

УДК 535.42

**ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФОКУСИРОВКИ ВИХРЕВЫХ
ГАУССОВЫХ ПУЧКОВ ВДОЛЬ ОСИ КРИСТАЛЛА**© 2015 С. Н. Хонина¹, С. Г. Волоотовский¹, А. В. Устинов², А. П. Краснов²¹Институт систем обработки изображений РАН, г. Самара²Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет)

В работе аналитически и численно исследуется острая фокусировка однородно-поляризованных лазерных гауссовых пучков с вихревой фазой вдоль оси анизотропного кристалла. Для анализа использованы две модели – геометрооптическая, реализованная в программном продукте ZEMAX, и волновая, основанная на разложении по плоским волнам. В рамках волновой модели в непараксиальном случае получено аналитическое выражение для комплексной амплитуды при фокусировке вихревого гауссова пучка в анизотропной среде. Показано, что в режиме слабой фокусировки обыкновенный и необыкновенный пучки смешиваются и формируемый пучок имеет смешанный «спиральный» тип поляризации. При острой фокусировке лазерного излучения вдоль оси кристалла формируется два фокуса, соответствующих обыкновенному и необыкновенному пучкам. При наличии в падающем пучке с круговой поляризацией вихревой фазы первого порядка в этих фокусах имеют место векторные цилиндрические распределения – с азимутальной поляризацией для обыкновенного пучка и с радиальной поляризацией для необыкновенного. Аналитические выкладки проиллюстрированы результатами численного моделирования. Детально показано как покомпонентное распределение интенсивности формируемых лазерных полей, так и их поляризационное состояние. Выполненные исследования полезны для разработки устройств, выполняющих поляризационные преобразования.

Одноосный кристалл, вихревые лазерные пучки, острая фокусировка, поляризационное преобразование.

doi: 10.18287/1998-6629-2015-14-1-190-206

Введение

Общее математическое описание фокусировки в анизотропной среде было описано в работе Stamnes and Jiang [1]. В последующих работах этих авторов фокусировка плоской волны вдоль оси кристалла с помощью цилиндрической линзы [2, 3] исследовалась численно и экспериментально. Основное внимание было уделено смещению положения фокуса.

В работах Stallinga [4, 5] была рассмотрена острая фокусировка с помощью осесимметричной линзы и показано, что при небольшой анизотропии происходит смещение и уширение фокуса, а при сильной анизотропии фокус разделяется на два пятна вдоль оптической оси. В статье [6] более подробно обсуждался механизм формирования двух фокусов и кольцевого распределения между ними, но в параксиальном приближении.

Фокусировка векторных цилиндрических пучков с радиальной и азимутальной поляризацией рассмотрена в работах [7, 8]. В этом случае использование длиннофокусной линзы [7] приводит к формированию кольцевого распределения, а различие в поляризации сказывается только на смещении фокуса. В режиме острой фокусировки [8] смещение фокуса зависит не только от поляризации, но и от числовой апертуры системы, а также степени анизотропии. В [8] рассмотрена фокусировка вихревых пучков с радиальной и азимутальной поляризацией, однако в работе [9] показано, что внесение фазовой сингулярности более эффективно в случае линейной и круговой поляризации.

Преобразование однородно-поляризованного излучения в векторные цилиндрические пучки при распространении вдоль оси кристалла рассматривалось

как для бесселевых, так и для гауссовых пучков [10-18].

В данной работе детально анализируется и численно исследуется поляризационное преобразование однородно-поляризованных вихревых гауссовых пучков при острой фокусировке вдоль оси анизотропного кристалла.

1. Распространение вихревых лазерных пучков вдоль оси кристалла

Рассмотрим одноосный кристалл, обладающий только анизотропной диэлектрической проницаемостью (магнитная проницаемость изотропна), причём ось кристалла ориентирована вдоль оптической оси. В этом случае тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости соответственно имеют следующий вид:

$$\vec{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_o & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_o & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_e \end{pmatrix}, \quad \vec{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Можно использовать различные модели для решения задачи распространения лазерного излучения в анизотропной среде.

Геометрооптический подход реализован в различных коммерческих программных продуктах (например, ZEMAX, LightTrans). Этот подход используется для того, чтобы получить наглядное представление исследуемых явлений.

Воспользуемся программой для оптического моделирования ZEMAX. Подробное описание используемого программного обеспечения приведено в руководстве [19].

Будем исследовать распространение обыкновенного и необыкновенного лучей, изменяя расположение оси кристалла и толщину кристалла L . Подадим на вход гауссов пучок и поместим перед кристаллом тонкую собирающую линзу. Тогда обыкновенный и необыкновенный лучи будут иметь различные углы преломления на границе раздела двух сред, что приведёт к возникновению различных эффектов.

На рис. 1, 2 видно, что если ось кристалла перпендикулярна оси z , то обыкновенные лучи сфокусируются в одной

точке, а необыкновенные астигматически исказятся и сфокусируются в два перпендикулярных отрезка, отстоящих друг от друга по оси z на некоторое расстояние.

На рис. 3 показано, что в случае, когда ось кристалла параллельна оси z , обыкновенные и необыкновенные лучи сфокусируются в двух разных точках, лежащих на оси z .

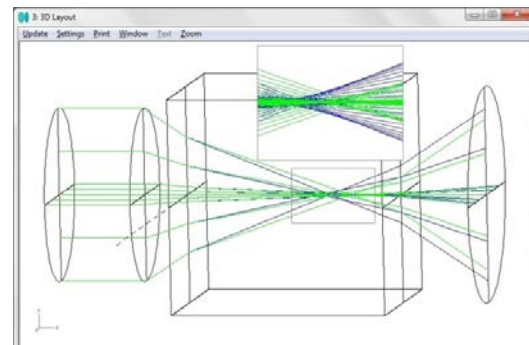


Рис. 1. Фокусировка светового пучка при расположении оси кристалла параллельно оси x

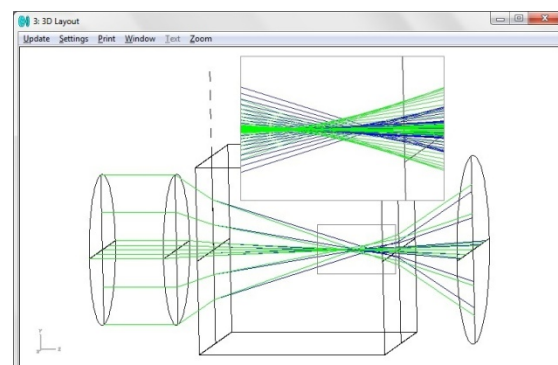


Рис. 2. Фокусировка светового пучка при расположении оси кристалла параллельно оси y

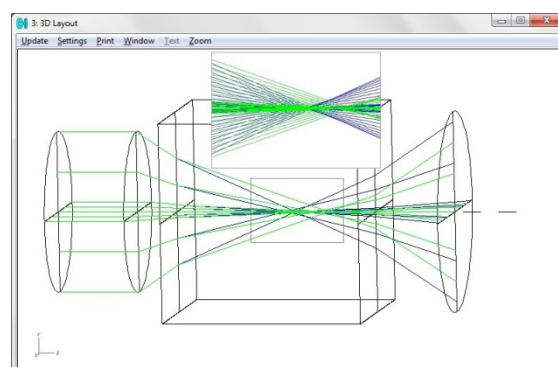


Рис. 3. Фокусировка светового пучка при расположении оси кристалла параллельно оси z

Использование геометрооптической модели позволяет качественно исследовать фокусировку в кристалле при раз-

личных положениях оси. Однако определить волновые характеристики формируемых полей в этом случае сложно. Поэтому рассмотрим фокусировку излучения в анизотропной среде на основе волновой теории дифракции [17, 18, 20].

Для лазерных пучков с вихревой фазой

$$\mathbf{E}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} E(r) \exp(im\varphi) \quad (2)$$

прохождение через одноосный кристалл параллельно его оси можно описать на основе разложения по плоским волнам [20, 21]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\rho, \theta, z) = & k^2 i^{2m} \exp(im\theta) \times \\ & \times \int_0^\infty \left\{ \begin{pmatrix} SS_m(t, \theta) & -SC_m(t, \theta) \\ -SC_m(t, \theta) & CC_m(t, \theta) \end{pmatrix} \exp[ikz\gamma_o(\sigma)] + \right. \\ & \left. + \begin{pmatrix} CC_m(t, \theta) & SC_m(t, \theta) \\ SC_m(t, \theta) & SS_m(t, \theta) \\ -\frac{\varepsilon_o \sigma}{\varepsilon_e \gamma_e(\sigma)} C_m(t, \theta) & -\frac{\varepsilon_o \sigma}{\varepsilon_e \gamma_e(\sigma)} S_m(t, \theta) \end{pmatrix} \right\} \times \\ & \times \exp[ikz\gamma_e(\sigma)] \left\{ \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} F_m(\sigma) \sigma d\sigma, \right. \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\gamma_o(\sigma) = \sqrt{\varepsilon_o - \sigma^2}, \quad \gamma_e(\sigma) = \sqrt{\varepsilon_o - \sigma^2 \frac{\varepsilon_o}{\varepsilon_e}}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} C_m(t, \theta) &= \frac{i}{2} [e^{i\theta} J_{m+1}(t) - e^{-i\theta} J_{m-1}(t)], \\ S_m(t, \theta) &= \frac{1}{2} [e^{i\theta} J_{m+1}(t) + e^{-i\theta} J_{m-1}(t)], \end{aligned} \quad (5)$$

$$SC_m(t, \theta) = \frac{i}{4} [e^{i2\theta} J_{m+2}(t) - e^{-i2\theta} J_{m-2}(t)],$$

$$CC_m(t, \theta) = \frac{1}{4} [2J_m(t) - e^{i2\theta} J_{m+2}(t) - e^{-i2\theta} J_{m-2}(t)],$$

$$SS_m(t, \theta) = \frac{1}{4} [2J_m(t) + e^{i2\theta} J_{m+2}(t) + e^{-i2\theta} J_{m-2}(t)],$$

$$t = k\rho\sigma,$$

$$F_m(\sigma) = \int_0^\infty E(r) J_m(kr\sigma) r dr, \quad (6)$$

(p_x, p_y) – вектор поляризации падающего на кристалл пучка.

Как видно из выражения (3), обыкновенный луч соответствует ТЕ-моду, необыкновенный – ТМ-моду.

Рассмотрим выражение (3) для различных значений m .

2. Отсутствие в падающем пучке вихревой фазы

В отсутствие вихревой фазовой зависимости ($m=0$) выражение (3) для обыкновенного и необыкновенного пучков принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{m=0}^o(\rho, \theta, z) = & \\ & \left(\begin{array}{l} p_x J_0(k\rho\sigma) + J_2(k\rho\sigma) \times \\ \times (p_x \cos 2\theta + p_y \sin 2\theta) \\ p_y J_0(k\rho\sigma) - J_2(k\rho\sigma) \times \\ \times (p_y \cos 2\theta - p_x \sin 2\theta) \\ 0 \end{array} \right) \times \quad (7) \\ & \times \exp[ikz\gamma_o(\sigma)] F_0(\sigma) \sigma d\sigma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{m=0}^e(\rho, \theta, z) = & \\ & \left(\begin{array}{l} p_x J_0(k\rho\sigma) - J_2(k\rho\sigma) \times \\ \times (p_x \cos 2\theta + p_y \sin 2\theta) \\ p_y J_0(k\rho\sigma) + J_2(k\rho\sigma) \times \\ \times (p_y \cos 2\theta - p_x \sin 2\theta) \\ -\frac{2i\varepsilon_o \sigma}{\varepsilon_e \gamma_e(\sigma)} J_1(k\rho\sigma) \times \\ \times (p_x \cos 2\theta + p_y \sin 2\theta) \end{array} \right) \times \quad (8) \\ & \times \exp[ikz\gamma_e(\sigma)] F_0(\sigma) \sigma d\sigma. \end{aligned}$$

При круговой поляризации падающего на кристалл излучения $(p_x, p_y) = 1/\sqrt{2} (1, \pm i)$ выражения (7) и (8) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_{m=0}^{circ\pm}(\rho, \theta, z) = & \frac{k^2}{2\sqrt{2}} \int_0^\infty \begin{pmatrix} J_0(k\rho\sigma) \\ \pm iJ_0(k\rho\sigma) \\ 0 \end{pmatrix} \times \\
 & \times [\exp(ikz\gamma_o(\sigma)) + \exp(ikz\gamma_e(\sigma))] F_0(\sigma) \sigma d\sigma + \\
 & + \frac{k^2}{2} \int_0^\infty \begin{pmatrix} J_2(k\rho\sigma) \exp(\pm i2\theta) \times \\ \times [\exp(ikz\gamma_o(\sigma)) - \exp(ikz\gamma_e(\sigma))] \\ \mp iJ_2(k\rho\sigma) \exp(\pm i2\theta) \times \\ \times [\exp(ikz\gamma_o(\sigma)) - \exp(ikz\gamma_e(\sigma))] \\ -2i \frac{\varepsilon_o}{\varepsilon_e} \frac{\sigma}{\gamma_e(\sigma)} J_1(k\rho\sigma) \times \\ \times \exp(\pm i\theta) \exp(ikz\gamma_2(\sigma)) \end{pmatrix} \times \\
 & \times F_0(\sigma) \sigma d\sigma. \tag{9}
 \end{aligned}$$

Из (9) видно, что при круговой поляризации в поперечных компонентах имеет место вихревая фазовая особенность второго порядка, в продольном – первого порядка, причём в изотропной среде, когда $\gamma_e(\sigma) = \gamma_o(\sigma)$, вихревые особенности второго порядка исчезнут. Заметим, что в параксиальном случае, когда $\sigma \rightarrow 0$: $\gamma_e(\sigma) \rightarrow \gamma_o(\sigma)$, ситуация будет аналогичная, т.е. влияние вихревых фазовых особенностей второго порядка будет отсутствовать.

Если падающее на кристалл излучение представляет собой гауссов пучок с параболическим сходящимся волновым фронтом:

$$E(r) = \exp\left(-\frac{r^2}{2w^2}\right) \exp\left(-ik \frac{r^2}{2f}\right), \tag{10}$$

то выражение (6) можно приближённо оценить, используя справочный интеграл [22]:

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty x \exp(-px^2) J_\nu(cx) dx = & \frac{c\sqrt{\pi}}{8p^{3/2}} \exp\left(-\frac{c^2}{8p}\right) \times \\
 & \times \left[I_{\nu-1}\left(\frac{c^2}{8p}\right) - I_{\nu+1}\left(\frac{c^2}{8p}\right) \right], \text{ Re } p > 0, \text{ Re } \nu > -2. \tag{11}
 \end{aligned}$$

Из выражения (11) для $\nu = 0$:

$$\int_0^\infty x \exp(-px^2) J_0(cx) dx = \frac{1}{2p} \exp\left(-\frac{c^2}{4p}\right). \tag{12}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 F_0(\sigma) = & \int_0^\infty \exp\left[-\frac{r^2}{2}\left(\frac{1}{w^2} + \frac{ik}{f}\right)\right] J_0(kr\sigma) r dr = \\
 = & \frac{fw^2}{f + ikw^2} \exp\left(-\frac{k^2\sigma^2 w^2 f}{2(f + ikw^2)}\right). \tag{13}
 \end{aligned}$$

Перепишем (13) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 F_0(\sigma) = & \left(\frac{1}{k^2\sigma_w^2} - \frac{iw^2}{kf\sigma_w^2}\right) \times \\
 & \times \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2\sigma_w^2}\right) \exp\left(i\frac{kw^2\sigma^2}{2f\sigma_w^2}\right), \tag{14}
 \end{aligned}$$

где $\sigma_w^2 = 1/(kw)^2 + (w/f)^2$.

Из выражения (14) следует, что пространственный спектр для функции (10) представляет собой гауссову функцию с параболическим расходящимся фронтом. Основная энергия сосредоточена в низких частотах и становится более компактной с уменьшением фокусного расстояния f . В этом случае выражения для собственных значений (4) можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
 \gamma_o(\sigma) \approx & \sqrt{\varepsilon_o} - \frac{\sigma^2}{2\sqrt{\varepsilon_o}}, \\
 \gamma_e(\sigma) \approx & \sqrt{\varepsilon_o} - \frac{\sigma^2 \sqrt{\varepsilon_o}}{2\varepsilon_e}. \tag{15}
 \end{aligned}$$

Ненулевые значения на оптической оси связаны с первым интегралом в выражении (9), который при $\rho = 0$ можно вычислить точно:

$$\begin{aligned}
 E_{m=0}^{circ\pm}(\rho = 0, z) = & \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix} \frac{k^2}{2} \times \\
 & \times \int_0^\infty [\exp(ikz\gamma_o(\sigma)) + \exp(ikz\gamma_e(\sigma))] \times \\
 & \times F_0(\sigma) \sigma d\sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix} [E_{m=0}^o(z) + E_{m=0}^e(z)], \tag{16}
 \end{aligned}$$

$$E_{m=0}^o(z) = \left(\frac{1}{2\sigma_w^2} - \frac{ikw^2}{2f\sigma_w^2} \right) \exp(ikz\sqrt{\varepsilon_o}) \times \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2\sigma_w^2}\right) \times \exp\left[\frac{ik}{2}\left(\frac{w^2}{f\sigma_w^2} - \frac{z}{\sqrt{\varepsilon_o}}\right)\sigma^2\right] \sigma d\sigma, \quad (17a)$$

$$E_{m=0}^e(z) = \left(\frac{1}{2\sigma_w^2} - \frac{ikw^2}{2f\sigma_w^2} \right) \exp(ikz\sqrt{\varepsilon_o}) \times \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2\sigma_w^2}\right) \times \exp\left[\frac{ik}{2}\left(\frac{w^2}{f\sigma_w^2} - \frac{z\sqrt{\varepsilon_o}}{\varepsilon_e}\right)\sigma^2\right] \sigma d\sigma. \quad (17b)$$

Так как максимальное значение интегралов (17a) и (17b) будет достигаться при обнулении показателя второй подынтегральной экспоненты, то ясно, что обыкновенный и необыкновенный пучки будут фокусироваться на различных расстояниях:

$$z_f^o = \frac{f\sqrt{\varepsilon_o}}{1+(f/kw^2)^2}, \quad z_f^e = \frac{f\varepsilon_e/\sqrt{\varepsilon_o}}{1+(f/kw^2)^2}. \quad (18)$$

Очевидно, для достаточно больших размеров падающего пучка (w – велико) получается простая зависимость:

$$z_f^o \approx f\sqrt{\varepsilon_o}, \quad z_f^e \approx f\varepsilon_e/\sqrt{\varepsilon_o}. \quad (19)$$

Поле на оптической оси (16) имеет следующий явный вид:

$$\mathbf{E}_{m=0}^{circ\pm}(\rho=0, z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix} \left(1 - \frac{ikw^2}{f}\right) \times \exp(ikz\sqrt{\varepsilon_o}) \left\{ \left[1 - ik\left(\frac{w^2}{f} - \frac{z\sigma_w^2}{\sqrt{\varepsilon_o}}\right)\right]^{-1} + \left[1 - ik\left(\frac{w^2}{f} - \frac{z\sigma_w^2\sqrt{\varepsilon_o}}{\varepsilon_e}\right)\right]^{-1} \right\}. \quad (20)$$

Перепишем выражение (20) в более удобном виде:

$$\mathbf{E}_{m=0}^{circ\pm}(\rho=0, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix} \left(1 - \frac{ikw^2}{f}\right) \times \exp(ikz\sqrt{\varepsilon_o}) \frac{ikz\sigma_w^2}{2\varepsilon_e\sqrt{\varepsilon_o}} \times \frac{\varepsilon_o - \varepsilon_e}{[1 - i\alpha_o(z)][1 - i\alpha_e(z)]}, \quad (21)$$

где

$$\alpha_o(z) = k((w^2/f) - (z\sigma_w^2/\sqrt{\varepsilon_o})),$$

$$\alpha_e(z) = k((w^2/f) - (z\sigma_w^2\sqrt{\varepsilon_o}/\varepsilon_e)).$$

Из (21) явно видно, что максимальные значения интенсивности на оптической оси будут достигаться при $\alpha_o(z) = 0$ и $\alpha_e(z) = 0$, т.е. в соответствии с (18).

Ниже приведены результаты моделирования фокусировки гауссова пучка с круговой поляризацией в кристалле исландского шпата ($\varepsilon_o = 2,75$, $\varepsilon_e = 2,21$) с использованием выражения (9). Параметры расчёта были выбраны следующие: $\lambda = 6,328$ мкм, $f = 30$ мм, радиус w варьировался в диапазоне от 0,15 мм до 2 мм.

На рис. 4 показано нормированное распределение интенсивности на оптической оси внутри кристалла при фокусировке гауссова пучка, не имеющего вихревой фазы.

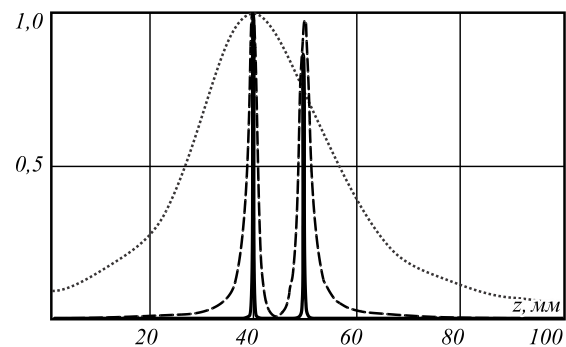


Рис. 4. Распределение нормированной интенсивности на оптической оси внутри кристалла при $t = 0$ при фокусировке гауссова пучка радиусом 0,15 мм (точечная линия), 0,5 мм (пунктирная линия) и 2 мм (чёрная линия)

Как видно из рис. 4, при малом размере освещающего пучка два фокуса сливаются в один, а увеличение радиуса гауссова пучка w приводит к формированию чётко выраженных фокусов, соответствующих обыкновенному и необыкновенному пучкам. По формуле (19) $z_f^o \approx 49,75$ мм, $z_f^e \approx 39,98$ мм, что с хорошей точностью согласуется с результатами численного моделирования (рис. 4).

Рассмотрим далее распределение поля (9) в плоскости, перпендикулярной оптической оси. Учитывая, что вклад продольного компонента мал, будем рассматривать только поперечные компоненты.

Для взятия интегралов в (9) воспользуемся выражением (11) при $\nu = 0$ (соответствует (12)) и $\nu = 2$:

$$\int_0^\infty x \exp(-px^2) J_2(cx) dx = \frac{1}{2p} \exp\left(-\frac{c^2}{8p}\right) \times \left[\frac{8p}{c^2} \operatorname{sh}\left(\frac{c^2}{8p}\right) - \exp\left(-\frac{c^2}{8p}\right) \right] = \frac{2}{c^2} - \exp\left(-\frac{c^2}{4p}\right) \left(\frac{2}{c^2} + \frac{1}{2p} \right). \quad (22)$$

Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{k^2}{2} \int_0^\infty J_0(k\rho\sigma) \exp(ikz\gamma_{o,e}(\sigma)) F_0(\sigma) \sigma d\sigma = \\ & = \frac{1}{2\sigma_w^2} \left(1 - \frac{ikw^2}{f} \right) \exp(ikz\sqrt{\varepsilon_o}) \times \\ & \times \int_0^\infty \exp\left[-\frac{\sigma^2}{2\sigma_w^2} (1 - i\alpha_{o,e}(z)) \right] J_0(k\rho\sigma) \sigma d\sigma = \\ & = \left(1 - \frac{ikw^2}{f} \right) \frac{\exp(ikz\sqrt{\varepsilon_o})}{2(1 - i\alpha_{o,e}(z))} \times \\ & \times \exp\left[-\frac{k^2\sigma_w^2\rho^2}{2(1 - i\alpha_{o,e}(z))} \right], \end{aligned} \quad (23a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{k^2}{2} \int_0^\infty J_2(k\rho\sigma) \exp(ikz\gamma_{o,e}(\sigma)) F_0(\sigma) \sigma d\sigma = \\ & = \frac{1}{2\sigma_w^2} \left(1 - \frac{ikw^2}{f} \right) \exp(ikz\sqrt{\varepsilon_o}) \times \\ & \times \int_0^\infty \exp\left[-\frac{\sigma^2}{2\sigma_w^2} (1 - i\alpha_{o,e}(z)) \right] J_2(k\rho\sigma) \sigma d\sigma = \\ & = \left(1 - \frac{ikw^2}{f} \right) \exp(ikz\sqrt{\varepsilon_o}) \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{k^2\sigma_w^2\rho^2} - \exp\left[-\frac{k^2\sigma_w^2\rho^2}{2(1 - i\alpha_{o,e}(z))} \right] \times \right. \\ & \left. \times \left[\frac{1}{k^2\sigma_w^2\rho^2} + \frac{1}{2(1 - i\alpha_{o,e}(z))} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (23б)$$

Используя выражения (23а) и (23б), можно записать поперечные компоненты поля (9):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\pm, m=0}^{circ\pm}(\rho, \theta, z) & = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} \left(1 - \frac{ikw^2}{f} \right) \exp(ikz\sqrt{\varepsilon_o}) \times \\ & \times \left\{ \frac{\exp\left[-\frac{k^2\sigma_w^2\rho^2}{2(1 - i\alpha_o(z))} \right]}{2(1 - i\alpha_o(z))} + \frac{\exp\left[-\frac{k^2\sigma_w^2\rho^2}{2(1 - i\alpha_e(z))} \right]}{2(1 - i\alpha_e(z))} \right\} + \\ & + \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix} \exp(\pm i2\theta) \left(1 - \frac{ikw^2}{f} \right) \exp(ikz\sqrt{\varepsilon_o}) \times \\ & \times \left\{ \exp\left[-\frac{k^2\sigma_w^2\rho^2}{2(1 - i\alpha_e(z))} \right] \left[\frac{1}{k^2\sigma_w^2\rho^2} + \frac{1}{2(1 - i\alpha_e(z))} \right] - \right. \\ & \left. - \exp\left[-\frac{k^2\sigma_w^2\rho^2}{2(1 - i\alpha_o(z))} \right] \left[\frac{1}{k^2\sigma_w^2\rho^2} + \frac{1}{2(1 - i\alpha_o(z))} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Распределение и поляризация поля (24) зависит как от расстояния z , так и от угла θ . Очевидно, в плоскостях фокусов (при $z = z_f^o$ и $z = z_f^e$) основной вклад будут вносить соответствующие пучки (обыкновенный и необыкновенный). Перепишем выражение (24) так, чтобы зависимость от угла была более очевидной в плоскостях фокусов:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\perp, m=0}^{circ\pm}(\rho, \theta, z) = & \exp(ikz\sqrt{\varepsilon_o}) \left(1 - \frac{ikw^2}{f}\right) \times \\ & \times \left\{ \frac{1 - \exp(\pm i2\theta)}{\pm i[1 + \exp(\pm i2\theta)]} \frac{\exp\left[-\frac{k^2\sigma_w^2\rho^2}{2(1-i\alpha_o(z))}\right]}{2(1-i\alpha_o(z))} + \right. \\ & \left. + \frac{1 + \exp(\pm i2\theta)}{\pm i[1 - \exp(\pm i2\theta)]} \frac{\exp\left[-\frac{k^2\sigma_w^2\rho^2}{2(1-i\alpha_e(z))}\right]}{2(1-i\alpha_e(z))} \right\} + \\ & + \exp(ikz\sqrt{\varepsilon_o}) \left(1 - \frac{ikw^2}{f}\right) \frac{\exp(\pm i2\theta)}{k^2\sigma_w^2\rho^2} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix} \times \\ & \times \left\{ \exp\left[-\frac{k^2\sigma_w^2\rho^2}{2(1-i\alpha_e(z))}\right] - \exp\left[-\frac{k^2\sigma_w^2\rho^2}{2(1-i\alpha_o(z))}\right] \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Из (25) видно, что в удалении от оптической оси, где существенны первые два слагаемых, в фокусах имеет место неоднородная (зависящая от угла) линейная поляризация, взаимно ортогональная для фокусов. Вблизи оптической оси, где основной вклад вносит третье слагаемое, в обычном фокусе остаётся изначальная круговая поляризация, а в необыкновенном – круговая с противоположным знаком.

Чтобы проиллюстрировать приведённые выше рассуждения, рассмотрим более детально распределения в плоскостях фокусов при определённых значениях угла θ . В плоскости фокуса обыкновенного пучка (при $z = z_f^o$, $\alpha_o(z) = 0$) в направлении оси x ($\theta = 0$) выражение (25) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\perp, m=0}^{circ\pm}(\rho, \theta = 0, z = z_f^o) \approx & \approx \exp(ikz\sqrt{\varepsilon_o}) \left(1 - \frac{ikw^2}{f}\right) \times \\ & \times \exp\left(-\frac{k^2\sigma_w^2\rho^2}{2}\right) \left\{ \pm i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{k^2\sigma_w^2\rho^2} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} \right\}, \end{aligned}$$

а в плоскости фокуса необыкновенного пучка (при $z = z_f^e$, $\alpha_e(z) = 0$):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\perp, m=0}^{circ\pm}(\rho, \theta = 0, z = z_f^e) = & = \exp(ikz\sqrt{\varepsilon_o}) \left(1 - \frac{ikw^2}{f}\right) \times \\ & \times \exp\left(-\frac{k^2\sigma_w^2\rho^2}{2}\right) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{k^2\sigma_w^2\rho^2} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Как видно из этих выражений, поляризационные распределения в фокусах взаимно ортогональны, причём в центре имеет место круговая поляризация, а на периферии – линейная. Интенсивность в фокусах имеет вид гауссова пучка.

В табл. 1 показаны картины продольного распределения интенсивности для отдельных компонентов электрического поля обыкновенного и необыкновенного пучков и их суперпозиции. Покомпонентная визуализация позволяет легко видеть, что первый фокус содержит z -компонент и является необыкновенным. Однако из распределения общей интенсивности видно, что вклад продольного компонента несуществен.

В табл. 2 показаны картины поперечных распределений полной и покомпонентной интенсивности в каждом из фокусов, а также в кольце между ними. В поперечных картинах полной интенсивности (первая строка) стрелками показаны локальные поляризационные состояния.

Как видно из табл. 2 (первая строка), в центрах фокусов поляризация остаётся круговой, однако в периферийной части фокальной области формируется линейная поляризация с цилиндрической симметрией. Во второй строке показано распределение для обыкновенного пучка, который в плоскости $z = 40$ мм расфокусирован и имеет существенное влияние только на периферии, а фокусируется на расстоянии $z = 50$ мм. В третьей строке приведено распределение для необыкновенного пучка, который сфокусирован в плоскости $z = 40$ мм, а на расстоянии $z = 50$ мм расфокусирован. Кольцо между фокусами имеет вихревую (смешанную цилиндрическую) поляризацию.

Таблица 1. Продольное распределение интенсивности (негатив) при фокусировке гауссова пучка ($m = 0$) радиусом 0,5 мм

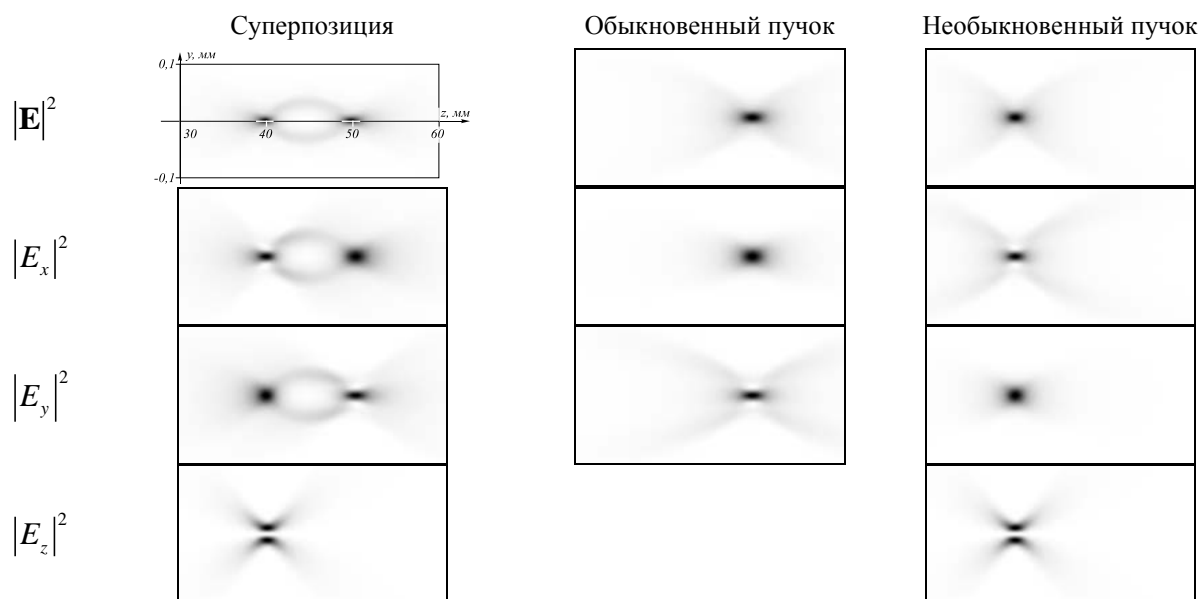
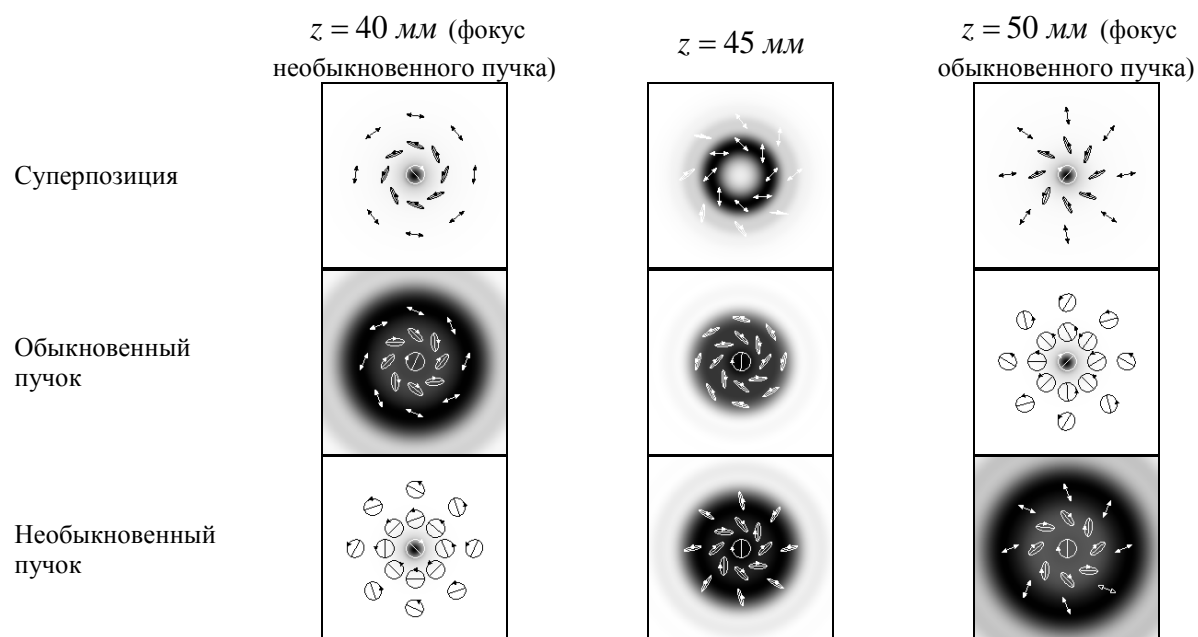


Таблица 2. Поперечные распределения интенсивности (негатив, 0,1 мм × 0,1 мм) в каждом из фокусов, а также в кольце между ними, при фокусировке гауссова пучка ($m=0$) радиусом 0,5 мм



3. Наличие в падающем пучке вихревой фазы первого порядка

При наличии в пучке вихревой фазовой зависимости первого порядка ($m = 1$) выражение (3) для обыкновенного и необыкновенного пучков принимает следующий вид:

$$\mathbf{E}_1^o(\rho, \theta, z) = -\frac{k^2}{4} \times \int_0^\infty \begin{pmatrix} 2e^{i\theta} J_1(k\rho\sigma) p_x - e^{-i\theta} J_1(k\rho\sigma)(p_x + ip_y) + e^{i3\theta} J_3(k\rho\sigma)(p_x - ip_y) \\ 2e^{i\theta} J_1(k\rho\sigma) p_y - ie^{-i\theta} J_1(k\rho\sigma)(p_x + ip_y) - ie^{i3\theta} J_3(k\rho\sigma)(p_x - ip_y) \\ 0 \end{pmatrix} \times \exp[ikz\gamma_o(\sigma)] F_1(\sigma) \sigma d\sigma, \quad (26)$$

$$\mathbf{E}_1^e(\rho, \theta, z) = -\frac{k^2}{4} \times \int_0^\infty \begin{pmatrix} 2e^{i\theta} J_1(k\rho\sigma) p_x + e^{-i\theta} J_1(k\rho\sigma)(p_x + ip_y) - e^{i3\theta} J_3(k\rho\sigma)(p_x - ip_y) \\ 2e^{i\theta} J_1(k\rho\sigma) p_y + ie^{-i\theta} J_1(k\rho\sigma)(p_x + ip_y) + ie^{i3\theta} J_3(k\rho\sigma)(p_x - ip_y) \\ \frac{2i\varepsilon_o\sigma}{\varepsilon_e\gamma_e(\sigma)} [J_0(k\rho\sigma)(p_x + ip_y) - e^{i2\theta} J_2(t)(p_x - ip_y)] \end{pmatrix} \times \exp[ikz\gamma_e(\sigma)] F_1(\sigma) \sigma d\sigma, \quad (27)$$

$$\mathbf{E}_1^{circ+}(\rho, \theta, z) = -\frac{ik^2}{2\sqrt{2}} \int_0^\infty \begin{pmatrix} e^{i\theta} J_1(k\rho\sigma) + e^{i3\theta} J_3(k\rho\sigma) \\ ie^{i\theta} J_1(k\rho\sigma) - ie^{i3\theta} J_3(k\rho\sigma) \\ 0 \end{pmatrix} \times \exp[ikz\gamma_o(\sigma)] F_1(\sigma) \sigma d\sigma - \frac{k^2}{2\sqrt{2}} \int_0^\infty \begin{pmatrix} e^{i\theta} J_1(k\rho\sigma) - e^{i3\theta} J_3(k\rho\sigma) \\ ie^{i\theta} J_1(k\rho\sigma) + ie^{i3\theta} J_3(k\rho\sigma) \\ -(2i\varepsilon_o\sigma / \varepsilon_e\gamma_e(\sigma)) e^{i2\theta} J_2(t) \end{pmatrix} \times \exp[ikz\gamma_e(\sigma)] F_1(\sigma) \sigma d\sigma. \quad (28)$$

При круговой поляризации падающего на кристалл излучения $(p_x, p_y) = 1/\sqrt{2}(1, \pm i)$ результат будет существенно зависеть от направления поляризации, поэтому выпишем отдельно выражения для «+» и «-» круговой поляризации:

$$\mathbf{E}_1^{circ-}(\rho, \theta, z) = -\frac{ik^2}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \exp[ikz\gamma_o(\sigma)] J_1(t) F_1(\sigma) \sigma d\sigma - \frac{k^2}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \begin{pmatrix} J_1(k\rho\sigma) \cos \theta \\ J_1(k\rho\sigma) \sin \theta \\ \frac{i\varepsilon_o\sigma}{\varepsilon_e\gamma_e(\sigma)} J_0(k\rho\sigma) \end{pmatrix} \times \exp[ikz\gamma_e(\sigma)] F_1(\sigma) \sigma d\sigma. \quad (29)$$

Из выражения (29) следует, что при «-» круговой поляризации (т.е. когда направление поляризации противоположно направлению оптического вихря) обыкновенный пучок имеет азимутальную поляризацию, а необыкновенный пучок имеет радиальную поляризацию. Чтобы разделить эти пучки пространственно, можно внести в падающее на кристалл излучение сходящийся волновой фронт, тогда вдоль оптической оси сформируются два отдельных фокуса, соответствующих обыкновенному и необыкновенному пучкам. При изменении знака фазового вихря ситуации для «+» и «-» круговой поляризации взаимно изменятся. Заметим также, что в случае формирования для поперечных компонентов электрического поля цилиндрического типа поляризации (29) продольный компонент приобретает ненулевое значение на оптической оси.

В табл. 3 показаны картины покомпонентного продольного распределения интенсивности обыкновенного и необыкновенного пучков и их суперпозиции при фокусировке вихревого гауссова пучка ($m = 1$) с «-» круговой поляризацией. Покомпонентная визуализация позволяет

легко видеть, что в сагиттальном сечении ($\theta = 0$) первый фокус содержит только x -компонент и z -компонент (это соответствует радиальной поляризации), а второй фокус содержит только y -компонент (это соответствует азимутальной поляризации).

Поперечные компоненты электрического поля в данном случае имеют кольцевую структуру даже в плоскостях фокусов, что соответствует наличию поляризационной сингулярности. При этом продольный компонент (табл. 3, четвертая

строка) имеет ненулевую интенсивность на оптической оси, но его вклад несуществен в полной интенсивности.

В табл. 4 приведены картины поперечных распределений, на которых стрелками показаны локальные поляризационные состояния. Как видно, в первом фокусе имеется кольцо с радиальной поляризацией (необыкновенные лучи), а во втором – с азимутальной (обыкновенные лучи). Кольцо между фокусами по-прежнему имеет вихревую поляризацию.

Таблица 3. Покомпонентное продольное распределение интенсивности (негатив) при фокусировке вихревого гауссова пучка ($m=1$) радиусом 0,5 мм с «-» круговой поляризацией

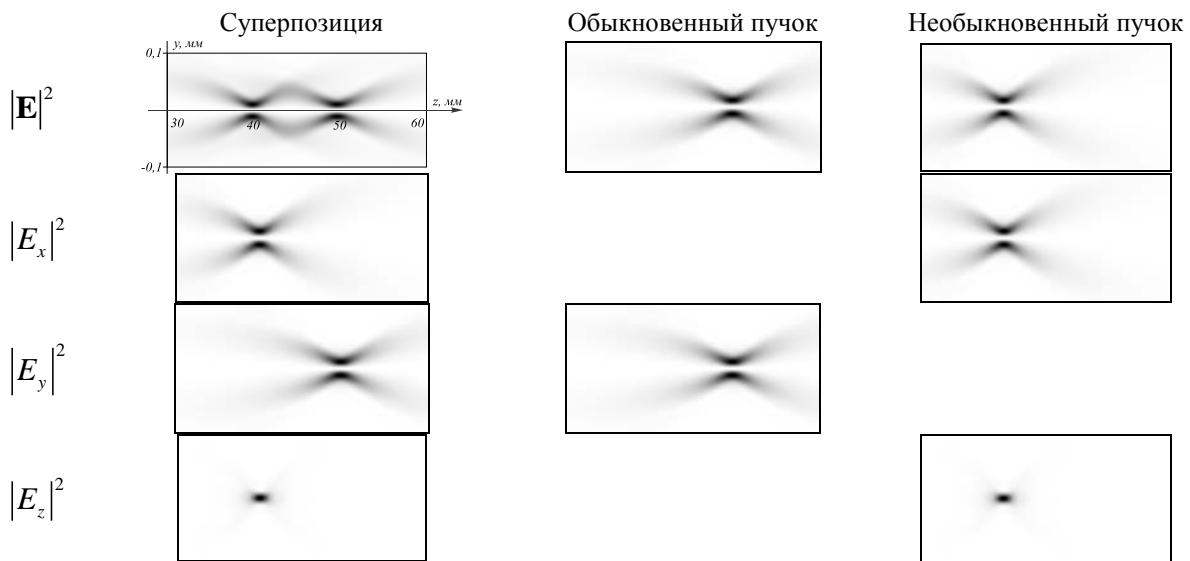
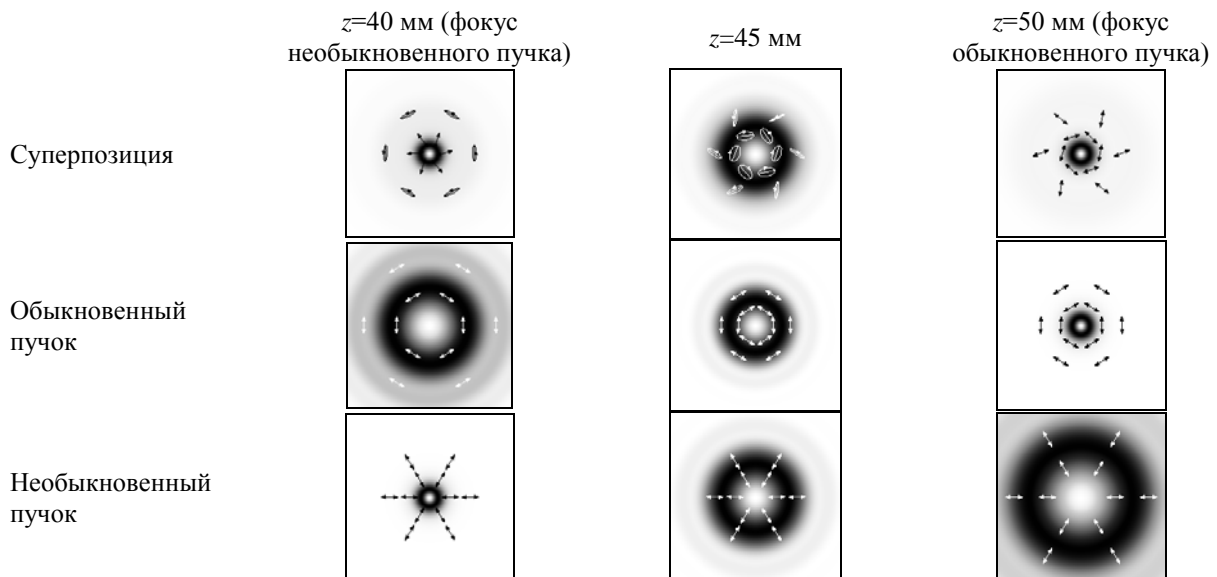


Таблица 4. Поперечные распределения интенсивности (негатив, 0,1 мм×0,1 мм) в каждом из фокусов, а также в кольце между ними, при фокусировке вихревого гауссова пучка ($m=1$) радиусом 0,5 мм с «-» круговой поляризацией



В табл. 4 явно видно, что обыкновенный пучок имеет азимутальную поляризацию (вторая строка), а необыкновенный – радиальную (третья строка). Таким образом, при фокусировке вихревых гауссовых пучков первого порядка вдоль оси кристалла формируется два ортогонально поляризованных цилиндрических пучка.

При выходе пучков из кристалла их можно снова собрать дополнительной линзой и отделить друг от друга, например, ди-

$$\mathbf{E}_m^o(\rho, \theta, z) = \frac{k^2 (-1)^m}{4} \times \int_0^\infty \begin{pmatrix} 2e^{im\theta} J_m(k\rho\sigma) p_x + e^{i(m-2)\theta} J_{m-2}(k\rho\sigma)(p_x + ip_y) + e^{i(m+2)\theta} J_{m+2}(k\rho\sigma)(p_x - ip_y) \\ 2e^{im\theta} J_m(k\rho\sigma) p_y + ie^{i(m-2)\theta} J_{m-2}(k\rho\sigma)(p_x + ip_y) - ie^{i(m+2)\theta} J_{m+2}(k\rho\sigma)(p_x - ip_y) \\ 0 \end{pmatrix} \times \exp[ikz\gamma_o(\sigma)] F_m(\sigma) \sigma d\sigma, \quad (30)$$

$$\mathbf{E}_m^e(\rho, \theta, z) = \frac{k^2 (-1)^m}{4} \times \int_0^\infty \begin{pmatrix} 2e^{im\theta} J_m(k\rho\sigma) p_x - e^{i(m-2)\theta} J_{m-2}(k\rho\sigma)(p_x + ip_y) - e^{i(m+2)\theta} J_{m+2}(k\rho\sigma)(p_x - ip_y) \\ 2e^{im\theta} J_m(k\rho\sigma) p_y - ie^{i(m-2)\theta} J_{m-2}(k\rho\sigma)(p_x + ip_y) + ie^{i(m+2)\theta} J_{m+2}(k\rho\sigma)(p_x - ip_y) \\ (2i\varepsilon_o\sigma/\varepsilon_e\gamma_2(\sigma)) [e^{i(m-1)\theta} J_{m-1}(k\rho\sigma)(p_x + ip_y) - e^{i(m+1)\theta} J_{m+1}(k\rho\sigma)(p_x - ip_y)] \end{pmatrix} \times \exp[ikz\gamma_e(\sigma)] F_m(\sigma) \sigma d\sigma. \quad (31)$$

Как следует из выражений (30) и (31), в кристалле дополнительно появляются пучки с пониженной и повышенной на два порядка вихревой фазой. В случае круговой поляризации падающего на кристалл поля дополнительно формируются пучки только с пониженной (для «-» круговой поляризации) или только повышенной (для «+» круговой поляризации) на два порядка вихревой фазовой сингулярностью.

Поперечные компоненты будут иметь ненулевое значение на оптической оси при трёх значениях $m = 0, 2, -2$. Случай $m = 0$ был рассмотрен в разделе 2. Варианты $m = 2$ и $m = -2$ аналогичны, поэтому рассмотрим случай $m = 2$ при «-» круговой поляризации (т.е. когда

афрагмой [13], получив соответствующие цилиндрические распределения в воздухе.

4. Наличие в падающем пучке вихревой фазы высоких порядков

В общем случае при наличии в пучке вихревой фазовой зависимости m -го порядка выражение (3) для обыкновенного и необыкновенного пучков принимает следующий вид:

направление поляризации противоположно направлению оптического вихря):

$$\mathbf{E}_2^{circ-}(\rho, \theta, z) = \frac{k^2}{2} \int_0^\infty \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} J_0(k\rho\sigma) \times \left\{ \exp[ikz\gamma_o(\sigma)] - \exp[ikz\gamma_e(\sigma)] \right\} F_2(\sigma) \sigma d\sigma + \left(\begin{matrix} e^{i2\theta} J_2(k\rho\sigma) \times \\ \times \left\{ \exp[ikz\gamma_o(\sigma)] + \exp[ikz\gamma_e(\sigma)] \right\} \\ -ie^{i2\theta} J_2(k\rho\sigma) \times \\ \times \left\{ \exp[ikz\gamma_o(\sigma)] + \exp[ikz\gamma_e(\sigma)] \right\} \\ -\frac{2\varepsilon_o\sigma i}{\varepsilon_e\gamma_2(\sigma)} e^{i\theta} J_1(k\rho\sigma) \end{matrix} \right) \times F_2(\sigma) \sigma d\sigma. \quad (32)$$

Из выражения (32) следует, что в центральной части фокусов (соответствует первому слагаемому) сохраняется круговая поляризация, но она меняет направление, в то время как в периферийной части (соответствует второму слагаемому) также сохраняется и направление поляри-

зации. Заметим также, что в отсутствие анизотропии первое слагаемое в (32) исчезает и остаётся только второе, которое отвечает за формирование полого светового пучка с вихревой фазой второго порядка в поперечных компонентах.

Таблица 5. Покомпонентное продольное распределение интенсивности (негатив) при фокусировке вихревого гауссова пучка ($m = 2$) радиусом 0,5 мм с «-» круговой поляризацией

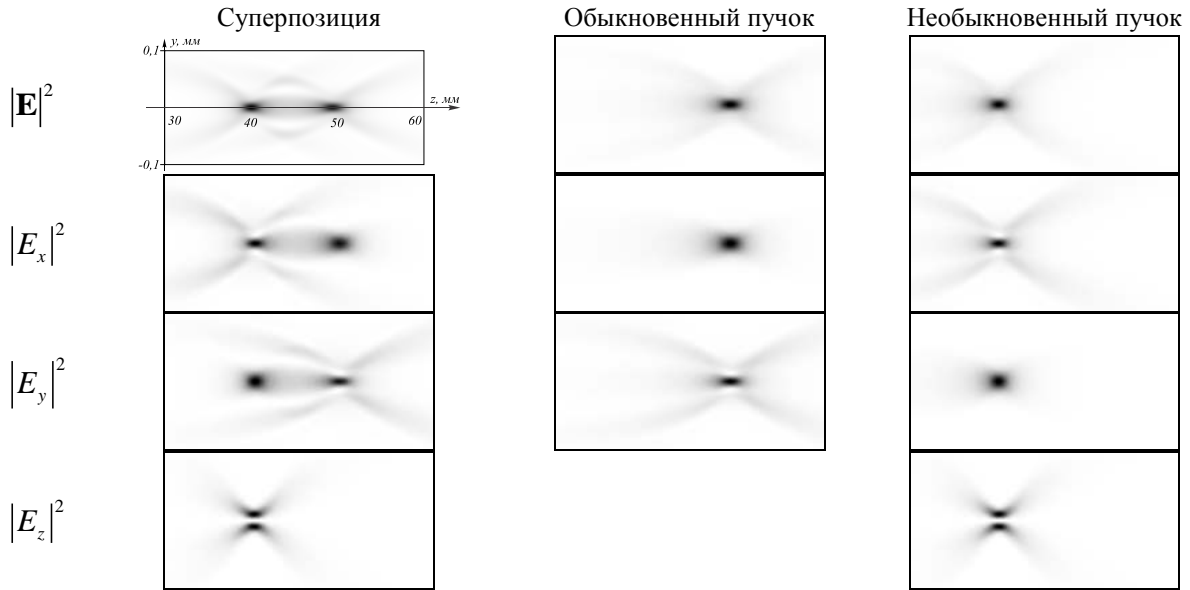
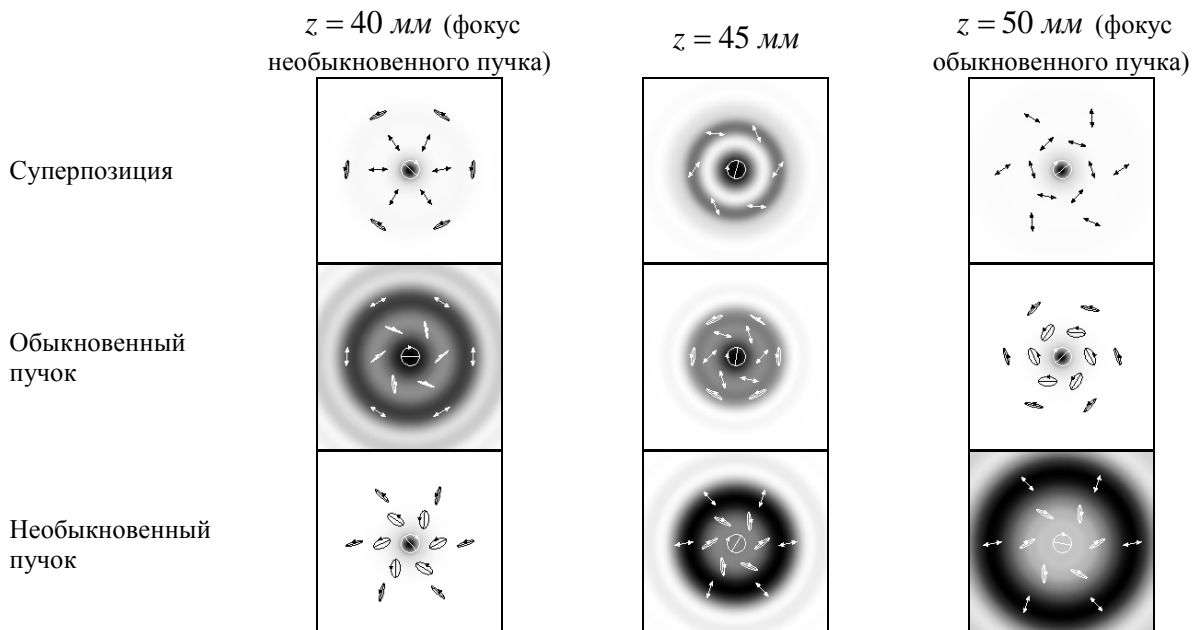


Таблица 6. Поперечные распределения интенсивности (негатив 0,1 мм×0,1 мм) в каждом из фокусов, а также в кольце между ними, при фокусировке вихревого гауссова пучка ($m=2$) радиусом 0,5 мм с «-» круговой поляризацией



В табл. 5 показаны картины покомпонентного продольного распределения интенсивности при фокусировке вихревого гауссова пучка ($m = 2$) с «-» круговой поляризацией. Хорошо видно, что вихревой пучок второго порядка преобразуется в кристалле в пучок, не имеющий вихревой особенности. Вихревая фаза первого порядка остаётся только у продольного компонента, интенсивность которого в данном случае невелика.

В табл. 6 приведены картины поперечных распределений при наличии в падающем на кристалл гауссовом пучке вихревой фазы второго порядка и круговой поляризации противоположного направления. В этом случае, несмотря на наличие вихревой фазы в падающем пучке, на оптической оси формируется ненулевая интенсивность поперечных компонентов с круговой поляризацией.

Для вихревых пучков, содержащих вихревую фазу порядка $|m| \geq 3$, в кристалле будет формироваться электромагнитное поле, не имеющее на оптической оси энергии как в поперечных, так и в продольном компоненте.

Заключение

В работе получены следующие основные результаты.

На основе разложения по плоским волнам выписано компактное аналитическое выражение для комплексной амплитуды вихревого поля, распространяющегося вдоль оси анизотропного кристалла. При этом в кристалле дополнительно формируются пучки с пониженной и по-

вышенной на два порядка фазовой сингулярностью. В случае круговой поляризации падающего на кристалл излучения дополнительно возникают пучки только с пониженной (для «-» круговой поляризации) или только повышенной (для «+» круговой поляризации) на два порядка вихревой фазой. Таким образом, с помощью кристалла можно вносить или, наоборот, компенсировать вихревую фазу в падающем пучке.

Аналитически и численно показано, что при острой фокусировке вдоль оси формируется два фокуса, соответствующих обычному и необычному пучкам. При фокусировке гауссова пучка в кристалле формируется два пучка, имеющих различную кривизну волнового фронта в связи с различием показателей преломления обычного и необычного пучков.

При вихревой фазе первого порядка и круговой поляризации падающего на кристалл излучения в фокусах формируются векторные цилиндрические распределения – с азимутальной поляризацией для обычного пучка и с радиальной поляризацией для необычного.

Результаты численного моделирования позволяют наглядно визуализировать рассмотренные физические процессы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты РФФИ 13-07-00266 и 13-07-97004р_поволжье_a) и Министерства образования и науки Российской Федерации.

Библиографический список

1. Stamnes J.J., Jiang D. Focusing of electromagnetic waves into a uniaxial crystal // Optics Communications. 1998. V. 150, Iss. 1-6. P. 251-262. doi: 10.1016/j.optcom.2003.09.007
2. Jiang D., Stamnes J.J. Numerical and asymptotic results for focusing of two-dimensional waves in uniaxial crystals // Optics Communications. 1999. V. 163, Iss. 1. P. 55-71. doi: 10.1016/S0030-4018(99)00101-7
3. Jiang D., Stamnes J.J. Numerical and experimental results for focusing of two-dimensional electromagnetic waves into uniaxial crystals // Optics Communications. 2000. V. 174, Iss. 5-6. P. 321-334. doi: 10.1016/S0030-4018(99)00671-9

4. Stallinga S. Axial birefringence in high-numerical-aperture optical systems and the light distribution close to focus // *Journal of the Optical Society of America A: Optics and Image Science, and Vision*. 2001. V. 18, no. 11. P. 2846-2859.
5. Stallinga S. Light distribution close to focus in biaxially birefringent media // *Journal of the Optical Society of America A: Optics and Image Science, and Vision*. 2004. V. 21, no. 9. P. 1785-1798. doi: 10.1364/JOSAA.21.001785
6. Li J., Jiang H., Xiao J., Gong Q. The mechanism of multi-focusing of lasers into uniaxial crystals // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*. 2007. V. 9, no. 7. P. 664-672. doi: 10.1088/1464-4258/9/7/017
7. Yonezawa K., Kozawa Y., Sato S. Focusing of radially and azimuthally polarized beams through a uniaxial crystal // *Journal of the Optical Society of America A: Optics and Image Science, and Vision*. 2008. V. 25, no. 2. P. 469-472. doi: 10.1364/JOSAA.25.000469
8. Zhang Z., Pu J., Wang X. Tight focusing of radially and azimuthally polarized vortex beams through a uniaxial birefringent crystal // *Applied Optics*. 2008. V. 47, no. 12. P. 1963-1967. doi: 10.1364/AO.47.001963
9. Khonina S.N., Golub I. Optimization of focusing of linearly polarized light // *Optics Letters*. 2011. V. 36, no. 3. P. 352-354. doi: 10.1364/OL.36.000352
10. Khilo N.A., Ryzhevich A.A., Petrova E.S. Transformation of the order of Bessel beams in uniaxial crystals // *Quantum Electronics*. 2001. V. 31, no. 1. P. 85-89. doi: 10.1070/QE2001v031n01ABEH001897
11. Ciattoni A., Cincotti G., Palma C. Circularly polarized beams and vortex generation in uniaxial media // *Journal of the Optical Society of America A: Optics and Image Science, and Vision*. 2003. V. 20, no. 1. P. 163-171.
12. Marrucci L., Manzo C., Paparo D. Optical spin-to-orbital angular momentum conversion in inhomogeneous anisotropic media // *Physical Review Letters*. 2006. V. 96, no. 16. Article number 163905. doi: 10.1103/PhysRevLett.96.163905
13. Fadeyeva T.A., Shvedov V.G., Izdebskaya Y.V., Volyar A.V., Brasselet E., Neshev D.N., Desyatnikov A.S., Krolikowski W., Kivshar Y.S. Spatially engineered polarization states and optical vortices in uniaxial crystals // *Optics Express*. 2010. V. 18, no. 10. P. 10848-10863. doi: 10.1364/OE.18.010848
14. Loussert C., Brasselet E. Efficient scalar and vectorial singular beam shaping using homogeneous anisotropic media // *Optics Letters*. 2010. V. 35, no. 1. P. 7-8. doi: 10.1364/OL.35.000007
15. Picon A., Benseny A., Mompert J., Calvo G.F. Spin and orbital angular momentum propagation in anisotropic media: theory // *Journal of Optics*. 2011. V. 13, no. 6. Article number 064019. doi: 10.1088/2040-8978/13/6/064019
16. Khilo N.A. Diffraction and order conversion of Bessel beams in uniaxial crystals // *Optics Communications*. 2012. V. 285, no. 5. P. 503-509. doi: 10.1016/j.optcom.2011.11.014
17. Хонина С.Н., Волоотовский С.Г., Харитонов С.И. Периодическое изменение интенсивности модовых лазерных пучков при распространении в анизотропных одноосных кристаллах // *Известия Самарского научного центра РАН*. 2012. Т. 14, № 4. С. 18-27.
18. Khonina S.N., Morozov A.A., Karpeev S.V. Effective transformation of a zero-order Bessel beam into a second-order vortex beam using a uniaxial crystal // *Laser Physics*. 2014. V. 24, no. 5. Article number 056101. doi: 10.1088/1054-660X/24/5/056101
19. ZEMAX. Optical Design Program. User's Guide. ZEMAX Development Corporation, June 9, 2009. 766 p.
20. Хонина С.Н., Харитонов С.И. Аналог интеграла Рэлея-Зоммерфельда для анизотропной и гиротропной сред // *Компьютерная оптика*. 2012. Т. 36, № 2. С. 172-182.
21. Краснов А.П., Хонина С.Н. Сравнительное моделирование распространения лазерных пучков в одноосном кристалле на основе интегральных опера-

торов // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королёва (национального исследовательского университета). 2014. № 1(43). С. 238-252.

22. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Т. 2. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 752 с.

Информация об авторах

Хонина Светлана Николаевна, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт систем обработки изображений РАН. E-mail: khonina@smr.ru. Область научных интересов: дифракционная оптика, сингулярная оптика, модовые и поляризационные преобразования, оптическое манипулирование, оптическая и цифровая обработка изображений.

Волотовский Сергей Геннадьевич, ведущий программист, Институт систем обработки изображений РАН. E-mail: sv@smr.ru. Область научных интересов: разработка программного обеспечения расчёта и моделирования работы элементов дифракционной оптики.

Устинов Андрей Владимирович, аспирант кафедры технической кибернетики, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: andr@smr.ru. Область научных интересов: дифракционная оптика, разработка программ оптического моделирования, обработка изображений.

Краснов Андрей Павлович, студент, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королёва (национальный исследовательский университет). E-mail: kraan2009@yandex.ru. Область научных интересов: дифракционная оптика.

THEORETICAL INVESTIGATION OF VORTEX GAUSSIAN BEAMS FOCUSING ALONG THE AXIS OF THE CRYSTAL

© 2015 S. N. Khonina¹, S. G. Volotovskiy¹, A. V. Ustinov², A. P. Krasnov²

¹Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences,
Samara, Russian Federation,

²Samara State Aerospace University, Samara, Russian Federation

In this paper we investigate analytically and numerically sharp focusing of uniformly polarized laser Gaussian beams with a vortex phase along the axis of an anisotropic crystal. Two models are used for the analysis: geometrical optics, implemented in the software product ZEMAX, and wave optics based on the expansion in plane waves. An analytical expression is obtained in the frame of nonparaxial wave optics for a complex amplitude in focusing a vortex Gaussian beam in an anisotropic medium. It is shown that when focusing is weak ordinary and extraordinary beams are mixed and the beam formed has a mixed "spiral" type of polarization. In case of sharp focusing two focuses corresponding to the ordinary and extraordinary beams are formed along the crystal axis. If a first-order vortex phase is present in an incident beam with circular polarization cylindrical vector distributions with azimuthal polarization for the ordinary beam and those with radial polarization for the extraordinary beam occur in these focuses. Analytical calculations are illustrated by the results of numerical simulation. Both the intensity distribution for components of the generated laser fields and their polarization states are shown in detail. The studies completed are useful for the development of devices that perform polarization conversion.

Uniaxial crystal, vortex laser beams, sharp focusing, polarization conversion.

References

1. Stamnes J.J., Jiang D. Focusing of electromagnetic waves into a uniaxial crystal. *Optics Communications*. 1998. V. 150, Iss. 1-6. P. 251-262.
2. Jiang D., Stamnes J.J. Numerical and asymptotic results for focusing of two-dimensional waves in uniaxial crystals. *Optics Communications*. 1999. V. 163, Iss. 1. P. 55-71.
3. Jiang D., Stamnes J.J. Numerical and experimental results for focusing of two-dimensional electromagnetic waves into uniaxial crystals. *Optics Communications*. 2000. V. 174, Iss. 5-6. P. 321-334.
4. Stallinga S. Axial birefringence in high-numerical-aperture optical systems and the light distribution close to focus. *Journal of the Optical Society of America A: Optics and Image Science, and Vision*. 2001. V. 18, no. 11. P. 2846-2859.
5. Stallinga S. Light distribution close to focus in biaxially birefringent media. *Journal of the Optical Society of America A: Optics and Image Science, and Vision*. 2004. V. 21, no. 9. P. 1785-1798.
6. Li J., Jiang H., Xiao J., Gong Q. The mechanism of multi-focusing of lasers into uniaxial crystals. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*. 2007. V. 9, no. 7. P. 664-672.
7. Yonezawa K., Kozawa Y., Sato S. Focusing of radially and azimuthally polarized beams through a uniaxial crystal. *Journal of the Optical Society of America A: Optics and Image Science, and Vision*. 2008. V. 25, no. 2. P. 469-472.
8. Zhang Z., Pu J., Wang X. Tight focusing of radially and azimuthally polarized vortex beams through a uniaxial birefringent crystal. *Applied Optics*. 2008. V. 47, no. 12. P. 1963-1967.
9. Khonina S.N., Golub I. Optimization of focusing of linearly polarized light. *Optics Letters*. 2011. V. 36, no. 3. P. 352-354.
10. Khilo N.A., Ryzhevich A.A., Petrova E.S. Transformation of the order of Bessel beams in uniaxial crystals. *Quantum Electronics*. 2001. V. 31, no. 1. P. 85-89.
11. Ciattoni A., Cincotti G., Palma C. Circularly polarized beams and vortex generation in uniaxial media. *Journal of the Optical Society of America A: Optics and Image Science, and Vision*. 2003. V. 20, no. 1. P. 163-171.
12. Marrucci L., Manzo C., Paparo D. Optical spin-to-orbital angular momentum conversion in inhomogeneous anisotropic media. *Physical Review Letters*. 2006. V. 96, no. 16. Article number 163905.
13. Fadeyeva T.A., Shvedov V.G., Izdebskaya Y.V., Volyar A.V., Brasselet E., Neshev D.N., Desyatnikov A.S., Krolikowski W., Kivshar Y.S. Spatially engineered polarization states and optical vortices in uniaxial crystals. *Optics Express*. 2010. V. 18, no. 10. P. 10848-10863.
14. Lousert C., Brasselet E. Efficient scalar and vectorial singular beam shaping using homogeneous anisotropic media. *Optics Letters*. 2010. V. 35, no. 1. P. 7-8.
15. Picon A., Benseny A., Mompert J., Calvo G.F. Spin and orbital angular momentum propagation in anisotropic media: theory. *Journal of Optics*. 2011. V. 13, no. 6. Article number 064019.
16. Khilo N.A. Diffraction and order conversion of Bessel beams in uniaxial crystals. *Optics Communications*. 2012. V. 285, no. 5. P. 503-509.
17. Khonina S.N., Volotovskiy S.G., Kharitonov S.I. Periodic intensity change for laser mode beams propagating in anisotropic uniaxial crystals. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra RAN*. [News of Samara Science Center of the Russian Academy of Science]. 2012. V. 14, no. 4. P. 18-27. (In Russ.)
18. Khonina S.N., Morozov A.A., Karpeev S.V. Effective transformation of a zero-order Bessel beam into a second-order vortex beam using a uniaxial crystal. *Laser Physics*. 2014. V. 24, no. 5. Article number 056101.
19. ZEMAX. Optical Design Program. User's Guide. ZEMAX Development Corporation, June 9, 2009. 766 p.

20. Khonina S.N., Kharitonov S.I. Analog of the Rayleigh-Sommerfeld integral for anisotropic and gyrotropic media. *Journal of Modern Optics*. 2013. V. 60, no. 10. P.814-822.

21. Krasnov A.P., Khonina S.N. Comparative modelling of laser beam propagation in a uniaxial crystal based on integral opera-

tors. *Vestnik of Samara State Aerospace University*. 2014. No. 1(43). P. 238-252. (In Russ.)

22. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. *Integraly I ryady. T. 2. Spetsial'nye funktsii* [Integrals and Series. V. 2. Special functions]. Moscow: Nauka Publ., 1983. 750 p.

About the authors

Khonina Svetlana Nikolaevna, Doctor of Physics and Mathematics; Professor, Leading Researcher, Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences, Samara, Russian Federation. E-mail: khonina@smr.ru. Area of Research: diffractive optics, singular optics, mode and polarization transformations, optical manipulating, optical and digital image processing.

Volotovskiy Sergey Gennadievich, Principal Software Engineer, Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences, Samara, Russian Federation. E-mail: sv@smr.ru. Area of Re-

search: software design, modeling of systems with diffractive optical elements.

Ustinov Andrey Vladimirovich, Postgraduate Student of the Department of Technical Cybernetics, Samara State Aerospace University, Samara, Russian Federation. E-mail: andr@smr.ru. Area of Research: diffractive optics, software design for optical modeling, image processing.

Krasnov Andrey Pavlovich, undergraduate student, Samara State Aerospace University, Samara, Russian Federation. E-mail: kraan2009@yandex.ru. Area of Research: diffractive optics.