

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ  
ЭКОНОМИКИ**  
**MATHEMATICAL AND INSTRUMENTAL METHODS  
OF ECONOMICS**

DOI: 10.18287/2542-0461-2022-13-2-159-171



**НАУЧНАЯ СТАТЬЯ**

УДК 330.42

Дата поступления: 17.04.2022  
рецензирования: 20.05.2022  
принятия: 27.05.2022

**Оптимальная прибыль и транзакционные издержки для производственной функции с переменной эластичностью выпуска по ресурсам**

**Е.А. Ильина**

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,  
г. Самара, Российская Федерация  
E-mail: elenaalex.ilyina@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2590-6138>

**Л.А. Сараев**

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,  
г. Самара, Российская Федерация  
E-mail: saraev\_leo@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3625-5921>

**Аннотация:** В публикуемой статье исследуется влияние непроизводственных (транзакционных) издержек многофакторного производственного предприятия на формирование его прибыли. Предложена экономико-математическая модель расчета прибыли предприятия, производственная функция которого учитывает изменения значений эластичностей по каждому ресурсу, а производственные (трансформационные) и непроизводственные (транзакционные) издержки описываются экспоненциальной функцией. Исследованы особенности формирования объемов прибыли в краткосрочный и долгосрочный периоды работы предприятия. Получен вариант расчетной модели максимально возможной прибыли, игнорирующий роль транзакционных издержек, и вариант расчетной модели оптимальной прибыли, учитывающий влияние транзакционных издержек. Источником транзакционных издержек служат издержки рыночных трансакций, для осуществления которых необходимо найти субъекта, заинтересованного в заключении сделки, провести с ним прелиминарные переговоры, подготовить контракт и условия его выполнения и т. д. Нужные для всего этого ресурсы и затраты составляют суть транзакционных издержек заключения сделки. Показано, что при расчете объемов формирующейся прибыли необходимо максимизировать не только саму функцию прибыли, но и транзакционную функцию полезности. Численный анализ результатов расчетов показывает недостижимость максимально возможных значений прибыли, поскольку на практике руководство предприятия максимизирует не саму прибыль, а свою полезность, выраженную в виде соответствующей транзакционной функции.

**Ключевые слова:** ресурсы; факторы производства; производственная функция; прибыль; трансформационные издержки; транзакционные издержки; транзакционная функция полезности.

**Цитирование.** Ильина Е.А., Сараев Л.А. Оптимальная прибыль и транзакционные издержки для производственной функции с переменной эластичностью выпуска по ресурсам // Вестник Самарского университета. Экономика и управление. 2022. Т. 13, № 2. С. 159–171. DOI: <http://doi.org/10.18287/2542-0461-2022-13-2-159-171>.

**Информация о конфликте интересов:** авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© **Ильина Е.А., Сараев Л.А., 2022**

*Елена Алексеевна Ильина* – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и бизнес-информатики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

*Леонид Александрович Сараев* – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и бизнес-информатики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

### **SCIENTIFIC ARTICLE**

Submitted: 17.04.2022

Revised: 20.05.2022

Accepted: 27.05.2022

## **Optimal profit and transaction costs for a production function with variable elasticity of output with resources**

**E.A. Ilyina**

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: elenaalex.ilyina@yandex.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2590-6138>

**L.A. Saraev**

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: saraev\_leo@mail.ru. ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3625-5921>

**Abstract:** The published article examines the influence of non-production (transactional) costs of a multifactorial manufacturing enterprise on the formation of its profit. An economic-mathematical model for calculating the profit of an enterprise is proposed, the production function of which takes into account changes in the values of elasticity for each resource, and production (transformation) and non-production (transactional) costs are also described by an exponential function. The features of the formation of profit volumes in the short-term and long-term periods of the enterprise's work are studied. A variant of the calculation model of the maximum possible profit, ignoring the role of transaction costs, and a variant of the calculation model of optimal profit, taking into account the influence of transaction costs, are obtained. The source of transaction costs is the costs of market transactions, for the implementation of which it is necessary to find a subject interested in concluding a transaction, conduct preliminary negotiations with him, prepare a contract and conditions for its implementation, etc. The resources and costs required for all this are the essence of the transaction costs of concluding a deal. It is shown that when calculating the volume of emerging profit, it is necessary to maximize not only the profit function itself, but also the transaction utility function. Numerical analysis of the results of calculations shows the unattainability of the maximum possible values of profit, since in practice the management of the enterprise maximizes not the profit itself, but its utility, expressed as the corresponding transactional function.

**Key words:** resources; factors of production; production function; profit; transformation costs; transaction costs; transactional utility function.

**Citation.** Ilyina E.A., Saraev L.A. Optimal profit and transaction costs for a production function with variable elasticity of output with resources. *Vestnik Samarskogo universiteta. Ekonomika i upravlenie = Vestnik of Samara University. Economics and Management*, 2022, vol. 13, no. 2, pp. 159–171. DOI: <http://doi.org/10.18287/2542-0461-2022-13-2-159-171>. (In Russ.)

**Information on the conflict of interest:** authors declare no conflict of interest.

© **Ilyina E.A., Saraev L.A., 2022**

*Elena A. Ilyina* – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Mathematics and Business Informatics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

*Leonid A. Saraev* – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, head of the Department of Mathematics and Business Informatics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

## Введение

Развитие математических методов прогнозирования экономических показателей работы предприятия, которые учитывают взаимодействие производства с социальной средой, представляет собой комплекс актуальных проблем теории и практики экономики.

Воздействие предприятия на собственное производство является источником определенных трансформаций, сопровождаемых выпуском продукции, производственными издержками и прибылью.

Взаимодействие предприятия с социальной средой осуществляется в виде набора транзакций, генерирующих транзакционные издержки и перераспределение прибыли [1; 2].

Транзакционные издержки могут включать в себя издержки на поиск экономической информации, издержки по измерению параметров различных благ, издержки по ведению переговоров и заключению контрактов, издержки по созданию спецификаций и защите прав собственности, издержки по расходам оппортунистического поведения руководства и т. д.

Транзакционные издержки являются следствием усиления мер, принимаемых руководством для повышения качества выпускаемой продукции с новыми повышенными потребительскими свойствами.

Часть транзакционных издержек обеспечивает социальные программы для персонала, программы повышения квалификации сотрудников, научные, экологические и благотворительные проекты [3–13].

Появление транзакционных издержек меняет алгоритм формирования наибольшей прибыли предприятия. Для ее расчета приходится наряду с максимизацией функции прибыли максимизировать транзакционную функцию полезности, которая учитывает отток части прибыли предприятия на непроизводственные нужды. Предприятию вместо максимально возможного значения собственной прибыли приходится ограничиваться более скромным оптимальным значением [14–22].

Целью публикуемой работы является разработка новых экономико-математических моделей расчета максимального и оптимального значений прибыли многофакторных производственных предприятий.

Научная новизна полученных моделей заключается в том, что используемая в расчетах прибыли предприятия производственная функция учитывает изменения значений эластичностей по каждому ресурсу, а производственные и транзакционные издержки описываются нелинейной экспоненциальной функцией.

## 1. Постановка задачи

Общий вид произвольной многофакторной производственной функции задается выражением

$$V = V(Q_1, Q_2, \dots, Q_m, S_1, S_2, \dots, S_n), \quad (1.1)$$

где  $V$  – объем выпускаемой продукции производственного предприятия;

$Q_i$  – основные и трудовые производственные ресурсы;

$S_j$  – непроизводственные ресурсы, обеспечивающие транзакционную деятельность предприятия.

Для однофакторной производственной функции объем выпуска предприятием продукции  $V$  является решением задачи Коши [23]:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dQ} \cdot \frac{Q}{V} = E_Q(Q), \\ V|_{Q=1} = V(1) = P. \end{cases}, \quad (1.2)$$

где  $E_Q = E_Q(Q)$  – эластичность выпуска продукции по ресурсу  $Q$ , ( $0 \leq E_Q \leq 1$ );

$P$  – стоимость продукции, произведенной на единичный объем ресурса.

Если эластичность  $E_Q = E_Q(Q)$  является константой  $E_Q = a$ , ( $0 \leq a \leq 1$ ), то решением задачи Коши (1.2) будет однофакторная степенная функция Кобба – Дугласа

$$V = P \cdot Q^a. \quad (1.3)$$

Если эластичность  $E_Q = E_Q(Q)$  изменяется от некоторого начального значения  $a_0 = E_Q(0)$ , ( $0 \leq a_0 \leq 1$ ) до некоторого предельного значения  $a_\infty = \lim_{Q \rightarrow \infty} E_Q(Q)$ , ( $0 \leq a_\infty \leq 1$ ), то в качестве функции эластичности можно принять дробно-линейную функцию

$$E_Q = \frac{a_\infty \cdot Q + a_0 \cdot QH}{Q + QH}, \quad (1.4)$$

где  $QH$  – значение ресурса  $Q$ , при котором эластичность выпуска продукции принимает среднее значение  $E_Q(QH) = \frac{a_0 + a_\infty}{2}$ .

Решение задачи Коши (1.2) с функцией эластичности (4) будет иметь вид

$$V = P \cdot Q^{a_0} \cdot \left( \frac{1 + QH}{Q + QH} \right)^{a_0 - a_\infty}. \quad (1.5)$$

Формула для производственной функции (1.5) показывает, что при бесконечно малых значениях производственного фактора ( $Q \rightarrow 0$ ) она бесконечно близка к начальной функции Кобба – Дугласа

$$V_0 = P \cdot \left( \frac{1 + QH}{QH} \right)^{a_0 - a_\infty} \cdot Q^{a_0}, \quad (1.6)$$

а для бесконечно больших значений производственного фактора ( $Q \rightarrow \infty$ ) она асимптотически приближается к предельной функции Кобба – Дугласа

$$V_\infty = P \cdot (1 + QH)^{a_0 - a_\infty} \cdot Q^{a_\infty}. \quad (1.7)$$

Следует отметить, что производная производственной функции (1.5) в начальной точке  $Q = 0$  обращается в бесконечность. Такая сингулярность приводит к тому, что при бесконечно малом приращении ресурса  $Q$  выпуск продукции принимает бесконечно большие значения. На практике прирост продукции предприятия, как и производная производственной функции, должны иметь конечные значения. Конечная производная производственной функции (1.5) в начальной точке  $Q = 0$  может быть только в том случае, когда эластичность  $E_Q$  в этой точке принимает единичное значение ( $a_0 = 1$ ), а затем снижается до некоторого постоянного предельного значения  $a_\infty$ .

Многофакторную производственную функцию (1.1) с переменными эластичностями выпуска по имеющимся у предприятия ресурсам можно представить в виде

$$V = P \cdot \prod_{i=1}^m Q_i^{a_i^0} \cdot \left( \frac{1 + QH_i}{Q_i + QH_i} \right)^{a_i^0 - a_i^\infty} \cdot \prod_{j=1}^n S_j^{c_j^0} \cdot \left( \frac{1 + SH_j}{S_j + SH_j} \right)^{c_j^0 - c_j^\infty}, \quad (1.8)$$

где  $P$  – стоимость продукции, произведенной на единичные объемы ресурсов;

$a_i^0, a_i^\infty, c_j^0, c_j^\infty$  – начальные и конечные значения эластичностей выпуска продукции по соответствующим ресурсам.

Условие отсутствия сингулярности скорости роста производственной функции (1.8) в начальной точке принимает вид

$$\sum_{i=1}^m a_i^0 + \sum_{j=1}^m c_j^0 = 1. \quad (1.9)$$

Рост выпуска продукции предприятия вызывает рост производственных и транзакционных издержек. Очевидно, что в окрестности начальной точки  $Q=0$  для бесконечно малых значений производственного фактора  $Q \rightarrow 0$  функция издержек будет бесконечно близка к линейной функции

$$TC = AQ_0 \cdot Q. \quad (1.10)$$

Для бесконечно больших значений производственного фактора ( $Q \rightarrow \infty$ ) функция издержек будет асимптотически приближаться к другой линейной функции:

$$TC = AQ_\infty \cdot Q + TFC, \quad (1.11)$$

где  $AQ_0$  – коэффициент пропорциональности издержек для малых значений объема ресурса ( $Q \rightarrow 0$ );

$AQ_\infty$  – коэффициент пропорциональности издержек для значений объема ресурса ( $Q \rightarrow \infty$ );

$TFC$  – постоянные затраты предприятия.

Функцию издержек предприятия, реализующую переход от формулы (1.10) к формуле (1.11) целесообразно задать формулой [23]

$$TC = AQ_\infty \cdot Q + TFC \cdot \left( 1 - \exp\left(-\frac{AQ_0 - AQ_\infty}{TFC} \cdot Q\right) \right). \quad (1.12)$$

Для многофакторной производственной функции (1.8) формула функции издержек  $TC = TC(Q_1, Q_2, \dots, Q_m, S_1, S_2, \dots, S_n)$ , обобщающая выражение (1.12), принимает вид:

$$TC = \sum_{i=1}^m AQ_i^\infty \cdot Q_i + \sum_{j=1}^n AS_j^\infty \cdot S_j + TFC \cdot \left( 1 - \exp\left(-\frac{1}{TFC} \cdot \left( \sum_{i=1}^m (AQ_i^0 - AQ_i^\infty) \cdot Q_i + \sum_{j=1}^n (AS_j^0 - AS_j^\infty) \cdot S_j \right) \right) \right), \quad (1.13)$$

где  $AQ_i^0, AQ_i^\infty, AS_j^0, AS_j^\infty$  – коэффициенты пропорциональности издержек;

$TFC$  – постоянные затраты предприятия.

Выражение для прибыли предприятия  $PR = PR(Q_1, Q_2, \dots, Q_m, S_1, S_2, \dots, S_n)$  выражается разностью формул (1.8) и (1.13):

$$PR = P \cdot \prod_{i=1}^m Q_i^{a_i^0} \cdot \left( \frac{1 + QH_i}{Q_i + QH_i} \right)^{a_i^0 - a_i^\infty} \cdot \prod_{j=1}^n S_j^{c_j^0} \cdot \left( \frac{1 + SH_j}{S_j + SH_j} \right)^{c_j^0 - c_j^\infty} - \sum_{i=1}^m AQ_i^\infty \cdot Q_i - \sum_{j=1}^n AS_j^\infty \cdot S_j - TFC \cdot \left( 1 - \exp\left(-\frac{1}{TFC} \cdot \left( \sum_{i=1}^m (AQ_i^0 - AQ_i^\infty) \cdot Q_i + \sum_{j=1}^n (AS_j^0 - AS_j^\infty) \cdot S_j \right) \right) \right). \quad (1.14)$$

Для вычисления наибольшего дохода следует максимизировать функцию прибыли (1.14). Для вычисления оптимального дохода предприятию приходится максимизировать еще и целевую транзакционную функцию полезности, перераспределяющую часть прибыли на непроизводственные нужды. Функция полезности здесь принимается линейной [23]

$$U = U(PR, S_1, S_2, \dots, S_n) = PR(Q_1, Q_2, \dots, Q_m, S_1, S_2, \dots, S_n) + \sum_{p=1}^n q_p \cdot S_p, \quad (1.15)$$

где  $q_p$  – коэффициенты функции полезности (1.15), определяющие уровень перераспределения средств между прибылью и непроизводственными ресурсами.

Следует отметить, что все коэффициенты функции полезности (1.15) неотрицательны ( $\forall p: q_p \geq 0$ )

Влияние целевой транзакционной функции полезности (1.15) предприятия на перераспределение прибыли в интересах руководства предприятия и для реализации социально-ориентированных программ полностью определяется набором коэффициентов  $q_p$ . Эти коэффициенты имеют нижние и верхние границы  $q_p^0 \leq q_p \leq q_p^\infty$ .

Значения параметров  $q_p = q_p^0 = 0$  соответствует ситуации, при которой предприятие совершенно не финансирует никакие социальные или непроизводственные программы, и транзакционная функция полезности (1.15) совпадает с функцией прибыли (1.14).

Значения  $q_p = q_p^\infty$  соответствуют ситуации, при которой предприятие начинает тратить на непроизводственные нужды всю прибыль  $PR = 0$ .

Эффективный выбор коэффициентов  $q_p$  позволяет подобрать такой режим работы предприятия, при котором производственные и непроизводственные затраты будут оптимальными.

Максимально возможная прибыль предприятия  $PR_{\max}$  и соответствующие ей ресурсы  $Q_i^{\max}$  и  $S_j^{\max}$  находятся из условий

$$\begin{cases} \frac{\partial PR}{\partial Q_i} = 0, (i = 1, 2, \dots, m), \\ \frac{\partial PR}{\partial S_j} = 0, (j = 1, 2, \dots, n). \end{cases} \quad (1.16)$$

Решением системы уравнений (1.16) являются значения объемов ресурсов  $Q_i^{\max}$  и  $S_j^{\max}$ , соответствующих максимальной прибыли. Найти аналитическое решение системы уравнений (1.16) из-за сложной структуры функции прибыли (1.14) не представляется возможным, поэтому ее решать следует только численно. С помощью значений величин объемов ресурсов  $Q_i^{\max}$  и  $S_j^{\max}$  по формуле (1.14) вычисляется значение объема максимальной прибыли:

$$PR_{\max} = PR(Q_1^{\max}, Q_2^{\max}, \dots, Q_m^{\max}, S_1^{\max}, S_2^{\max}, \dots, S_n^{\max}). \quad (1.17)$$

Поскольку в реальных условиях помимо функции прибыли приходится учитывать целевую транзакционную функцию полезности, формула (1.17) выражает недостижимое на практике максимальное значение прибыли предприятия.

Максимизируем целевую транзакционную функцию полезности (1.15).

Оптимальная прибыль  $PR_{\text{opt}}$  и соответствующие ей ресурсы  $Q_i^{\text{opt}}$  и  $S_j^{\text{opt}}$  находятся из условий

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial Q_i} = \frac{\partial PR}{\partial Q_i} = 0, (i = 1, 2, \dots, m), \\ \frac{\partial U}{\partial S_j} = \frac{\partial PR}{\partial S_j} + q_j = 0, (j = 1, 2, \dots, n). \end{cases} \quad (1.18)$$

Решением системы уравнений (1.18) являются значения объемов ресурсов  $Q_i^{\text{opt}}$  и  $S_j^{\text{opt}}$ , соответствующих максимальной прибыли. Найти аналитическое решение системы уравнений (1.18) из-за сложной структуры функции прибыли (1.14) не представляется возможным, поэтому ее решать сле-

дуют только численно. С помощью значений величин объемов ресурсов  $Q_i^{\text{opt}}$  и  $S_j^{\text{opt}}$  по формуле (1.14) вычисляется значение объема максимальной прибыли

$$PR_{\text{opt}} = PR(Q_1^{\text{opt}}, Q_2^{\text{opt}}, \dots, Q_m^{\text{opt}}, S_1^{\text{opt}}, S_2^{\text{opt}}, \dots, S_n^{\text{opt}}). \quad (1.19)$$

Применим теперь разработанный метод расчета максимальной прибыли, оптимальной прибыли и транзакционных издержек (1.16) – (1.19) для некоторых вариантов моделей предприятий.

## 2. Расчет максимальной и оптимальной прибыли для двухфакторных производственных предприятий

Рассмотрим сначала случай, когда выпуск продукции предприятия обеспечивается одним производственным фактором  $Q$  и одним непроизводственным ресурсом  $S$ .

Тогда формулы для производственной функции, издержек, прибыли и функции полезности (1.2) – (1.5) принимают вид:

$$V = P \cdot Q^{a_0} \cdot \left( \frac{1+QH}{Q+QH} \right)^{a_0-a_\infty} \cdot S^{c_0} \cdot \left( \frac{1+SH}{S+SH} \right)^{c_0-c_\infty}, \quad a_0 + c_0 = 1, \quad (2.1)$$

$$TC = AQ \cdot Q + AS \cdot S + TFC \cdot \left( 1 - \exp \left( - \frac{(AQ_0 - AQ_\infty) \cdot Q + (AS_0 - AS_\infty) \cdot S}{TFC} \right) \right), \quad (2.2)$$

$$PR = P \cdot Q^{a_0} \cdot \left( \frac{1+QH}{Q+QH} \right)^{a_0-a_\infty} \cdot S^{c_0} \cdot \left( \frac{1+SH}{S+SH} \right)^{c_0-c_\infty} - AQ \cdot Q - AS \cdot S - TFC \cdot \left( 1 - \exp \left( - \frac{(AQ_0 - AQ_\infty) \cdot Q + (AS_0 - AS_\infty) \cdot S}{TFC} \right) \right), \quad (2.3)$$

$$U(Q, S) = PR(Q, S) + q \cdot S. \quad (2.4)$$

Здесь влияние целевой транзакционной функции полезности (2.4) предприятия на перераспределение прибыли в интересах руководства предприятия и для реализации социально-ориентированных программ полностью определяется параметром  $q$ , ( $q_0 \leq q \leq q_\infty$ ).

Значения параметра  $q = q_0 = 0$  соответствуют ситуации, при которой предприятие совершенно не финансирует никакие социальные или непроизводственные программы, и транзакционная функция полезности (2.4) совпадает с функцией прибыли (2.3).

Значения  $q = q_\infty$  соответствуют ситуации, при которой предприятие начинает тратить на социальные или непроизводственные программы всю прибыль  $PR=0$ . Управляя выбором коэффициента  $q$ , можно подобрать такой режим работы предприятия, при котором останутся достаточно эффективными и экономическая составляющая производства и его социальная направленность.

Особенности работы предприятия существенно различаются в краткосрочный и долгосрочный периоды деятельности. При построении математической модели предприятия с краткосрочным периодом работы изменения основных и трудовых ресурсов можно пренебречь  $Q = const$ .

Очевидно, что максимально возможное значение функции прибыли (2.3) может быть получено только в том случае, если полностью не учитывать целевую транзакционную функцию полезности (2.4). Уравнение для отыскания этого значения имеет вид

$$\frac{dPR}{dS} = P \cdot Q^{a_0} \cdot \left( \frac{1+QH}{Q+QH} \right)^{a_0-a_\infty} \cdot S^{c_0} \cdot \left( \frac{1+SH}{S+SH} \right)^{c_0-c_\infty} \cdot \frac{c_\infty \cdot S + c_0 \cdot SH}{S \cdot (S+SH)} - AS_\infty - (AS_0 - AS_\infty) \cdot \left( 1 - \exp \left( - \frac{(AQ_0 - AQ_\infty) \cdot Q + (AS_0 - AS_\infty) \cdot S}{TFC} \right) \right) = 0. \quad (2.5)$$

Значение ресурса  $S_{\max}$ , отвечающее максимальной прибыли предприятия, является корнем уравнения (2.5), аналитическое решение которого найти невозможно, и приходится ограничиваться только численным вариантом решения.

Максимальное значение прибыли предприятия выражается соотношением

$$PR_{\max} = P \cdot Q^{a_0} \cdot \left( \frac{1+QH}{Q+QH} \right)^{a_0-a_\infty} \cdot S_{\max}^{c_0} \cdot \left( \frac{1+SH}{S_{\max}+SH} \right)^{c_0-c_\infty} - AQ \cdot Q - AS \cdot S_{\max} - TFC \cdot \left( 1 - \exp \left( - \frac{(AQ_0 - AQ_\infty) \cdot Q + (AS_0 - AS_\infty) \cdot S_{\max}}{TFC} \right) \right), \quad (2.6)$$

Максимального значения прибыли предприятия  $PR_{\max}$  и значения ресурса  $S_{\max}$ , вычисленных по формулам (2.5), (2.6) на практике достичь нельзя. Этому препятствует влияние целевой транзакционной функции полезности.

Для получения реальных оптимальных значений работы предприятия наряду с максимизацией функции прибыли (2.3) необходимо максимизировать целевую транзакционную функцию полезности (2.4), выражение для которой после подстановки в нее функции прибыли (2.3) принимает вид

$$U = P \cdot Q^{a_0} \cdot \left( \frac{1+QH}{Q+QH} \right)^{a_0-a_\infty} \cdot S^{c_0} \cdot \left( \frac{1+SH}{S+SH} \right)^{c_0-c_\infty} - AQ \cdot Q - AS \cdot S - TFC \cdot \left( 1 - \exp \left( - \frac{(AQ_0 - AQ_\infty) \cdot Q + (AS_0 - AS_\infty) \cdot S}{TFC} \right) \right) + q \cdot S, \quad (2.7)$$

Оптимальное значение функции прибыли (2.3), учитывающее влияние целевой транзакционной функции полезности, определяется из условия

$$\frac{dU}{dS} = P \cdot Q^{a_0} \cdot \left( \frac{1+QH}{Q+QH} \right)^{a_0-a_\infty} \cdot S^{c_0} \cdot \left( \frac{1+SH}{S+SH} \right)^{c_0-c_\infty} \cdot \frac{c_\infty \cdot S + c_0 \cdot SH}{S \cdot (S+SH)} - AS_\infty - (AS_0 - AS_\infty) \cdot \left( 1 - \exp \left( - \frac{(AQ_0 - AQ_\infty) \cdot Q + (AS_0 - AS_\infty) \cdot S}{TFC} \right) \right) + q = 0. \quad (2.8)$$

Значение ресурса  $S_{\text{opt}}$ , отвечающее оптимальной прибыли предприятия, является корнем уравнения (2.8), аналитическое решение которого найти невозможно, и приходится ограничиваться только численным вариантом решения.

Формула для оптимального значения прибыли предприятия имеет вид:

$$PR_{\text{opt}} = P \cdot Q^{a_0} \cdot \left( \frac{1+QH}{Q+QH} \right)^{a_0-a_\infty} \cdot S_{\text{opt}}^{c_0} \cdot \left( \frac{1+SH}{S_{\text{opt}}+SH} \right)^{c_0-c_\infty} - AQ \cdot Q - AS \cdot S_{\text{opt}} - TFC \cdot \left( 1 - \exp \left( - \frac{(AQ_0 - AQ_\infty) \cdot Q + (AS_0 - AS_\infty) \cdot S_{\text{opt}}}{TFC} \right) \right), \quad (2.9)$$

На рисунке 1 показаны график функции прибыли  $PR = PR(S)$ , линия безразличия целевой транзакционной функции полезности  $U(PR, S) = U(PR_{\text{opt}}, S_{\text{opt}}) = U_{\text{opt}}$  и линии безразличия целевой транзакционной функции полезности, соответствующие пограничным значениям параметров ( $q=0$ ) и ( $q=q_\infty$ ). Точки касания  $(PR_{\max}, S_{\max})$ ,  $(PR_{\text{opt}}, S_{\text{opt}})$  кривой  $PR = PR(S)$  и линий  $U(PR, S) = U(PR_{\text{opt}}, S_{\text{opt}}) = U_{\text{opt}}$  вычисляются по формулам (2.5), (2.6), (2.8), (2.9). Значение параметра



( $q = q_\infty$ ) равно абсолютной величине тангенса угла наклона касательной кривой прибыли в точке ее пересечения с осью абсцисс

$$q_\infty = -\frac{dPR(S_R)}{dS},$$

где  $S_R$  – значение ресурса  $S$ , при котором прибыль предприятия обращается в нуль  $PR(S_R) = 0$ .

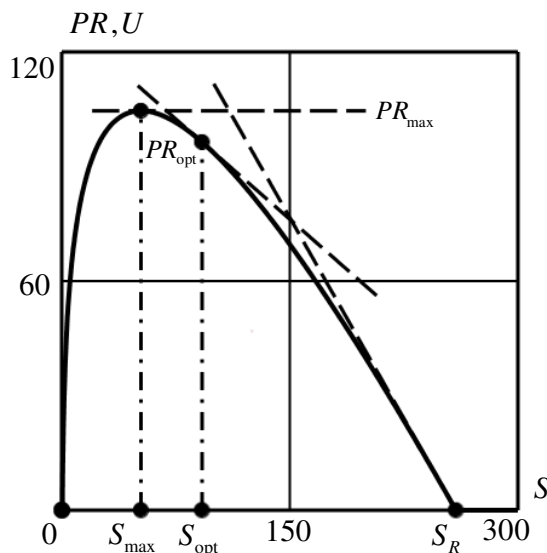


Рисунок 1 – Кривая функции прибыли  $PR = PR(S)$  (сплошная линия) и линии безразличия целевой транзакционной функции полезности  $U(PR, S) = U(PR_{opt}, S_{opt}) = U_{opt}$  и линии безразличия целевой транзакционной функции полезности, соответствующие пограничным значениям параметров ( $q = 0$ ) и ( $q = q_\infty$ ) (штриховые линии). Точки касания  $(PR_{max}, S_{max})$ ,  $(PR_{opt}, S_{opt})$  и  $(0, S_R)$ . Расчетные данные:  $P = 20$ ,  $a_0 = 0,55$ ,  $a_\infty = 0,40$ ,  $c_0 = 0,45$ ,  $c_\infty = 0,25$ ,  $QH = 0,5$ ,  $SH = 0,6$ ,  $AQ_0 = 6$ ,  $AQ_\infty = 1,5$ ,  $AS_0 = 5$ ,  $AS_\infty = 1$ ,  $TFC = 20$ ,  $Q = 20$ ,  $q_0 = 0$ ,  $q = 0,35$ ,  $q_\infty = 0,7012$ . Точки касания:  $(S_{max} = 52,1516; PR_{max} = 104,5741)$ ,  $(S_{opt} = 92,2639; PR_{opt} = 96,3886)$ ,  $(PR_R = 0; S_R = 259,2401)$

Figure 1 – Profit function curve  $PR = PR(S)$  (solid line) and indifference lines of the target transactional utility function  $U(PR, S) = U(PR_{opt}, S_{opt}) = U_{opt}$  and indifference lines of the target transactional utility function corresponding to the boundary values of the parameter and (dashed lines). Touch points:  $(PR_{max}, S_{max})$ ,  $(PR_{opt}, S_{opt})$  and  $(0, S_R)$ . Calculated data:  $P = 20$ ,  $a_0 = 0,55$ ,  $a_\infty = 0,40$ ,  $c_0 = 0,45$ ,  $c_\infty = 0,25$ ,  $QH = 0,5$ ,  $SH = 0,6$ ,  $AQ_0 = 6$ ,  $AQ_\infty = 1,5$ ,  $AS_0 = 5$ ,  $AS_\infty = 1$ ,  $TFC = 20$ ,  $Q = 20$ ,  $q_0 = 0$ ,  $q = 0,35$ ,  $q_\infty = 0,7012$ . Touch points:  $(S_{max} = 52,1516; PR_{max} = 104,5741)$ ,  $(S_{opt} = 92,2639; PR_{opt} = 96,3886)$ ,  $(PR_R = 0; S_R = 259,2401)$

Рисунок 1 показывает, что линии безразличия представляют собой однопараметрическое семейство прямых с параметром  $q_0 \leq q \leq q_\infty$ , для которого кривая прибыли является огибающей линией.

Пусть теперь период работы предприятия является долгосрочным и производственный фактор  $Q$  – переменной величиной.

Максимально возможное значение функции прибыли (2.3) определяется из условий:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial PR}{\partial Q} &= P \cdot Q^{a_0} \cdot \left( \frac{1+QH}{Q+QH} \right)^{a_0-a_\infty} \cdot S^{c_0} \cdot \left( \frac{1+SH}{S+SH} \right)^{c_0-c_\infty} \cdot \frac{a_\infty \cdot Q + a_0 \cdot QH}{Q \cdot (Q+QH)} - \\ &- AQ_\infty - (AQ_0 - AQ_\infty) \cdot \left( 1 - \exp \left( - \frac{(AQ_0 - AQ_\infty) \cdot Q + (AS_0 - AS_\infty) \cdot S}{TFC} \right) \right) = 0, \\ \frac{\partial PR}{\partial S} &= P \cdot Q^{a_0} \cdot \left( \frac{1+QH}{Q+QH} \right)^{a_0-a_\infty} \cdot S^{c_0} \cdot \left( \frac{1+SH}{S+SH} \right)^{c_0-c_\infty} \cdot \frac{c_\infty \cdot S + c_0 \cdot SH}{S \cdot (S+SH)} - \\ &- AS_\infty - (AS_0 - AS_\infty) \cdot \left( 1 - \exp \left( - \frac{(AQ_0 - AQ_\infty) \cdot Q + (AS_0 - AS_\infty) \cdot S}{TFC} \right) \right) = 0. \end{aligned} \right. \quad (2.10)$$

Значения ресурсов  $Q_{\max}$  и  $S_{\max}$ , отвечающие максимальной прибыли предприятия, являются корнями системы уравнений (2.10), аналитическое решение которой найти невозможно, и приходится ограничиваться только численными вариантами решений. Максимальное значение прибыли предприятия выражается соотношением

$$\begin{aligned} PR_{\max} &= P \cdot Q_{\max}^{a_0} \cdot \left( \frac{1+QH}{Q_{\max}+QH} \right)^{a_0-a_\infty} \cdot S_{\max}^{c_0} \cdot \left( \frac{1+SH}{S_{\max}+SH} \right)^{c_0-c_\infty} - AQ \cdot Q_{\max} - \\ &- AS \cdot S_{\max} - TFC \cdot \left( 1 - \exp \left( - \frac{(AQ_0 - AQ_\infty) \cdot Q_{\max} + (AS_0 - AS_\infty) \cdot S_{\max}}{TFC} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Вычисляемые по формулам (2.10), (2.11) максимальные значения прибыли предприятия  $PR_{\max}$  и ресурсов  $Q_{\max}$  и  $S_{\max}$  на практике являются недостижимыми, поскольку не учитывают влияние целевой транзакционной функции полезности.

Оптимальное значение функции прибыли (2.3), учитывающее влияние целевой транзакционной функции полезности, определяется из условия

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial Q} &= P \cdot Q^{a_0} \cdot \left( \frac{1+QH}{Q+QH} \right)^{a_0-a_\infty} \cdot S^{c_0} \cdot \left( \frac{1+SH}{S+SH} \right)^{c_0-c_\infty} \cdot \frac{a_\infty \cdot Q + a_0 \cdot QH}{Q \cdot (Q+QH)} - \\ &- AQ_\infty - (AQ_0 - AQ_\infty) \cdot \left( 1 - \exp \left( - \frac{(AQ_0 - AQ_\infty) \cdot Q + (AS_0 - AS_\infty) \cdot S}{TFC} \right) \right) = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial S} &= P \cdot Q^{a_0} \cdot \left( \frac{1+QH}{Q+QH} \right)^{a_0-a_\infty} \cdot S^{c_0} \cdot \left( \frac{1+SH}{S+SH} \right)^{c_0-c_\infty} \cdot \frac{c_\infty \cdot S + c_0 \cdot SH}{S \cdot (S+SH)} - \\ &- AS_\infty - (AS_0 - AS_\infty) \cdot \left( 1 - \exp \left( - \frac{(AQ_0 - AQ_\infty) \cdot Q + (AS_0 - AS_\infty) \cdot S}{TFC} \right) \right) + q = 0. \end{aligned} \right. \quad (2.12)$$

Значения ресурсов  $Q_{\text{opt}}$  и  $S_{\text{opt}}$ , отвечающие оптимальной прибыли предприятия, являются корнями системы уравнений (2.12), аналитическое решение которой найти невозможно, и приходится ограничиваться только численными вариантами решений. Оптимальное значение прибыли предприятия выражается соотношением

$$PR_{opt} = P \cdot Q_{opt}^{a_0} \cdot \left( \frac{1+QH}{Q_{opt}+QH} \right)^{a_0-a_\infty} \cdot S_{opt}^{c_0} \cdot \left( \frac{1+SH}{S_{opt}+SH} \right)^{c_0-c_\infty} - AQ \cdot Q_{opt} - AS \cdot S_{opt} - TFC \cdot \left( 1 - \exp \left( - \frac{(AQ_0 - AQ_\infty) \cdot Q_{opt} + (AS_0 - AS_\infty) \cdot S_{opt}}{TFC} \right) \right). \quad (2.13)$$

На рисунке 2 приведены графики поверхности функции прибыли  $PR = PR(Q, S)$  и плоскости безразличия целевой транзакционной функции полезности  $U(PR, S) = U(PR_{opt}, S_{opt}) = U_{opt}$ , построенные по формулам (2.3) и (2.4).

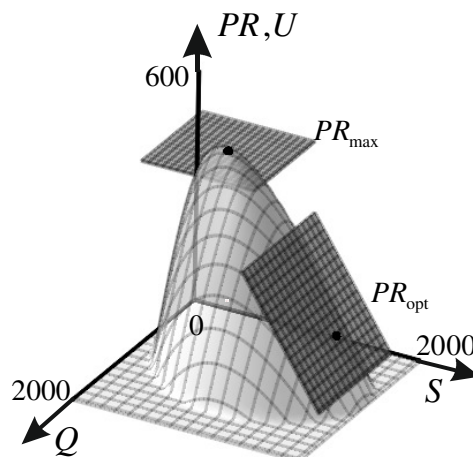


Рисунок 2 – Графики поверхности функции прибыли  $PR = PR(Q, S)$  и плоскостей безразличия целевой транзакционной функции полезности  $U(PR, S) = U(PR_{opt}, S_{opt}) = U_{opt}$  и  $U(PR, S) = U(PR_{max}, S_{max}) = U_{max}$ , построенные по формулам (2.3) и (2.4). Точки касания поверхности и плоскостей  $(PR_{opt}, Q_{opt}, S_{opt})$  и  $(PR_{max}, Q_{max}, S_{max})$  вычисляются по формулам (2.10), (2.11) и (2.12), (2.13). Расчетные данные:  $P = 20$ ,  $a_0 = 0,65$ ,  $a_\infty = 0,40$ ,  $c_0 = 0,35$ ,  $c_\infty = 0,3$ ,  $QH = 0,5$ ,  $SH = 0,6$ ,  $AQ_0 = 6$ ,  $AQ_\infty = 1,5$ ,  $AS_0 = 5$ ,  $AS_\infty = 1$ ,  $TFC = 20$ ,  $Q = 20$ ,  $q_0 = 0$ ,  $q = 0,45$ . Вычисленные значения параметров:  $Q_{max} = 452,4217$ ;  $S_{max} = 508,7234$ ;  $PR_{max} = 488,0557$ ;  $Q_{opt} = 822,3306$ ;  $S_{opt} = 1681,5012$ ;  $PR_{opt} = 147,55719$

Figure 2 – Graphs of the surface of the profit function  $PR = PR(Q, S)$  and indifference planes of the target transactional utility function  $U(PR, S) = U(PR_{opt}, S_{opt}) = U_{opt}$  and  $U(PR, S) = U(PR_{max}, S_{max}) = U_{max}$ , built according to formulas (2.3) and (2.4). The tangent points of the surface and planes  $(PR_{opt}, Q_{opt}, S_{opt})$  and  $(PR_{max}, Q_{max}, S_{max})$  are calculated by formulas (2.10), (2.11) and (2.12), (2.13). Calculated data:  $P = 20$ ,  $a_0 = 0,65$ ,  $a_\infty = 0,40$ ,  $c_0 = 0,35$ ,  $c_\infty = 0,3$ ,  $QH = 0,5$ ,  $SH = 0,6$ ,  $AQ_0 = 6$ ,  $AQ_\infty = 1,5$ ,  $AS_0 = 5$ ,  $AS_\infty = 1$ ,  $TFC = 20$ ,  $Q = 20$ ,  $q_0 = 0$ ,  $q = 0,45$ . Calculated parameter values:  $Q_{max} = 452,4217$ ;  $S_{max} = 508,7234$ ;  $PR_{max} = 488,0557$ ;  $Q_{opt} = 822,3306$ ;  $S_{opt} = 1681,5012$ ;  $PR_{opt} = 147,55719$

### Заключение

Исследовано влияние транзакционных издержек многофакторного производственного предприятия на формирование его прибыли.

Предложена экономико-математическая модель расчета прибыли предприятия, производственная функция которого учитывает изменения значений эластичностей по каждому ресурсу, а производственные и транзакционные издержки описываются экспоненциальной функцией.

Исследованы особенности формирования объемов прибыли в краткосрочный и долгосрочный периоды работы предприятия.

Получен вариант расчетной модели максимально возможной прибыли, игнорирующий роль транзакционных издержек, и вариант расчетной модели оптимальной прибыли, учитывающий влияние транзакционных издержек.

Показано, что при расчете объемов формирующейся прибыли необходимо максимизировать не только саму функцию прибыли, но и транзакционную функцию полезности.

Численный анализ результатов расчетов показывает недостижимость максимально возможных значений прибыли, поскольку на практике руководство предприятия максимизирует не саму прибыль, а свою полезность, выраженную в виде соответствующей транзакционной функции.

### Библиографический список

1. Уильямсон О.И. Экономические институты капитализма. Фирмы, рынки, отношенческая контрактация. Санкт-Петербург: Лениздат, SEV Press, 1996. 702 с. URL: <https://knigogid.ru/books/109125-ekonomicheskie-instituty-kapitalizma-firmy-rynki-otnoshencheskaya-kontraktaciya/toread>.
2. Фуруботн Э.Г., Рихтер Р. Институты и экономическая теория. Достижения новой институциональной экономической теории. Санкт-Петербург: Изд. дом С.-Пб. гос. ун-та, 2005. 702 с. URL: <https://studfile.net/preview/5226109/>; <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=19761714>. EDN: <https://www.elibrary.ru/qqlpbf>.
3. Попов Е.В., Коновалов А.А. Модель оптимизации издержек поиска информации // Проблемы управления. 2008. № 3. С. 69–72. URL: <http://mi.mathnet.ru/pu160>; <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=9955415>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ijwflt>.
4. Мантуленко А.В., Сараев А.Л., Сараев Л.А. К теории оптимального распределения факторов производства, производственных и транзакционных издержек // Вестник Самарского государственного университета. 2013. № 7 (108). С. 117–126. URL: <https://journals.ssau.ru/eco/article/view/5372>; <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=20886447>. EDN: <https://www.elibrary.ru/rpbncv>.
5. Сараев А.Л., Сараев Л.А. Модель оптимизации прибыли предприятия, учитывающая сверхпропорциональные производственные и транзакционные затраты // Вестник Самарского государственного университета. 2013. № 10 (111). С. 230–237. URL: [http://vestnikoldsamgu.ssau.ru/articles/111\\_35.pdf](http://vestnikoldsamgu.ssau.ru/articles/111_35.pdf).
6. Ильина Е.А. Модель формирования оптимальной прибыли предприятия, учитывающая взаимодействие трансформационных и транзакционных издержек // Экономика и предпринимательство. 2018. № 12 (101). С. 1191–1199. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36722316>. EDN: <https://www.elibrary.ru/yswtqd>.
7. Ильина Е.А. К расчету оптимальной прибыли предприятия, несущего производственные и транзакционные издержки // Экономика и предпринимательство. 2019. № 8 (109). С. 842–849. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41482468>. EDN: <https://www.elibrary.ru/fhjlby>.
8. Ильина Е.А. Влияние транзакционных издержек производственного предприятия на формирование его прибыли // Вестник Самарского университета. Экономика и управление. 2020. Т. 11, № 1. С. 144–152. DOI: <https://doi.org/10.18287/2542-0461-2020-11-1-144-152>. EDN: <https://www.elibrary.ru/gryyvl>.

### References

1. Williamson O.I. The economic institutions of capitalisms. Firms, Markets, Relational Contracting. St. Petersburg: Lenizdat, SEV Press, 1996, 702 p. Available at: <https://knigogid.ru/books/109125-ekonomicheskie-instituty-kapitalizma-firmy-rynki-otnoshencheskaya-kontraktaciya/toread>. (In Russ.)
2. Furubotn E.G., Richter R. Institutions and economic theory. Achievements of the new institutional economic theory. Saint Petersburg: Izd. dom S.–Pb. gos. un-ta, 2005, 702 p. Available at: <https://studfile.net/preview/5226109/>; <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=19761714>. EDN: <https://www.elibrary.ru/qqlpbf>. (In Russ.)
3. Popov E.V., Kononov A.A. A model of information retrieval costs optimization. *Control Sciences*, 2008, no. 3, pp. 69–72. Available at: <http://mi.mathnet.ru/pu160>; <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=9955415>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ijwflt>. (In Russ.)

4. Mantulenko A.V., Saraev A.L., Saraev L.A. On the theory of optimal allocation of production factors and transaction costs. *Vestnik of Samara State University*, 2013, no. 7 (108), pp. 117–126. Available at: <https://journals.ssau.ru/eco/article/view/5372>; <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=20886447>. EDN: <https://www.elibrary.ru/rpbncv>. (In Russ.)
5. Saraev A.L., Saraev L.A. Optimization model of profit of organizations, considering superproportionally production and transaction costs. *Vestnik of Samara State University*, 2013, no. 10 (111), pp. 230–237. Available at: [http://vestnikoldsamgu.ssau.ru/articles/111\\_35.pdf](http://vestnikoldsamgu.ssau.ru/articles/111_35.pdf). (In Russ.)
6. Ilyina E.A. The model of formation of the optimal profit of the enterprise, taking into account the interaction of transformational and transactional costs. *Journal of Economy and entrepreneurship*, 2018, no. 12 (101), pp. 1191–1199. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36722316>. EDN: <https://www.elibrary.ru/yswtqd>. (In Russ.)
7. Ilyina E.A. To the calculation of the optimal profit of the enterprise, bearing production and transaction costs. *Journal of Economy and entrepreneurship*, 2019, no. 8 (109), pp. 842–849. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41482468>. EDN: <https://www.elibrary.ru/fhjlby>. (In Russ.)
8. Ilyina E.A. Influence of transaction costs of a production enterprise on the formation of its profit. *Vestnik Samarskogo universiteta. Ekonomika i upravlenie = Vestnik of Samara University. Economics and Management*, 2020, vol. 11, no. 1, pp. 144–152. DOI: <https://doi.org/10.18287/2542-0461-2020-11-1-144-152>. EDN: <https://www.elibrary.ru/gryyvl>. (In Russ.)