

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ НА ГРАНИЦЕ СОПРЯЖЕНИЯ СТЕРЖНЕЙ С УПРУГИМ ЭЛЕМЕНТОМ

© 2011 В. К. Манжосов, И. А. Новикова

ГОУ ВПО «Ульяновский государственный технический университет»

Рассмотрен процесс преобразования продольной волны деформации на границе разнородных стержней с линейным упругим элементом. Изложена процедура численного расчета процесса преобразования волны деформации в стержневой системе. Результаты моделирования сопоставлены с аналитическим решением для тестовой задачи.

*Волна деформации, преобразование волны деформации, трансформация волны деформации, сопряжение стержней, стержневая система, моделирование.*

### Введение

При нанесении продольного удара по стержневой системе в последней формируется распространяющаяся волна деформации [1, 2]. Если в стержневой системе имеются сопряжения разнородных участков, то на границе сопряжения возникают процессы, связанные с отражением и трансформацией волн. Эти процессы наиболее изучены для идеальных границ, когда сопряженные сечения участков имеют одинаковые перемещения и скорости [3, 4], а трансформация волн связана лишь с разной площадью поперечных сечений сопрягаемых участков и различием физико-механических свойств материалов этих участков.

Менее изучены процессы преобразования волн деформаций в стержневой системе, имеющей такие сопряжения, когда перемещения сопряженных сечений различны из-за наличия между ними промежуточных деформируемых тел. Из известных работ можно отметить исследования Алпеевой В. А. [2], Манжосова В. К., Новиковой И. Н. [5, 6], Саруева Л. А., Сластина А. П., Авдеевой А. И. [7, 8].

### 1. Постановка задачи

В данной работе представлены результаты моделирования процесса преобразования продольной волны деформации с убывающей интенсивностью на границе разнородных стержней с линейным упру-

гим элементом. Схема стержневой системы изображена на рис. 1.

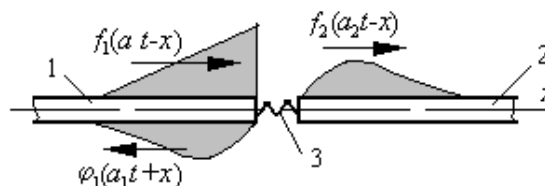


Рис. 1. Схема стержневой системы при падающей волне деформации:

1, 2 - стержни системы; 3 - упругий элемент

Два разнородных стержня в сечении  $x = 0$  разделены упругим элементом с жесткостью  $k$ . На границу  $x = 0$  со стороны стержня 1 падает прямая волна, описываемая функцией  $f_1(a_1t - x)$ , где  $a_1$  – скорость распространения волны в стержне 1. Требуется определить формируемую в сечении  $x = 0$  прямую волну  $f_2(a_2t - x)$ , распространяющуюся в направлении оси  $x$  по стержню 2 ( $a_2$  – скорость распространения волны в стержне 2), и обратную волну  $j_1(a_1t + x)$ , распространяющуюся по стержню 1 в обратном направлении.

Полагаем, что на процесс прохождения волны через упругий элемент граничные условия на левом конце первого стержня и на правом конце второго стержня не оказывают влияния, т. е. стержни являются полуограниченными. Начало координат совмещено с положением упругого элемента.

Движение поперечных сечений рассматриваемой динамической системы описывается волновыми уравнениями

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a_2^2} \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

где  $u_1(x,t)$ ,  $u_2(x,t)$  – перемещения сечений соответственно 1-го и 2-го стержней,  $a_1$ ,  $a_2$  – скорости распространения волн деформаций в стержнях.

Начальное состояние системы описывается равенствами: при  $t=0$

$$u_1(x,0) = u_1(x), \quad u_2(x,0) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_1(x,0)}{\partial t} = V(x), \quad \frac{\partial u_2(x,0)}{\partial t} = 0. \quad (4)$$

Граничные условия рассматриваемой динамической системы имеют вид: для  $x=0$

$$E_1 A_1 \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} = E_2 A_2 \frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x}, \quad (5)$$

$$E_2 A_2 \frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x} = -k [u_1(0,t) - u_2(0,t)], \quad (6)$$

для  $x = -\infty$

$$E_1 A_1 \frac{\partial u_1(-\infty,t)}{\partial x} = 0, \quad (7)$$

для  $x = \infty$

$$E_2 A_2 \frac{\partial u_2(\infty,t)}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

где

$k$  – жёсткость упругого элемента;

$E_1$ ,  $E_2$  – модули упругости материалов стержней;

$A_1$ ,  $A_2$  – площади поперечных сечений стержней.

Продольная деформация в сечении для  $x=0$

$$\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} = -f'_1(a_1 t - 0) + j'_1(a_1 t + 0), \quad (9)$$

$$\frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x} = -f'_2(a_2 t - 0). \quad (10)$$

Используя формулы (9) и (10) в граничных условиях (5) и (6) и полагая, что

при  $t=0$  перемещения сечений  $x=0$  в стержнях равны нулю, получим

$$j'_1(a_1 t) = -\frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} f'_2(a_2 t) + f'_1(a_1 t), \quad (11)$$

$$f'_2(a_2 t) + \frac{k(r+1)}{E_2 A_2 \cdot r} f_2(a_2 t) = \frac{2k}{E_2 A_2} f_1(a_1 t), \quad (12)$$

где

$$r = \frac{E_1 A_1}{a_2} \frac{a_1}{E_2 A_2} - \text{отношение волновых}$$

сопротивлений стержня 1 и стержня 2.

Из формулы (12) при дифференцировании по  $t$  имеем

$$f''_2(a_2 t) = -\frac{k(r+1)}{E_2 A_2 \cdot r} f'_2(a_2 t) - \frac{2k}{E_2 A_2} \cdot \frac{a_1}{a_2} f'_1(a_1 t). \quad (13)$$

## 2. Построение решения

Решение дифференциального уравнения (13) строится методом последовательных приближений. Учитывая, что

$$a_2 f'_2(a_2 t) = a_2 f'_{2,0} + \int_{t_0}^t a_2^2 f''_2(a_2 t) dt,$$

а также выражения (13) для  $f''_2(a_2 t)$ , получим для  $i$ -го приближения (в выражениях для упрощения опущены аргументы функций)

$$f'_{2,i} = f'_{2,0} + a_2 \int_{t_0}^t \frac{k}{E_2 A_2} \left[ 2 \frac{a_1}{a_2} f'_1 - \left( 1 + \frac{1}{r} \right) f'_{2,i-1} \right] dt,$$

где

$f'_{2,0}$  – значение функции  $f'_2(a_2 t)$  при  $t = t_0$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  – число последовательных приближений.

Аппроксимируем падающую волну  $f'_1$  ступенчатыми участками постоянной интенсивности. На рассматриваемом малом интервале времени ( $t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t$ )

$f'_1 = const$ . В результате приходим к выражению

$$f'_{2,i} = f'_{2,0} + \frac{k}{E_2 A_2} a_2 \left[ 2 \frac{a_1}{a_2} f'_1 - \left( 1 + \frac{1}{r} \right) f'_{2,i-1} \right] \Delta t, \quad (14)$$

где  $\Delta t = t - t_0$ .

Число последовательных приближений  $i = 1, 2, 3, \dots$  определяется выполнением неравенства

$$\frac{f'_{2,i} - f'_{2,i-1}}{f'_{2,i}} \leq \Delta \tilde{f},$$

где

$\Delta \tilde{f}$  – относительная величина, характеризующая степень приближения.

После того, как будет найдено значение  $f'_2$ , используя (11), находим

$$j'_1(a_1 t) = -\frac{E_2 A_2}{E_1 A_1} f'_2(a_2 t) + f'_1(a_1 t).$$

Рассмотрим случай, когда изменение падающей волны  $f'_1(a_1 t - 0)$  описывается линейной функцией с отрицательным угловым коэффициентом (волна имеет треугольную форму):

$$f'_1(a_1 t) = \begin{cases} e_0 - \frac{e_0}{T} \cdot t, & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t > T, \end{cases}$$

$$j'_1(a_1 t) = \frac{f'_1(a_1 t)}{e_0} = \begin{cases} 1 - \frac{t}{T}, & 0 \leq \frac{t}{T} \leq 1, \\ 0, & \frac{t}{T} > 1, \end{cases}$$

где

$e_0$  – максимальное значение модуля деформации в падающей волне;

$T$  – длительность действия падающей волны  $f'_1(a_1 t)$ ;

$t$  – время.

Формулу (14) представим в безразмерных величинах параметров:

$$j_{2,i} = j_{2,0} + \frac{k}{E_2 A_2} a_2 \left[ 2 \frac{a_1}{a_2} j_{1,i} - \left( 1 + \frac{1}{r} \right) j_{2,i-1} \right] \Delta t,$$

$$j_{2,i} = \frac{f'_{2,i}}{e_0}, \quad j_{2,0} = \frac{f'_{2,0}}{e_0}, \quad j_{2,i-1} = \frac{f'_{2,i-1}}{e_0}.$$

Обозначим

$$k_0 = \frac{k \cdot \Delta l}{E_2 A_2}, \quad j_0 = \frac{T}{\Delta T}, \quad \Delta j_0 = \frac{\Delta t}{T},$$

где

$\Delta l$  – единица длины стержня 2,

$\Delta T = \Delta l / a_2$  – время, в течение которого волна  $f'_2(a_2 t - x)$  пройдёт расстояние  $\Delta l$ ;

$k_0$  – отношение жёсткости упругого элемента к продольной жёсткости стержня 2 длиной  $\Delta l$ .

Используя введённые обозначения, преобразуем выражение (14):

$$\frac{k}{E_2 A_2} a_2 \cdot \Delta t = k_0 j_0 \Delta j_0,$$

$$j_{2,i} = j_{2,0} + k_0 j_0 \left[ 2 \frac{a_1}{a_2} j_{1,i} - \left( 1 + \frac{1}{r} \right) j_{2,i-1} \right] \Delta j_0.$$

### 3. Результаты расчёта

Осуществлена реализация предложенного алгоритма при моделировании процесса преобразования продольной волны на границе разнородных участков стержней, разделённых линейным упругим элементом. Результаты моделирования сопоставлены с результатами расчёта по аналитической зависимости, полученной в работе [6]:

$$j_2(a_2 t) = \frac{2r}{r+1} \cdot \frac{a_1}{a_2} \left[ \left( 1 + \frac{r}{(r+1) \cdot j_0 \cdot k_0} \right) \cdot \left( 1 - \exp \left( -\frac{r+1}{r} \cdot j_0 \cdot k_0 \cdot \frac{t}{T} \right) \right) - \frac{t}{T} \right],$$

$$0 \leq \frac{t}{T} \leq 1; \tag{15}$$

$$j_2(a_2 t) = j_2(a_2 T) \cdot \exp \left( -\frac{(r+1) \cdot j_0 \cdot k_0}{r} \left( \frac{t}{T} - 1 \right) \right),$$

$$\frac{t}{T} \geq 1. \tag{16}$$

В табл. 1 представлены результаты расчёта параметров трансформированной волны  $j_2(a_2 t)$  по формулам (15), (16).

Таблица 1. Результаты расчёта параметров трансформированной волны  $f_2(a_2t)$

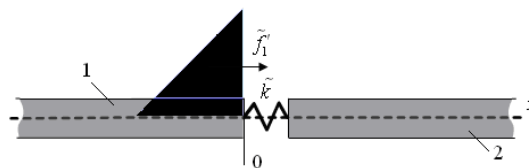
Время, $t/T$	Падающая волна, $f_1(a_1t)$	Трансформированная волна $f_2(a_2t)$			
		Расчёт по формулам (15), (16)	Моделирование	Расчёт по формулам (15), (16)	Моделирование
		$k^0 = 1$		$k^0 = 2$	
0	1,0	0	0	0	0
0,1	0,9	0,172	0,169	0,312	0,305
0,2	0,8	0,294	0,290	0,488	0,480
0,3	0,7	0,376	0,372	0,573	0,565
0,4	0,6	0,426	0,421	0,597	0,590
0,5	0,5	0,448	0,443	0,581	0,574
0,6	0,4	0,448	0,443	0,536	0,531
0,7	0,3	0,430	0,425	0,474	0,470
0,8	0,2	0,397	0,392	0,399	0,396
0,9	0,1	0,352	0,348	0,316	0,314
1,0	0	0,297	0,293	0,227	0,225
1,1	0	0,243	0,240	0,152	0,152
1,2	0	0,199	0,197	0,102	0,102
1,3	0	0,163	0,162	0,0684	0,0694
1,4	0	0,133	0,133	0,0458	0,0469
1,5	0	0,109	0,109	0,0307	0,0317
1,6	0	0,089	0,089	0,0206	0,0214
1,7	0	0,073	0,073	0,0138	0,0144
1,8	0	0,060	0,06	0,0092	0,0097
1,9	0	0,049	0,049	0,0062	0,0066
2,0	0	0,04	0,04	0,0041	0,0044

При моделировании строились диаграммы падающей волны  $f_1^0$ , сформированной в сечении  $x = 0$  прямой волны  $f_2^0$  и обратной волны  $f^0$ . Отдельные диаграммы представлены на рис. 2 для следующих параметров стержневой системы:

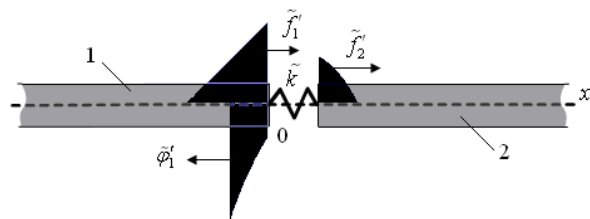
- падающая волна треугольной формы длительностью  $k^0 = 1$ ,
- отношение волновых сопротивлений  $r = 1$ ,

– скорости распространения волн  $a_1 = a_2$ ;

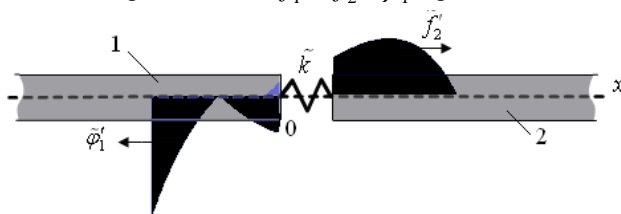
– отношение жёсткости упругого элемента к продольной жёсткости единицы длины стержня  $2 k^0 \in (1, 2, 4, 5, 6, 8, 10)$ .



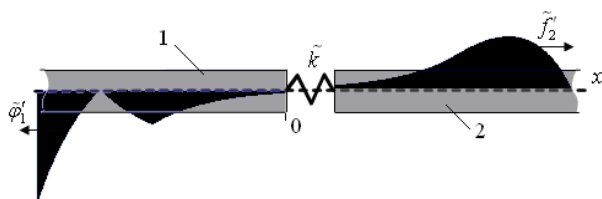
а) диаграмма волны  $f_1^0$  при  $t = 0$



б) диаграммы волн  $f_1'$ ,  $f_2'$ ,  $\phi_1'$  при  $0 < t < T$



в) диаграммы волн  $f_2'$ ,  $\phi_1'$  при  $t = T$

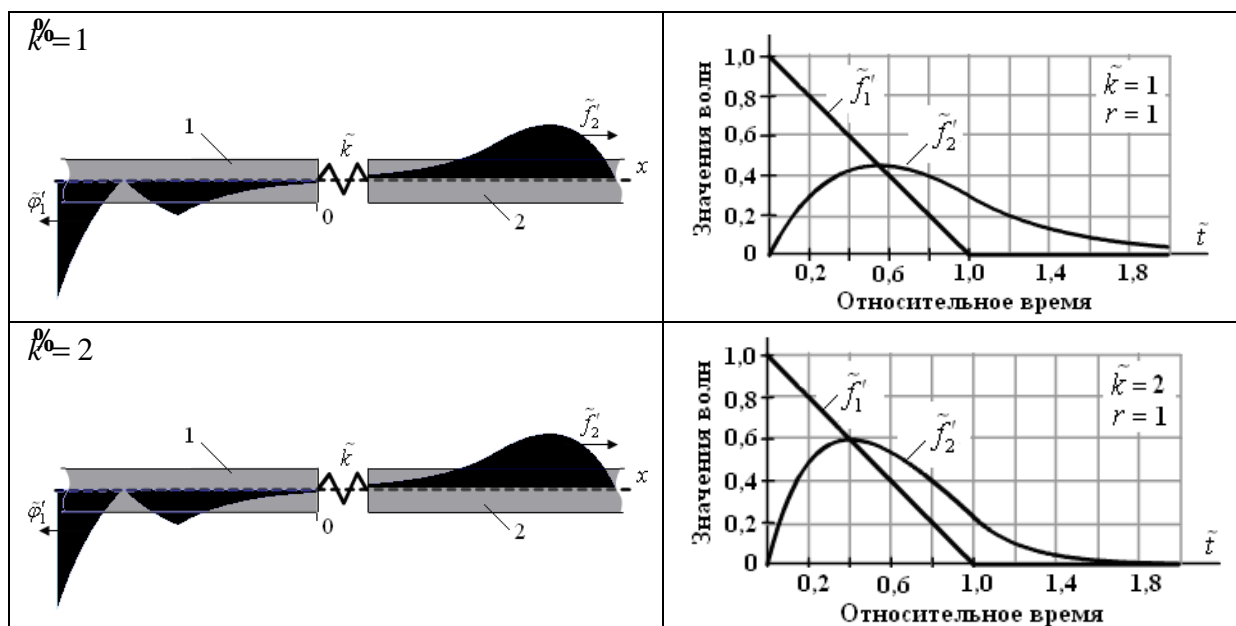


г) диаграммы волн  $f_2'$ ,  $\phi_1'$  при  $t = 2T$

Рис. 2. Диаграммы прямых волн  $f_1'$ ,  $f_2'$  и обратной волны  $\phi_1'$

На рис. 3 представлены диаграммы падающей  $f_1'$  и трансформированной  $f_2'$  волн для различных значений

относительной жёсткости  $\tilde{k}$ . Относительное время  $\tilde{t} = t/T$ .



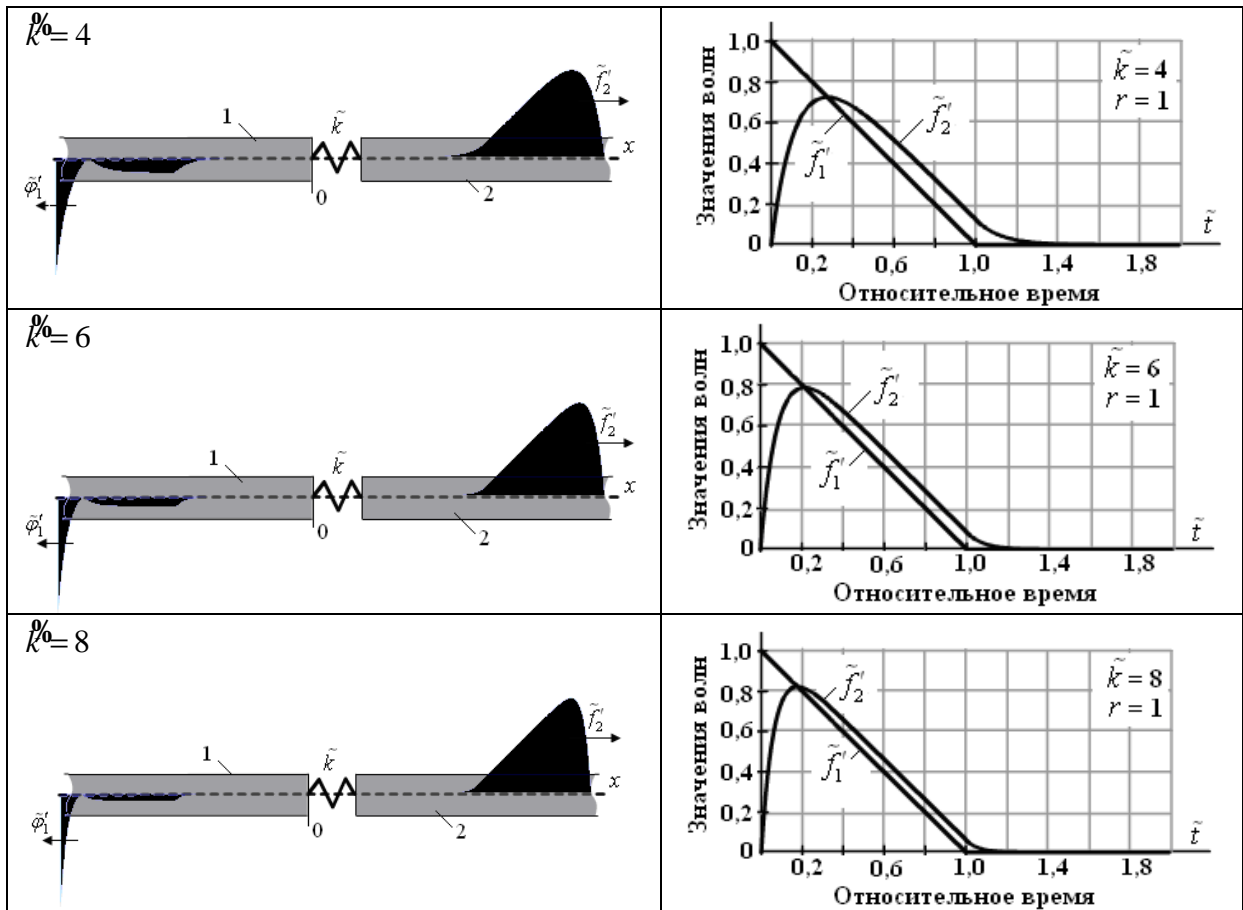


Рис. 3. Диаграммы волн  $f_1^{\sim}$  и  $f_2^{\sim}$  для различных значений жесткости  $\bar{k}$

Анализ полученных диаграмм показывает, что трансформация волны более существенна при меньших значениях жёсткости упругого элемента  $\bar{k}$ .

Обратимся к формулам (15), (16). При  $\bar{k} \rightarrow \infty$  слагаемые  $\frac{r}{(r+1) \cdot \bar{k}}$   $\rightarrow 0$

и  $\exp\left(-\frac{r+1}{r} \cdot \bar{k} \cdot \frac{t}{T}\right) \rightarrow 0$ . Формулы для расчёта  $f_2^{\sim}(a_2 t)$  принимают вид

$$f_2^{\sim}(a_2 t) = \frac{2r}{r+1} \cdot \frac{a_1}{a_2} \left(1 - \frac{t}{T}\right), \quad 0 \leq \frac{t}{T} \leq 1;$$

$$f_2^{\sim}(a_2 t) = 0, \quad \frac{t}{T} \geq 1.$$

Полученные формулы описывают формируемую в стержне 2 волну деформации в случае идеального сопряжения стержней. Если стержни изготовлены из одного материала ( $a_1 = a_2$ ) и

имеют равные волновые сопротивления, то при  $\bar{k} \rightarrow \infty$

$$f_2^{\sim}(a_2 t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) = f_1^{\sim}(a_1 t - 0), \quad 0 \leq \frac{t}{T} \leq 1;$$

$$f_2^{\sim}(a_2 t) = 0, \quad \frac{t}{T} \geq 1.$$

Это означает, что при  $\bar{k} \rightarrow \infty$  прошедшая в стержень 2 волна деформации  $f_2^{\sim}(a_2 t - 0)$  полностью воспроизводит падающую волну  $f_1^{\sim}(a_1 t - 0)$ .

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009–2013 гг.), ГК № П1122.

### Библиографический список

1. Алимов, О. Д. Распространение волн деформаций в ударных системах [Текст] / О. Д. Алимов, В. К. Манжосов, В. Э. Еремьянц – М.: Наука, 1985. – 354 с.

2. Алпеева, В. А. Возбуждение и преобразование волн деформаций в ударных системах машин для испытаний изделий [Текст] / В. А. Алпеева // дисс.... канд. техн. наук. – Фрунзе: ФПИ, 1990. – 281 с.
3. Дворников Л. Т., Жуков И. А. Продольный удар полукатеноидальным бойком. – Новокузнецк. -2006. – 80 с.
4. Малков О. Б. Динамика стержневых систем с внутренними граничными поверхностями. – Омск, 2000. – 112 с.
5. Манжосов В. К. Продольный удар. – Ульяновск: 2006.– 358 с.
6. Манжосов В. К., Новикова И. А. Преобразование волны деформации ли-нейной формы на границе сопряжения стержней с упругим элементом // Вестник УлГТУ. 2008. – № 3.С. 35 – 48.
7. Саруев Л. А. Передача энергии по ставу штанг при продольном импульсном воздействии / Л. А. Саруев, А. П. Слистин, А. И. Авдеева. – Томск, 1995. – 6 с. – Деп. в ВИНТИ 29.11.95, № 3164-B95.
8. Слистин А. П. Расчет параметров процесса передачи продольного ударного воздействия по стержням: автореф. дисс. канд. техн. наук / А. П. Слистин // Томск, 1990. – 18 с.

## TRANSFORMATION OF LONGITUDINAL DEFORMATION WAVE AT THE BOUNDARY OF CONJUGATION OF BARS WITH AN ELASTIC ELEMENT

© 2011 V. K. Manzhosov, I. A. Novikova

Ulyanovsk State Technical University

The paper deals with the process of transformation of longitudinal deformation wave at the boundary of heterogeneous bars with a linear elastic element. The procedure of numerical computation of deformation wave transformation process in a bar system is presented. The results of modeling are compared with the analytical solution for a test problem.

*Deformation wave, deformation wave variation, transformation of deformation wave, conjugation of bars, bar system, modeling.*

### Информация об авторах

**Манжосов Владимир Кузьмич**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Теоретическая и прикладная механика». Ульяновский государственный технический университет. Область научных интересов: динамика механических систем переменной структуры, продольный удар в стержневых системах, преобразование продольных волн деформаций в механических волноводах. E-mail: [tpm@ulstu.ru](mailto:tpm@ulstu.ru); [v.manjosov@ulstu.ru](mailto:v.manjosov@ulstu.ru).

**Новикова Ирина Александровна**, старший преподаватель кафедры «Измерительно-вычислительные комплексы». Ульяновский государственный технический университет. Область научных интересов: продольный удар в стержневых системах неоднородной структуры, преобразование волн деформации при продольном ударе. E-mail: [nia@ulstu.ru](mailto:nia@ulstu.ru).

**Manzhosov Vladimir Kuzmich**, doctor of technical sciences, professor, head of the department “Theoretical and applied mechanics”, Ulyanovsk State Technical University, [tpm@ulstu.ru](mailto:tpm@ulstu.ru), [v.manjosov@ulstu.ru](mailto:v.manjosov@ulstu.ru). Area of research: dynamics of mechanical systems of variable structure, longitudinal impact in bar systems, transformation of longitudinal deformation waves in mechanical waveguides.

**Novikova Irina Alexandrovna**, senior lecturer of the department “Measuring-computing complexes”, Ulyanovsk State Technical University, [nia@ulstu.ru](mailto:nia@ulstu.ru). Area of research: longitudinal impact in bar systems of heterogeneous structure, transformation of deformation waves under a longitudinal impact.