

ОПТИМИЗАЦИЯ СИММЕТРИЧНОГО ПРОФИЛЯ ДЛЯ ВЯЗКОГО ТУРБУЛЕНТНОГО НЕСЖИМАЕМОГО ТЕЧЕНИЯ МЕТОДОМ СОПРЯЖЁННОГО ГРАДИЕНТА

© 2011 Е. В. Печеник

Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П. Королёва
(национальный исследовательский университет)

Решается задача минимизации лобового сопротивления симметричного профиля при заданных площади и хорде. Оптимизация производится при помощи метода сопряжённого градиента для вязкого несжимаемого течения. Прямая задача решается при помощи алгоритма SIMPLE в вычислительном пакете Star-CD. Сопряжённые уравнения решаются при помощи адаптированного алгоритма SIMPLE.

Оптимизация, функция цели, функции ограничений, проектные переменные, сопряжённые уравнения, симметричный профиль.

Введение. В настоящее время актуальной проблемой является разработка эффективного алгоритма оптимизации аэродинамических форм для вязкого течения жидкости и газа. Одним из наиболее продуктивных является метод сопряжённого градиента. Он обладает рядом преимуществ, которые позволяют применять его к широкому классу задач:

1. Возможность использовать большое количество проектных переменных. Например, в качестве проектных переменных могут выступать координаты узлов оптимизируемой поверхности.

2. Разнообразие в выборе функции цели. В качестве функции цели могут выступать различного рода интегральные характеристики (проекция вектора результирующей силы на какое-либо направление, момент, перепад давления и т.д.) оптимизируемых объектов и их сочетания.

3. Сравнительно невысокие вычислительные затраты. Согласно методу сопряжённого градиента на каждой итерации оптимизации машинное время практически не зависит от числа проектных переменных и приблизительно

равно машинному времени решения двух прямых задач.

4. Возможность использования стороннего решателя для решения прямой задачи. При разработке метода за основу был взят непрерывный подход составления сопряжённых уравнений, который был развит Джеймсоном (Jameson) в работах [1,2]. Помимо непрерывной существует и дискретная формулировка метода [3,4], однако в этом случае невозможно использовать сторонний решатель. Сравнение непрерывного и дискретного подходов дано в [5]. В работах Джеймсона прямая задача и сопряжённые уравнения решаются при помощи различных разновидностей метода искусственной вязкости (диссипации) [6]. В представленной работе для этой цели используется метод поправок давления – алгоритм SIMPLE [7]. Этот алгоритм хорошо себя зарекомендовал и широко используется в коммерческих CFD пакетах.

Формулировка метода. Пусть задана функция цели $I(w,s)$ и функции ограничений $R(w,s)=0$, где $w(s)$ - переменные поля течения, s - проектные переменные. Функцией цели, например, может быть лобовое сопротивление тела, подъёмная сила или заданное распределение давления. Функциями ограничений являются уравнения Навье-Стокса для двумерного стационарного несжимае-

мого течения. Необходимо найти такие проектные переменные, при которых удовлетворяются функции ограничений и функция цели достигает своего локального минимума. Получим выражение для вариации функции цели δI , разложив её в ряд Тейлора и отбросив малые величины второго порядка:

$$dI \approx \left[\frac{\partial I}{\partial w} \right]^T dw + \left[\frac{\partial I}{\partial s} \right]^T ds. \quad (1)$$

Аналогично получим выражение для вариаций функций ограничений dR :

$$dR \approx \left[\frac{\partial R}{\partial w} \right]^T dw + \left[\frac{\partial R}{\partial s} \right]^T ds = 0. \quad (2)$$

Если из выражения (1) вычесть выражение (2), умноженное на вектор множителей Лагранжа ψ , то вариацию функции цели можно записать следующим образом:

$$dI \approx \left(\left[\frac{\partial I}{\partial w} \right]^T - \psi^T \left[\frac{\partial R}{\partial w} \right]^T \right) dw + \left(\left[\frac{\partial I}{\partial s} \right]^T - \psi^T \left[\frac{\partial R}{\partial s} \right]^T \right) ds. \quad (3)$$

Теперь для того, чтобы избежать вычисления вариации δw , подберём вектор множителей Лагранжа ψ таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$\left[\frac{\partial R}{\partial w} \right]^T \psi = \left[\frac{\partial I}{\partial w} \right]^T. \quad (4)$$

После того, как из сопряжённых уравнений (4) найден вектор множителей Лагранжа, для вариации функции цели можно записать

$$dI = G^T ds,$$

где

$$G^T = \left[\frac{\partial I}{\partial s} \right]^T - \psi^T \left[\frac{\partial R}{\partial s} \right]^T.$$

После того, как найден вектор градиента G , можно определить направление, в котором нужно изменить проектные переменные с тем, чтобы минимизировать функцию цели. Простейшей процедурой является метод наискорейшего спуска:

$$ds = -aG,$$

где a – положительное малое число, которое определяется в ходе численных экспериментов.

Двумерное стационарное течение вязкого несжимаемого газа описывает система уравнений Навье-Стокса. Для удобства обозначим декартовы координаты x_1, x_2 , а компоненты вектора скорости \bar{V} – u_1, u_2 . Будем подразумевать суммирование по повторяющимся индексам i ($i=1,2$). Тогда уравнения Навье-Стокса могут быть записаны как

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i^v}{\partial x_i} = 0 \text{ в области } D, \quad (5)$$

где

$$f_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ ru_1u_i + pd_{i1} \\ ru_2u_i + pd_{i2} \end{Bmatrix}; \quad f_i^v = \begin{Bmatrix} 0 \\ S_{ij}d_{j1} \\ S_{ij}d_{j2} \end{Bmatrix};$$

$$S_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad d_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ если } i \neq j \\ 1, \text{ если } i = j \end{cases};$$

p – давление; ρ – плотность; μ – вязкость.

За переменные поля течения $w(s)$ принимается вектор $w=(p, u_1, u_2)^T$. Для вывода сопряжённых уравнений векторное уравнение (5) необходимо представить в вычислительном пространстве с системой координат ξ_1, ξ_2 такой, что контур исследуемого тела лежит на оси ξ_1 :

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i} - \frac{\partial F_i^v}{\partial x_i} = 0 \text{ в области } D_x, \quad (6)$$

где

$$F_i = S_{ij}f_j; \quad F_i^v = S_{ij}f_j^v;$$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ -\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \end{pmatrix}.$$

Из выражения (6) получим вариации функций ограничений $\delta R(w, s)$. Так как в вычислительном пространстве форма тела и соответственно область D_ξ остаются неизменными при вариациях формы в физическом пространстве, то для любой точки вычислительной области можно записать

$$dR = \frac{\partial(dF_i)}{\partial x_i} - \frac{\partial(dF_i^v)}{\partial x_i} = 0. \quad (7)$$

Запишем вариации для потоков в следующем виде:

$$dF_i = dF_{Ii} + dF_{IIi}, \quad dF_i^v = dF_{Ii}^v + dF_{IIi}^v,$$

где вариации с индексом I являются вкладами, связанными с изменением переменных поля течения dw , а с индексом II – вклады, связанные с изменением формы тела δs .

Рассмотрим функцию цели I , которую можно представить как интеграл по границе профиля в вычислительном пространстве $B_{\xi w}$:

$$I = \int_{B_{\xi w}} M(w, s) dB_x. \quad (8)$$

Выражение для вариации функции цели можно записать:

$$dI = \int_{B_{\xi w}} dM(w, s) dB_x. \quad (9)$$

Уравнение (7) умножим на вектор множителей Лагранжа $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^T$, проинтегрируем по расчётной области D_ξ и вычтем полученное выражение из выражения (9). В результате получим

$$dI = \int_{B_{\xi w}} dM(w, s) dB_x - \int_{B_x} n_i^x y^T (dF_i - dF_i^v) dB_x + \int_{D_x} \frac{\partial y}{\partial x_i} (dF_i - dF_i^v) dD_x,$$

где n_i^x – компоненты вектора внешней нормали к границе области B_ξ в вычислительном пространстве. Исходя из предположения, что на внешней границе рассматриваемой области вариации потоков вследствие изменения формы тела равны нулю, можно записать:

$$dI = \int_{B_{\xi w}} [dM - n_i^x y^T (dF_i - dF_i^v)] dB_x + \int_{D_x} \frac{\partial y}{\partial x_i} (dF_{Ii} - dF_{Ii}^v) dD_x + \int_{D_x} \frac{\partial y}{\partial x_i} (dF_{IIi} - dF_{IIi}^v) dD_x. \quad (10)$$

Необходимо найти такие ψ , чтобы первые два интеграла выражения (10) обратились в нуль. Таким образом, сопряжённые уравнения и соответствующие граничные условия можно записать в форме:

$$\int_{D_x} \frac{\partial y}{\partial x_i} (dF_{Ii} - dF_{Ii}^v) dD_x = 0; \quad (11)$$

$$\int_{B_{\xi w}} [dM - n_i^x y^T (dF_i - dF_i^v)] dB_x = 0. \quad (12)$$

Граничные условия для сопряжённых уравнений определяются видом функции цели. Положим, что функцией цели является вектор результирующей силы $\bar{T} = (X, Y)$, действующий на профиль, спроецированный на некоторое направление $\bar{q} = (q_1, q_2)$. Тогда в вычислительном пространстве функцию цели можно представить в следующем виде:

$$I = -q_1 \int_{B_{\xi w}} S_{2j} (d_{j1} p - s_{j1}) dx_1 - q_2 \int_{B_{\xi w}} S_{2j} (d_{j2} p - s_{j2}) dx_1.$$

Согласно выражению (8)

$$M(w, s) = -q_1 S_{2j} (d_{j1} p - s_{j1}) - q_2 S_{2j} (d_{j2} p - s_{j2}).$$

Отметим, что вдоль контура тела $B_{\xi w}$: $n_1^x = 0$, $n_2^x = -1$ и $u_1 = u_2 = 0$ (граничное условие прилипания). Поэтому выражение (12) можно записать:

$$\int_{B_{\xi w}} [dM + y^T d(F_2 - F_2^v)] dB_x = - \int_{B_{\xi w}} q_1 d(S_{21} p - S_{2j} s_{j1}) dx_1 - \int_{B_{\xi w}} q_2 d(S_{22} p - S_{2j} s_{j2}) dx_1 + \int_{B_{\xi w}} y_2 d(S_{21} p - S_{2j} s_{j1}) dx_1 + \int_{B_{\xi w}} y_3 d(S_{22} p - S_{2j} s_{j2}) dx_1. \quad (13)$$

Из равенства (13) следует, что, если принять $\psi_2 = q_1$, а $\psi_3 = q_2$ на границе тела, то рассматриваемый интеграл обратится в нуль. Что касается ψ_1 , то его можно выбирать произвольно на границе $B_{\xi w}$, так как независимо от его значения интеграл обращается в нуль. Граничные условия на внешней границе рассматриваемой области могут быть заданы различными способами, так как вариации потоков вследствие изменения

формы тела на этой границе предполагаются равными нулю. Поэтому на внешней границе рассматриваемой области положим $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0$.

Определив вектор множителей Лагранжа из уравнений (11), можно найти вариацию функции цели по формуле

$$dI = \int_{D_x} \frac{\partial y}{\partial x_i}^T (dF_{ii} - dF_{ii}^v) dD_x. \quad (14)$$

Вариации потоков представим как

$$dF_{ii} = \frac{\partial F_i}{\partial s} ds, \quad dF_{ii}^v = \frac{\partial F_i^v}{\partial s} ds,$$

где $\frac{\partial F_i}{\partial s}$ и $\frac{\partial F_i^v}{\partial s}$ определяются численно варьированием соответствующего компонента вектора проектных переменных s при неизменном поле течения.

Тогда градиент функции цели будет иметь вид:

$$G = \int_{D_x} \frac{\partial y}{\partial x_i}^T \left(\frac{\partial F_i}{\partial s} - \frac{\partial F_i^v}{\partial s} \right) dD_x.$$

Как правило, градиент G не обладает той же гладкостью, что и исходный контур. Поэтому алгоритм оптимизации может оказаться неустойчивым. Во избежание этого в работе [2] предлагается заменить градиент G сглаженным градиентом \bar{G} , который получается в результате решения неявного сглаживающего уравнения:

$$\bar{G} - \frac{\partial}{\partial x_1} e \frac{\partial \bar{G}}{\partial x_1} = G,$$

где e – параметр, влияющий на степень сглаживания градиента.

Таким образом, для вариации вектора проектных переменных можно записать:

$$ds = -a\bar{G}.$$

Прямая задача решается для вязкого турбулентного несжимаемого течения при помощи алгоритма SIMPLE в вычислительном пакете Star-CD. Число Рейнольдса $Re \approx 3,3 \cdot 10^6$, модель турбулентности Spalart and Allmaras. Сопряжённые уравнения, в отличие от уравнений Навье-Стокса, являются линей-

ными и поэтому решаются при помощи адаптированного алгоритма SIMPLE.

Постановка задачи. Минимизируется лобовое сопротивление симметричного профиля при заданной площади и хорде. В качестве исходных профилей используются NASA0012 и NASA0021. Расчётная сетка, которая используется для составления дискретного аналога как уравнений движения, так и сопряжённых уравнений, строится при помощи метода, основанного на решении уравнений Пуассона [8]. На рис. 1 изображена такая сетка для профиля NASA0012 размерностью 240×40 .

За проектные переменные принимаются координаты узлов расчётной сетки, лежащие на контуре профиля. Фиксированными являются узлы, принадлежащие задней кромке и носку профиля. Координаты узлов варьируются вдоль линий расчётной сетки (рис. 2).

Согласно постановке задачи функцию цели можно записать следующим образом:

$$I = - \int_{B_w} s_{2j} (d_{j1} p - s_{j1}) dx_1 + \frac{c_v}{2} \left(\frac{V - V_0}{V_0} \right)^2, \quad (15)$$

где

V – площадь текущего профиля;

V_0 – площадь исходного профиля;

c_v – весовой коэффициент, который вводится для обеспечения устойчивости алгоритма оптимизации.

Принимаем, что $\psi_2 = 1$, $\psi_3 = 0$ на границе тела, и решаем сопряжённые уравнения (11). Получаем вектор множителей Лагранжа. После этого, согласно выражениям (14) и (15), вариацию функции цели можно записать:

$$dI = \int_{D_x} \frac{\partial y}{\partial x_i}^T (dF_{ii} - dF_{ii}^v) dD_x + c_v \left(\frac{V - V_0}{V_0} \right) dV.$$

Таким образом, градиент функции цели определяется численно, за счёт варьирования соответствующего компонента вектора проектных переменных s при неизменном поле течения.

Результаты. На рис. 3 представлен исходный профиль NASA0012 и оптимизированный на расчётной сетке 240×40 при числе итераций $N=200$.

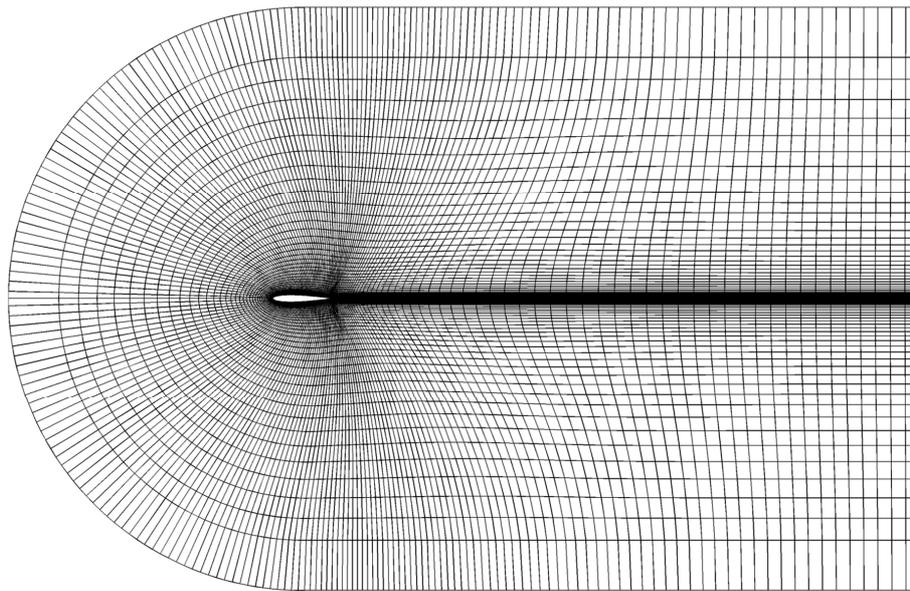


Рис. 1. Расчётная сетка

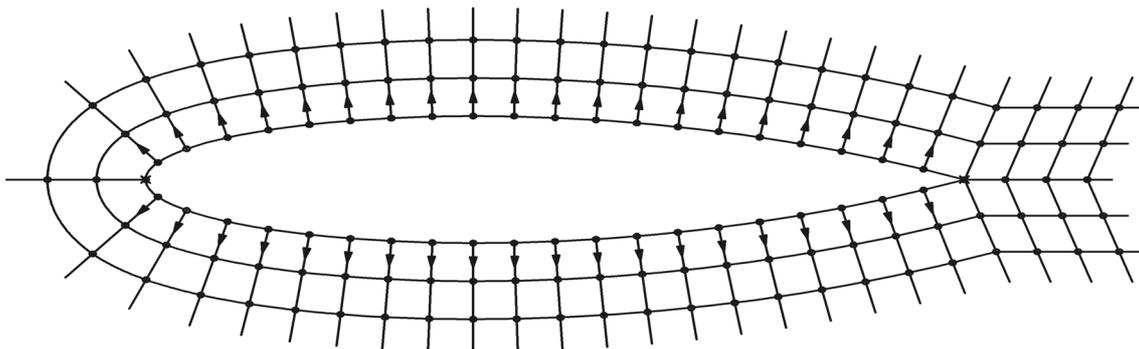


Рис. 2. Проектные переменные

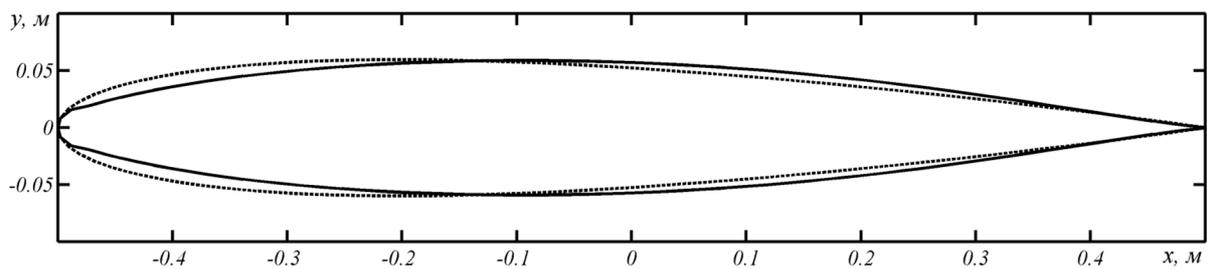


Рис. 3. Профиль, полученный в результате оптимизации (сплошная линия), и исходный профиль NASA0012 (пунктирная линия)

Величина коэффициента лобового сопротивления профиля C_x , полученного в результате оптимизации, по отношению к сопротивлению исходного профиля (рис. 3) снизилась на 24,4%,

при этом площадь оптимизированного профиля уменьшилась на 0,4%.

Графики процесса сходимости алгоритма оптимизации для исходного профиля NASA0012 представлены на рис. 4 и 5. На рис. 4 изображена зависимость коэффици-

ента лобового сопротивления от цикла итераций. На рис. 5 изображена зависимость площади профиля от числа итераций.

Из графиков сходимости (рис. 4 и 5) видно, что решение мало изменяется уже после 80-й итерации. Однако для того, чтобы сделать вывод о достижении функцией цели некоего минимума, расчёт выполнялся до 200-й итерации.

Так как используемый метод является градиентным, то можно говорить о получении локального минимума. Из графиков сходимости (рис. 4 и 5) видно, что в ходе оптимизации был получен локальный минимум.

На рис. 6 представлен исходный профиль NASA0021 и оптимизированный на расчётной сетке 240×40 при числе итераций $N=200$.

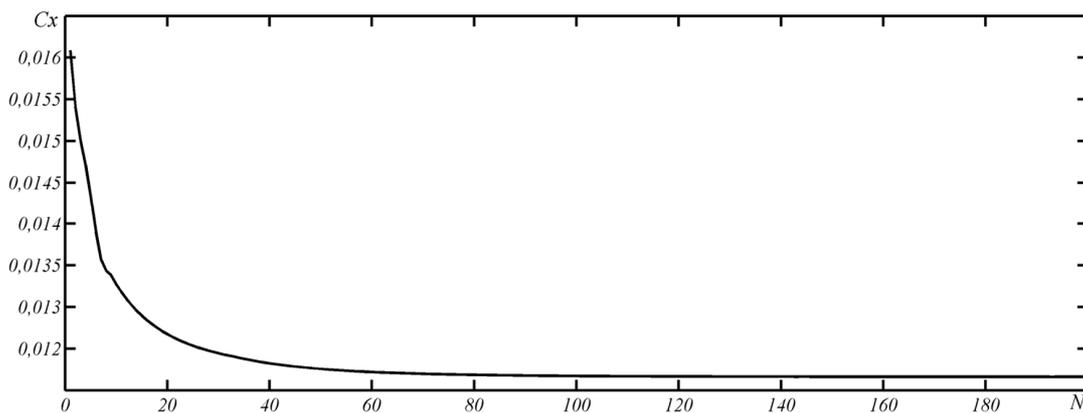


Рис. 4. Зависимость лобового сопротивления от числа итераций

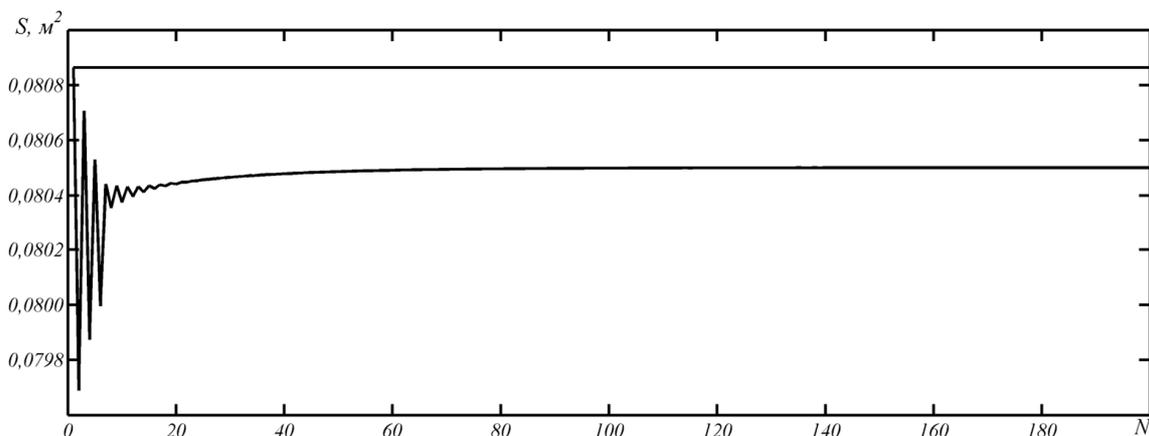


Рис. 5. Зависимость площади профиля от числа итераций

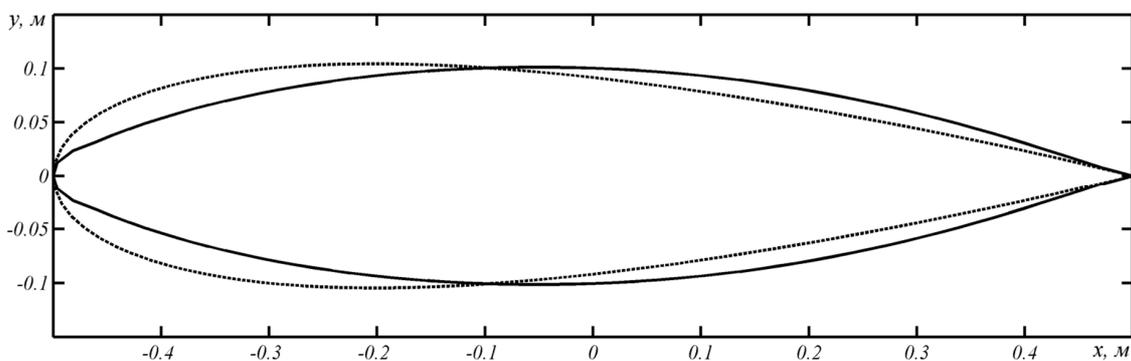


Рис. 6. Профиль, полученный в результате оптимизации (сплошная линия), и исходный профиль NASA0021 (пунктирная линия)

Величина коэффициента лобового сопротивления профиля, полученного в результате оптимизации, по отношению к сопротивлению исходного профиля (рис. б) снизилась на 37,2%, при этом площадь оптимизированного профиля уменьшилась на 1%.

Выводы. Полученные результаты демонстрируют эффективность метода сопряжённого градиента. Профили, полученные в ходе оптимизации, могут быть использованы при проектировании стабилизирующих и управляющих поверхностей судов, подводных лодок или самолётов, летающих при числе Маха $M < 0,3$.

Библиографический список

1. Jameson, A. Aerodynamic Shape Optimization Techniques Based On Control Theory [Text]/ A. Jameson, J. J. Alonso, J. J. Reuther, L. Martinelli, J. C. Vassberg // AIAA paper 98-2538, 29th AIAA Fluid Dynamics Conference, Albuquerque, NM, June 1998.

2. Jameson, A. Aerodynamic shape optimization using the adjoint method [Text]/ A. Jameson // 2002-2003 Lecture Series at the Von Karman Institute, Von Karman Institute For Fluid Dynamics, Brussels, Belgium, February 6, 2003. - 30 p.

3. Carpentieri, G. Adjoint-based aerodynamic shape optimization on unstructured meshes [Text]/ G. Carpentieri, B. Koren, M.J.L. van Tooren // Journal of Computational Physics. - 2007. - V. 224. - P. 267-287.

4. Elliott, J. Aerodynamic optimization on unstructured meshes with viscous effects [Text]/ J. Elliott, J. Peraire // AIAA paper 97-1849, 13th AIAA CFD Conference, Snowmass, Colorado, June 1997.

5. Giles, M. B. An introduction to the adjoint approach to design [Text]/ M. B. Giles, Niles A. Pierce // Flow, Turbulence and Combustion. - 2000. - V. 65. - P. 393-415.

6. Blazek, J. Computational fluid dynamics: Principles and applications [Text]/ J. Blazek - ELSEVIER, 2001. - 440 p.

7. Edward, S. A. Parallel Navier-Stokes solver for natural convection and free surface flow [Text]/ S. A. Edward - University of Sydney, 2006. - 218 p.

8. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2-х томах: Т. 2: Пер. с англ. [Текст]/ К. Флетчер - М.: Мир, 1991. - Т. 2. - 552 с.

SYMMETRIC AIRFOIL SHAPE OPTIMIZATION USING THE ADJOINT GRADIENT METHOD FOR VISCOUS TURBULENT INCOMPRESSIBLE FLOW

© 2011 Ye. V. Pechenik

Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov
(National Research University)

The problem of minimizing drag of symmetric airfoil at the given area and chord is dealt with. Optimization is obtained by the adjoint gradient method for an incompressible viscous flow. The primal problem is solved by the SIMPLE algorithm using the Star-CD software. Adjoint equations are solved by the SIMPLE adapted algorithm.

Optimization, objective function, constraint function, design variables, adjoint equations, symmetric airfoil.

Информация об авторах

Печеник Евгений Валерьевич, аспирант кафедры аэрогидродинамики. Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет). Область научных интересов: численные методы оптимизации в задачах аэрогидродинамики. E-mail: pechenik@list.ru.

Pechenik Yevgeny Valeryevitch, post-graduate student of the aerohydrodynamics department, Samara State Aerospace University named after academician S. P. Korolyov (National Research University), pechenik@list.ru. Area of research: numerical methods for optimization in aerohydrodynamics.