косвенного метода невелика, и, таким образом, в некоторых случаях, если начальное предположение выбрано неправильно, метод не будет сходиться. Поэтому для исследования численного поведения задачи оптимального управления используется прямой метод. Этот метод преобразует задачу оптимального управления в задачу алгебраической оптимизации.

Ниже приводится стандартная постановка задачи оптимального управления.

Задача оптимального управления: Определить состояние (эквивалентно, траектория или путь), $x(t) \in \mathbb{R}^n$, управление $u(t) \in \mathbb{R}^m$, вектор статических параметров $p \in \mathbb{R}^q$, начальное время, $t_0 \in \mathbb{R}$, и терминальное время, $t_f \in \mathbb{R}$ (где $t \in [t_0, t_f]$ — независимая переменная), которая оптимизирует индекс производительности

$$J = \Phi [x(t_0), t_0, x(t_f), t_f ; \mathbf{p}] + \int_{t_0}^{t_f} L [x(t), \mathbf{u}(t), t ; \mathbf{p}] dt \quad (1)$$

с учетом динамических ограничений (т. е. ограничения дифференциального уравнения),

$$\dot{x}(t) = f [x(t), \mathbf{u}(t), t ; \mathbf{p}] \quad (2)$$

ограничения пути

$$\mathbf{C}_{\min} \leq \mathbf{C} [x(t), \mathbf{u}(t), t ; p] \leq \mathbf{C}_{\max} \quad (3)$$

и граничные условия

$$\Phi_{\min} \leq \Phi [x(t_0), t_0, x(t_f), t_f ; p] \leq \Phi_{\max} \quad (4)$$

Состояние, управление и статический параметр могут быть записаны в компонентной форме как

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}; \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}; \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_q \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Косвенные методы		
Системы нелинейных уравнений	Дифференциальные уравнения и интегрирование функций	Нелинейная оптимизация
Прямые методы		

Рисунок – Три основных компонента оптимального управления и класс методов, использующих каждый компонент [8]

Figure – Three main components of optimal control and a class of methods using each component [8]

На рисунке показаны три основных компонента оптимального управления и класс методов, использующих каждый компонент. Понятно, что как косвенные, так и прямые методы используют дифференциальные уравнения и интегрирование функций, тогда как косвенные методы используют системы нелинейных уравнений в отличие от прямых методов, которые используют подходы нелинейной оптимизации.

Дифференциальное уравнение (2) описывает динамику системы, а индекс производительности измеряет «качество» траектории. Когда желательно минимизировать индекс производительности, более низкое значение J «лучше»; наоборот, когда желательно максимизировать индекс производительности, более высокое значение J «лучше».

Обычно задачу оптимального управления разбивают на этапы $p \in [1, \dots, P]$ и фазы связаны или связаны каким-то значимым образом. Многофазная задача оптимального управления ставится следующим образом. Оптимизировать стоимость

$$J = \sum_{k=1}^P J^{(k)} \quad (6)$$

[где стоимость на каждом этапе, $J^{(k)}$, ($k = 1, \dots, P$) имеет вид, указанный в уравнении (1)] с учетом динамических ограничений

$$\dot{x}^{(k)}(t) = f[x^{(k)}(t), \mathbf{u}^{(k)}(t), t; \mathbf{p}^{(k)}], \quad (7)$$

граничные условия,

$$\Phi_{\min}^{(k)} \leq \Phi^{(k)}(x^{(k)}(t_0^{(k)}), t_0^{(k)}, x^{(k)}(t_f^{(k)}), \mathbf{p}^{(k)}, t_f^{(k)}) \leq \Phi_{\max}^{(k)}, \quad (8)$$

алгебраические ограничения пути

$$\mathbf{C}_{\min}^{(k)} \leq \mathbf{C}^{(k)}[x^{(k)}(t), \mathbf{u}^{(k)}(t), t; \mathbf{p}^{(k)}] \leq \mathbf{C}_{\max}^{(k)} \quad (9)$$

и ограничения связи

$$\mathbf{L}_{\min}^{(s)} \leq \mathbf{L}(x^{(l_s)}(t_f^{(l_s)}), \mathbf{u}^{(l_s)}(t_f^{(l_s)}), \mathbf{p}^{(l_s)}, t_f^{(l_s)}; x^{(r_s)}(t_f^{(r_s)}), \mathbf{u}^{(r_s)}(t_f^{(r_s)}), \mathbf{p}^{(r_s)}, t_f^{(r_s)}) \leq \mathbf{L}_{\max}^{(s)}. \quad (10)$$

В уравнении (10) параметр S – количество пар фаз, которые необходимо соединить, $r_s \in [1, \dots, S]$ и $l_s \in [1, \dots, S]$ – правые фазы и левые фазы, соответственно, пар связей, $r_s \neq l_s$ (означает, что фаза не может быть связана сама с собой), и $s \in [1, \dots, S]$ [8].

В последние годы многими исследователями разработаны самые разнообразные методы применения численных подходов при решении задачи оптимального управления в экономической сфере, описание которых приведено ниже.

Современные подходы к решению задачи оптимального управления численными методами

Как показано на рис. 1, для решения задач оптимального управления с использованием численных методов существует три основных компонента.

1. Численное решение системы дифференциальных уравнений и функций интегрирования;
2. Косвенным методом, сочетая как:
 - а) численное решение системы дифференциальных уравнений и функций интегрирования;
 - б) численное решение систем нелинейных уравнений, a ;
3. Прямым методом, сочетая как
 - а) численное решение системы дифференциальных уравнений и функций интегрирования;
 - б) численное решение методом нелинейной оптимизации.

Мы рассмотрим вышеперечисленные методы каждый по очереди.

1. Численное решение системы дифференциальных уравнений и функций интегрирования

Рассмотрим начальную задачу (initial-value problem или IVP)

$$\dot{x} = f(x(t), t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (11)$$

Кроме того, рассмотрим временной интервал $[t_i, t_{i+1}]$, в течение которого желательно получить решение дифференциального уравнения. Другими словами, учитывая значение состояния в t_i , $x(t_i) \equiv x_i$, желательно получить состояние в t_{i+1} , $x(t_{i+1}) \equiv x_{i+1}$. Интегрируя уравнение (11), мы можем записать

$$x_{i+1} = x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{x}(s) ds = x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x(s), s) ds \quad (12)$$

Существует два подхода к решению дифференциального уравнения: *шаг по времени (time-marching)* и *коллокация*. В таблице ниже представлены основные характеристики этих подходов.

При использовании подхода *коллокации* уравнение

$$\dot{X}(\tau_j) = f(x(\tau_j), \tau_j), \quad (j = 1, \dots, K) \quad (13)$$

называется *условием коллокации*, потому что приближение к производной устанавливается равным правой части дифференциального уравнения, вычисляемого в каждой из промежуточных точек (τ_1, \dots, τ_K) .

Существуют три основных категории методов коллокации.

1. *Методы Гаусса* – где ни одна из конечных точек t_k или t_{k+1} не является точкой коллокации.
2. *Методы Рунге* – где не более одной из конечных точек t_k или t_{k+1} является точкой коллокации.
3. *Методы Лобатто* – где обе конечные точки t_k и t_{k+1} являются точками коллокации.

Методы Эйлера и Рунге–Кутты можно рассматривать эквивалентно либо как методы перемещения по времени, либо как методы коллокации. Когда используется метод Эйлера или Рунге–Кутты в форме коллокации, говорят, что дифференциальное уравнение решается *одновременно*, потому что все неизвестные параметры определяются одновременно. Кроме того, методы коллокации, как говорят,

имитируют динамику системы *неявно*, потому что значения состояния в каждой точке коллокации получаются в одно и то же время (в отличие от последовательного решения для состояния, как в методе временного перехода). Чтобы реализовать одновременное моделирование, дискретизированная динамика записывается как *дефектные ограничения* вида

$$\zeta_j = \dot{X}(\tau_j) - f(x(\tau_j), \tau_j). \quad (14)$$

Ограничения дефектов затем могут быть объединены в матрицу в виде

$$Z = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_M \end{bmatrix}, \quad (15)$$

где Z – функция коэффициентов $(a_0^{(k)}, \dots, a_K^{(k)})$, $(k = 1, \dots, K)$. Затем цель состоит в том, чтобы определить значения этих коэффициентов, которые приводят к $Z = 0$.

2. Интеграция функций

Поскольку цель состоит в том, чтобы решить задачу оптимального управления, необходимо аппроксимировать функцию стоимости уравнения (1). Обычно стоимость аппроксимируется с помощью квадратуры, которая согласуется с численным методом решения дифференциального уравнения. Например, если для решения дифференциального уравнения используется прямое правило Эйлера, стоимость также будет аппроксимирована с использованием прямого интегрирования Эйлера. В случае метода ортогональной коллокации правило интегрирования представляет собой правило квадратуры с ортогональным расположением, например, если используются точки Лежандра-Гаусса, то стоимость Лагранжа аппроксимируется с использованием квадратуры Гаусса. Требование согласованности при аппроксимации дифференциальных уравнений и стоимости можно рассматривать и по-другому. Любая задача Больца может быть преобразована в задачу Майера путем добавления состояния x_{n+1} and adding the differential equation и добавления дифференциального уравнения

$$\dot{x}_{n+1} = L[x(t), u(t), t; p] \quad (16)$$

с начальным условием

$$x_{n+1}(t_0) = 0 \quad (17)$$

Тогда функция стоимости уравнения (1) будет представлена в форме Майера как

$$J = \phi[x(t_0), t_0, x(t_f), t_f; p] + x_{n+1}(t_f) \quad (18)$$

Затем общая схема будет использоваться для решения расширенной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f[x(t), u(t), t; p] \\ \dot{x}_{n+1} &= L[x(t), u(t), t; p] \end{aligned} \quad (19)$$

Преобразуя обратно к форме Больца, квадратурная аппроксимация к члену

$$\int_{t_0}^{t_f} L[x(t), u(t), t; p] dt \quad (20)$$

в уравнении (1) должна быть та же самая, что и схема, используемая для решения системы дифференциальных уравнений, приведенной в уравнении (19).

Нелинейная оптимизация

Ключевым компонентом решения задач оптимального управления является способность решать задачи *нелинейной оптимизации* или *нелинейного программирования*. Нелинейная задача принимает следующую общую математическую форму.

Определить вектор переменных решения $z \in R^n$, которые минимизируют функцию стоимости

$$f(z) \quad (21)$$

с учетом алгебраических ограничений

$$g(z) = 0 \quad (22)$$

$$h(z) \leq 0 \quad (23)$$

где $g(z) \in \mathbb{R}^m$ и $h(z) \in \mathbb{R}^p$. Условия оптимальности первого порядка задачи нелинейной оптимизации, данные в уравнениях (21) и (22), также известные как условия Каруша–Куна–Таккера [9–15], задаются как

$$g_i(z) = 0, \quad (i = 1, \dots, m), \quad (24)$$

$$h_i(z) \leq 0, \quad (i = 1, \dots, p), \quad (25)$$

$$v_i \geq 0, \quad (i = 1, \dots, p), \quad (26)$$

$$v_i h_i(z) = 0, \quad (i = 1, \dots, p), \quad (27)$$

$$\nabla f(z) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(z) + \sum_{i=1}^p v_i \nabla h_i(z) = 0. \quad (28)$$

Затем эти оптимизации решаются с помощью:

- 1) градиентных методов;
- 2) эвристических методов оптимизации.

Заключение

Дан обзор современных численных методов решения задач оптимального управления в экономике. Задача решения задач оптимального управления разложена на три основных компонента: решение дифференциальных уравнений и интегрирующих функций, решение задач нелинейной оптимизации и решение систем нелинейных алгебраических уравнений. С помощью этих компонентов описаны два класса косвенных и прямых методов решения задач оптимального управления. Впоследствии были обсуждены важные вычислительные вопросы и описано несколько различных программных инструментов для решения задач оптимального управления. Наконец, было дано краткое обсуждение того, как выбрать метод.

Таблица – Методы, используемые для численного решения дифференциальных уравнений [9–15]
 Table – Methods user for the numerical solution of differential equations [9–15]

ШАГ ПО ВРЕМЕНИ (TIME-MARCHING)	
Решение дифференциального уравнения на каждом временном шаге t_k получается последовательно с использованием текущей и/или предыдущей информации о решении. Методы шага по времени делятся на: (1) многошаговые методы и (2) многоступенчатые методы.	
<p>Многошаговые методы Решение во времени t_{k+1} получается из определенного набора предыдущих значений t_{k-j}, \dots, t_k, где j – количество шагов. Многошаговые метод с $j = 1$ называется <i>одношаговым методом</i>.</p>	<p>Методы Эйлера $x_{k+1} = x_k + h_k[\theta f_k + (1-\theta)f_{k+1}]$ где $f_k = f[x(t_k), u(t_k), t_k]$, и значения $\theta = \left(\begin{matrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{matrix} \right)$ соответствуют 1, <i>Euler forward</i> 2, <i>Crank-Nicolson</i> 3, <i>Euler backward</i>, соответственно. Adams-Bashforth: $x_{k+1} = x_k + h_k \left[\frac{1}{2} \nabla f_k + \frac{5}{12} \nabla^2 f_k + \frac{3}{8} \nabla^3 f_k - \frac{251}{720} \nabla^4 f_k + \dots \right]$ Adams-Moulton: $x_{k+1} = x_k + h_k \left[\frac{1}{2} \nabla f_k - \frac{1}{12} \nabla^2 f_k - \frac{1}{24} \nabla^3 f_k - \frac{19}{720} \nabla^4 f_k + \dots \right]$</p>
<p>Многоступенчатые методы Разделите интервал $[t_j, t_{j+1}]$ на K подинтервалов $[\tau_j, \tau_{j+1}]$, где $\tau_j = t_j + h_j \alpha_j, (j = 1, \dots, K)$, $h_j = t_{j+1} - t_j$ и $0 \leq \alpha_j \leq 1, (j = 1, \dots, K)$. Каждое значение τ_j называется <i>спиралью</i>. Интеграл от t_j до t_{j+1} может быть аппроксимирован с помощью <i>квадратуры</i> как $\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(x(s), s) ds \approx h_j \sum_{j=1}^K \beta_j f(x_j, \tau_j)$ где $x_j \equiv x(\tau_j)$.</p>	<p>Значения состояния на каждом ступени необходимы для оценки квадратурной аппроксимации. Эти промежуточные значения получаются следующим образом: $x(\tau_j) - x(t_j) = \int_{t_j}^{\tau_j} f(x(s), s) ds \approx h_j \sum_{j=1}^K \gamma_{jl} f(x_j, \tau_j)$. Эта формула может быть объединена с <i>квадратурной</i> формулой для получения семейства K-ступенчатых методов Рунге-Кутты $\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(x(s), s) ds \approx h_j \sum_{j=1}^K \beta_j f_j$, учитывая, что $f_j = f \left(x_j + h_j \sum_{l=1}^K \gamma_{jl} f_l + h_j \alpha_j \right)$. Используя вышеупомянутые определения явного и неявного метода, метод Рунге-Кутты называется <i>явным</i>, если $\gamma_{jl} = 0$ для всех $l \geq j$, и называется <i>неявным</i> в противном случае. В явном методе Рунге-Кутты аппроксимация при t_{k+1} вычисляется с использованием информации до t_{k+1}, тогда как в неявном методе Рунге-Кутты $x(t_{k+1})$ требуется для определения решения при t_{k+1}. В последнем случае решение обновляется с использованием подхода «предиктор-корректор».</p>
КОЛЛОКАЦИЯ	
<p>Предположим, что на подинтервале $[t_j, t_{j+1}]$ мы выбрали аппроксимацию состояния с помощью следующего кусочного полинома K^{th}-степени: $X(t) \approx \sum_{k=0}^K a_k (t-t_j)^k, t \in [t_j, t_{j+1}]$</p>	<p>Предположим, что на подинтервале $[t_j, t_{j+1}]$ мы выбрали аппроксимацию состояния с помощью следующего кусочного полинома K^{th}-степени: $X(t) \approx \sum_{k=0}^K a_k (t-t_j)^k, t \in [t_j, t_{j+1}]$</p>
<p>(a) Euler-Forward</p> $\frac{0 \mid 0}{1 \mid 1}$ <p>(b) Euler-Backward</p> $\frac{0 \mid 0 \ 0}{0 \mid 1}$	<p>(c) Crank-Nicolson</p> $\frac{0 \mid 0 \ 0}{1/2 \mid 1/2}$ <p>(d) Classical-Runge-Kutta</p> $\frac{0 \ 0 \ 0 \ 0}{1/2 \ 1/2 \ 0 \ 0}$ $\frac{1/2 \ 0 \ 1/2 \ 0}{1 \ 0 \ 0 \ 1}$ <p>(e) Heun-Runge-Kutta</p> $\frac{1/6 \ 1/3 \ 1/3 \ 1/6}{1/6 \ 2/3 \ 1/6}$ <p>(f) Heun-Sub-Runge-Method</p>
<p>Предположим далее, что коэффициенты (a_0, \dots, a_K) кусочного многочлена подобраны так, чтобы соответствовать значению функции в начале шага, т.е. $X(t_j) = x(t_j)$. Наконец, предположим, что мы выбрали соответствие проливной состояния в точках, определенных в исходном уравнении для многоэтапных методов, т.е.</p> $\dot{X}(\tau_j) = f(x(\tau_j), \tau_j), (j = 1, \dots, K) - \text{условие словосочетания}$	

Библиографический список / References

1. Dorfman R. An Economic Interpretation of Optimal Control Theory. *American Economic Review*, 1969, vol. 59, issue 5, pp. 817–831. URL: https://econpapers.repec.org/article/aeaarec/v_3a59_3ay_3a1969_3ai_3a5_3ap_3a817-31.htm.
2. Bakke V. A maximum principle for an optimal control problem with integral constraints. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1974, vol. 13, issue 1, pp. 32–55. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00935608>.
3. Belbas S. Iterative schemes for optimal control of Volterra integral equations. *Nonlinear Analysis*, 1999, vol. 37, pp. 57–79.
4. Belbas S. A new method for optimal control of Volterra integral equations. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, vol. 189, pp. 1902–1915. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.amc.2006.12.077>.
5. Berkani S., Manseur F., Maida A. Optimal control based on the variational iteration method. *Computers & Mathematics with Applications*, 2012, vol. 64, issue 4, pp. 604–610. Available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2011.12.066>.
6. Carlier G., Tahraoui R. On some optimal control problems governed by a state equation with memory. *ESAIM Control Optimization and Calculus of Variations*, 2008, vol. 14, issue 4, pp. 725–743. DOI: <http://dx.doi.org/10.1051/cocv:2008005>.
7. Dai R., Cochran J.E. Wavelet collocation method for optimal control problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2009, vol. 143, pp. 265–278. DOI: <http://doi.org/10.1007/S10957-009-9565-9>.
8. Rao Anil (2010). A Survey of Numerical Methods for Optimal Control. *Advances in the Astronautical Sciences*, 2010, vol. 135, issue 1, pp. 495–528. Available at: https://www.researchgate.net/publication/268042868_A_Survey_of_Numerical_Methods_for_Optimal_Control.
9. Bazaraa M.S., Sherali H.D., Shetty C.M. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. 3rd edition. New Jersey: Wiley-Interscience, 2006. Available at: <https://books.google.ru/books?id=nDYz-NIpIuEC&printsec=frontcover&hl=ru#v=onepage&q&f=false>.
10. Bertsekas D. *Nonlinear Programming*. Belmont, Massachusetts: Athena Scientific Publishers, 2004. Available at: <http://www.athenasc.com/nonlinbook.html>.
11. Boyd S., Vandenberghe L. *Convex Optimization*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2004. 730 p. Available at: https://web.stanford.edu/~boyd/cvxbook/bv_cvxbook.pdf.
12. Nocedal J., Wright S. *Numerical Optimization*. New York: Springer-Verlag, 2nd edition, 2006. Available at: <https://books.google.ru/books?id=7wDpBwAAQBAJ&printsec=frontcover&hl=ru#v=onepage&q&f=false>.
13. Gill P.E., W. Murray W., Saunders M.A., Wright M.H. User's Guide for NPSOL (Version 4.0): A FORTRAN Package for Nonlinear Programming. Department of Operations Research, Stanford University, January 1986. DOI: <http://doi.org/10.21236/ada169115>.
14. Biegler L.T., Ghattas O., Heinkenschloss M., Bloemen Waanders B.v. (Eds.) Large-Scale PDE Constrained Optimization. In: *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, vol. 30. Berlin: Springer-Verlag, 2003. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-3-642-55508-4>.
15. Betts J.T. *Practical Methods for Optimal Control Using Nonlinear Programming*. Philadelphia: SIAM Press, 2001. DOI: <http://doi.org/10.1115/1.1483351>.