Подписной индекс 80307
ISSN 2541-7525

ВЕСТНИК
САМАРСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ЕСТЕСТВЕННОНАУЧНАЯ СЕРИЯ

(ВЕСТНИК САМАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА)

• *Математика*

ТОМ 23 • № 4 • 2017 ГОД

УЧРЕДИТЕЛЬ ЖУРНАЛА
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» (Самарский университет)

eLIBRARY.RU РИНЦ ВИНИТИ URLICH'S Periodical Directory Math-Net.ru zbMATH MathSciNet

Все статьи по тематике международной базы данных zbMATH считаются включенными в Перечень ведущих научных журналов Высшей аттестационной комиссии при Министерстве образования и науки РФ
Журнал издается с 1995 г. под названием «Вестник Самарского государственного университета», с 2016 г. — «Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия»

Адрес редакции: 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.
E-mail: *nsvestnik@ssau.ru*
www: *http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est*

Свидетельство о регистрации средства массовой информации **ПИ № ФС 77-67328** от 05.10.2016 г., выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций

Подписной индекс в каталоге
АО Агентство «Роспечать» 80307
ISSN 2541-7525

Авторские статьи не обязательно отражают мнение издателя.

Цена свободная

Подписано в печать 18.12.2017 г.
Формат $60 \times 84/8$.
Бумага офсетная. Печать оперативная.
Печ. л. 9
Typeset by $\LaTeX 2_\varepsilon$.
Тираж 50 экз. Заказ №

Издательство Самарского университета,
443086, г. Самара, Московское шоссе, 34.
http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit
Отпечатано в типографии Самарского университета

DOI: 10.18287/2541-7525-2017-23-4

Subscription Index 80307
ISSN 2541-7525

VESTNIK
OF SAMARA UNIVERSITY
NATURAL SCIENCE SERIES

(VESTNIK OF SAMARA STATE UNIVERSITY)

• *Mathematics*

VOL. 23 • № 4 • 2017

MAGAZINE FOUNDER
Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education
«Samara National Research University»
(Samara University)

eLIBRARY.RU RSCI VINITI URLICH'S Periodical Directory Math-Net.ru zbMATH MathSciNet

All articles on the subject of an international database zbMATH seemed to be included in the list of leading scientific journals of the Higher Attestation Committee at the Ministry of Education and Science of the Russian Federation
The journal is piblished since 1995 under the title Vestnik of Samara State University, since 2016 — Vestnik of Samara University. Natural Science Series

Adress of editorial stuff: 1, Acad. Pavlov Street, Samara, 443011, Russian Federation.
E-mail: *nsvestnik@ssau.ru*
www: *http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est*

Certificate of registration of means of mass media **ПИ № ФС 77-67328** dated 05.10.2016, issued by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media.

Subscription Index in the Agency «Rospechat» 80307
ISSN 2541-7525

Price free

Passed for printing 18.12.2017.
Format $60 \times 84/8$.
Litho paper. Instant print.
Print. sheets 9.
Typeset by LaTeX2$_\varepsilon$.
Circulation 50 copies. Order №

Publishing house of Samara University,
34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.
http://www.ssau.ru/info/struct/otd/common/edit
Printed in the printing house of Samara University

DOI: 10.18287/2541-7525-2017-23-4

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

CONTENTS

Mathematics

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95, 624.07

DOI: 10.18287/2541-7525-2017-23-4-7-18

А.Б. Бейлин, Л.С. Пулькина[1]

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ТОЛСТОГО СТЕРЖНЯ

В статье рассматривается начально-краевая задача с динамическим нелокальным граничным условием для псевдогиперболического уравнения четвертого порядка в прямоугольнике. Динамическое нелокальное граничное условие представляет собой соотношение, в которое помимо значений искомого решения и его производных по пространственным переменным входят производные второго порядка по переменной времени, а также интеграл от искомого решения. Эта задача может служить математической моделью процессов, связанных с продольными колебаниями толстого короткого стержня, и демонстрирует нелокальный подход к изучаемому явлению. Основной результат статьи состоит в обосновании разрешимости поставленной задачи. Доказано существование единственного обобщенного решения. Доказательство базируется на полученных в работе априорных оценках, методе Галеркина и свойствах пространств Соболева.

Ключевые слова: псевдогиперболическое уравнение, динамические граничные условия, продольные колебания, нелокальные условия, обобщенное решение.

Введение

Теоретические исследования продольных колебаний относительно толстого и короткого стержня базируются на математической модели, содержащей уравнение четвертого порядка с доминирующей смешанной производной. Этот факт был отмечен Рэлеем [1, Т. I, с. 273–274] и в дальнейшем развит в работах [2–4]. Использование этой модели позволяет проводить более точный анализ процесса, так как присутствие в уравнении смешанной производной четвертого порядка отражает эффекты деформации стержня в поперечном направлении. Вид краевых условий обусловлен способом закрепления концов стержня. В случае колебаний тонкого длинного стержня условия, заданные в точках границы области, в которой ищется решение, достаточны для адекватного описания процесса колебаний. Однако, если речь идет о колебаниях толстого короткого стержня, то следует предположить, что краевые условия, заданные на разных участках границы, могут оказаться связанными между собой некоторым соотношением. Задача, в которой учтена такая возможность, рассматривалась В.А. Стекловым для уравнения теплопроводности [5]. Краевые условия, возникающие при таком подходе, впоследствии были названы нелокальными, а упомянутая статья оказалась отправной точкой многих исследований нелокальных задач для уравнений с частными производными различных типов [6–9]. Следующим шагом в постановке нелокальных задач явились статьи [10; 11], в которых вместо краевых условий на решение уравнения теплопроводности рассматриваются нелокальные условия, заданные в виде интегралов от искомого решения. Такой подход оказался весьма эффективным. В настоящее время задачи с нелокальными условиями активно изучаются, опубликовано большое количество работ, из которых мы отметим лишь наиболее близкие к теме нашей статьи, а именно те, в которых рассмотрены нелокальные задачи с интегральными условиями для гиперболического и псевдогиперболического уравнений [12–16]. Нелокальные задачи оказались в сфере интересов многих математиков как теоретическое обобщение классических краевых задач. Разработаны методы доказательства их разрешимости. В то же время гипотеза о разумности нелокального подхода к математическому моделированию многих явлений современного естествознания, в том числе колебаний твердых тел, выдвинута и со стороны инженеров [17]. Многие идеи, представлен-

Бейлин Александр Борисович (abeilin@mail.ru), кафедра АСиИС, Самарский государственный технический университет, 443010, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 133.

Пулькина Людмила Степановна (louise@samdiff.ru), кафедра уравнений математической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

ные в этой статье, могут быть реализованы с помощью теперь уже известных методов, разработанных для исследования именно нелокальных задач.

Приведенные соображения обусловили постановку задачи с нелокальными условиями для псевдогиперболического уравнения, которая и является основным объектом исследования предлагаемой статьи.

1. Постановка задачи

Рассмотрим продольные колебания толстого короткого стержня, которые возбуждаются распределенной силой $f(x,t)$. Будем считать, что стержень представляет собой тело вращения относительно оси $0x$. Продольные смещения, подлежащие определению, обозначим $u(x,t)$.

Рассмотрим следующую задачу: в области $Q_T = (0,l)\times(0,T)$ найти решение уравнения

$$Lu \equiv \sigma(x)u_{tt} - (a(x)u_x)_x - (b(x)u_{ttx})_x + cu = F(x,t), \tag{1.1}$$

удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 \tag{1.2}$$

и нелокальным условиям

$$\int_0^l P_1(x)u(x,t)dx = E_1(t), \quad \int_0^l P_2(x)u(x,t)dx = E_2(t). \tag{1.3}$$

Функции $P_i(x)$, $E_i(t)$ заданы, а коэффициенты уравнения имеют физический смысл:

$$\sigma(x) = \rho(x)A(x), \quad a(x) = A(x)E(x), \quad b(x) = \rho(x)\nu^2(x)I_p(x),$$

где $A(x)$ — площадь поперечного сечения, $\rho(x)$ — массовая плотность стержня, $E(x)$ — модуль Юнга, $\nu(x)$ — коэффициент Пуассона, $I_p(x)$ — полярный момент инерции.

Условия (1.3) являются интегральными условиями первого рода. Исследование задач с такими условиями сопряжено со значительными трудностями, но методы их преодоления разработаны и успешно применяются [18]. Однако в нашем случае есть одно препятствие, не позволяющее сразу применить эти методы, так как коэффициент $\sigma(x)$ в уравнении (1.1) не есть постоянная. Проведенные исследования позволили предложить эффективный прием, который приводит к возможности применить разработанные методы исследования разрешимости задачи с нелокальными интегральными условиями вида (1.3).

Выберем функции $K_1(x), K_2(x)$ так, чтобы $\sigma K_i - (K'(x)b(x))' = P_i(x)$, и

$$\Delta = K_1(0)K_2(l) - K_1(l)K_2(0) \neq 0. \tag{1.4}$$

Предположим, что существует решение задачи (1.1)–(1.3). Умножим (1.1) на $K_i(x), i = 1,2$, и проинтегрируем каждое из полученных равенств по $(0,l)$. Получим

$$\begin{gathered}
[K_i(0)a(0)u_x(0,t) + K_i(0)b(0)u_{xtt}(0,t)] - [K_i(l)a(l)u_x(l,t) + K_i(l)b(l)u_{xtt}(l,t)] - \\
-K_i'(0)a(0)u(0,t) + +K_i'(l)a(l)u(l,t) - K_i'(0)b(0)u_{tt}(0,t) + K_i'(l)b(l)u_{tt}(l,t) + \\
+\int_0^l P_i(x)u_{tt}dx + \int_0^l [cK_i - (aK_i')']udx = \int_0^l K_i f dx.
\end{gathered} \tag{1.5}$$

В силу условия (1.4) систему (1.5) можно разрешить относительно двух первых слагаемых. Получим

$$\begin{gathered}
a(0)u_x(0,t) + b(0)u_{xtt}(0,t) + \alpha_{11}u(0,t) + \alpha_{12}u(l,t) + \\
+\beta_{11}u_{tt}(0,t) + \beta_{12}u_{tt}(l,t) + \int_0^l H_1(x)u(x,t)dx = g_1(t), \\
a(l)u_x(l,t) + b(l)u_{xtt}(l,t) + \alpha_{21}u(0,t) + \alpha_{22}u(l,t) + \\
+\beta_{21}u_{tt}(0,t) + \beta_{22}u_{tt}(l,t) + \int_0^l H_2(x)u(x,t)dx = g_2(t),
\end{gathered} \tag{1.6}$$

где обозначено

$$\alpha_{11} = \frac{a(0)}{\Delta}[K_1(l)K_2'(0) - K_2(l)K_1'(0)], \;\; \alpha_{12} = \frac{a(l)}{\Delta}[K_2(l)K_1'(l) - K_1(l)K_2'(l)],$$

$$\beta_{11} = \frac{b(0)}{\Delta}[K_1(l)K_2'(0) - K_2(l)K_1'(0)], \;\; \beta_{12} = \frac{b(l)}{\Delta}[K_2(l)K_1'(l) - K_1(l)K_2'(l)],$$

$$\alpha_{21} = \frac{a(0)}{\Delta}[K_1(0)K_2'(0) - K_2(0)K_1'(0)], \;\; \alpha_{22} = \frac{a(l)}{\Delta}[K_2(0)K_1'(l) - K_1(0)K_2'(l)],$$

$$\beta_{21}=\frac{b(0)}{\Delta}[K_1(0)K_2'(0)-K_2(0)K_1'(0)],\ \ \beta_{22}=\frac{b(l)}{\Delta}[K_2(0)K_1'(l)-K_1(0)K_2'(l)],$$
$$H_1(x)=\frac{1}{\Delta}[(cK_1-(aK_1')')K_2(l)-(cK_2-(aK_2')')K_1(l)],$$
$$H_2(x)=\frac{1}{\Delta}[(cK_1-(aK_1')')K_2(0)-(cK_2-(aK_2')')K_1(0)],$$
$$g_1(t)=\frac{1}{\Delta}[(\int_0^l K_1f dx-E_1''(t))K_2(l)-(\int_0^l K_2f dx-E_2''(t))K_1(l)],$$
$$g_2(t)=\frac{1}{\Delta}[(\int_0^l K_1f dx-E_1''(t))K_2(0)-(\int_0^l K_2f dx-E_2''(t))K_1(0)].$$

Таким образом, решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условию (1.3), удовлетворяет и условию (1.6). Покажем, что при выполнении условий согласования $E_i(0)=0,\ E_i'(0)=0$ из условия (1.6) следует выполнение условия (1.3). Действительно, повторив процедуру умножения (1.1) на K_i и интегрирования по $(0,l)$ после применения условия (1.6) получим равенства

$$\int_0^l P_i(x)u_{tt}(x,t)dx=E_i''(t), i=1,2,$$

каждое из которых представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функций $\int_0^l P_i(x)u(x,t)dx$. Из условий согласования получаем начальные условия

$$\int_0^l P_i(x)u(x,0)dx=0,\ \ \int_0^l P_i(x)u_t(x,0)dx=0.$$

Тогда очевидно, что решением каждой из полученных задач Коши являются функции $\int_0^l P_i(x)u(x,t)dx=$ $=E_i(t)$, что означает выполнение условий (1.3) и, следовательно, условия (1.3) и (1.6) эквивалентны в описанном выше смысле. Для удобства дальнейших ссылок сформулируем полученный результат в виде леммы.

Лемма. Условия (1.3) и (1.6) эквивалентны, если $\Delta=K_1(0)K_2(l)-K_1(l)K_2(0)\neq 0$ и выполнены условия согласования $E_i(0)=0,\ E_i'(0)=0$.

Заметим, что условия (1.6) являются динамическими нелокальными условиями. Задачи с динамическими краевыми условиями возникают при математическом моделировании многих физических явлений. Не останавливаясь здесь на их описании подробно, отметим некоторые работы [3; 19–22]. Простейшие задачи с динамическими условиями приведены в качестве примеров в [19].

Будем теперь рассматривать задачу (1.1), (1.2), (1.6), что обосновано леммой.

Обозначим $\Gamma=\Gamma_0\cup\Gamma_l$, где $\Gamma_0=\{(x,t):x=0,t\in[0,T]\},\Gamma_l=\{(x,t):x=l,t\in[0,T]\}$

$$W(Q_T)=\{u:\ \ u\in W_2^1(Q_T),\ \ u_t\in W_2^1(Q_T),\ \ u_{xt}\in L_2(Q_T),\ \ u\in L_2(\Gamma)\},$$
$$V(Q_T)=\{v:\ \ v\in W(Q_T),\ \ v(x,T)=0\}.$$

Нормы в этих пространствах определим естественным образом

$$||u||^2_{W(Q_T)}=||u||^2_{W_2^1(Q_T)}+||u_{xt}||^2_{L_2(Q_T)}+||u_t||^2_{L_2(\Gamma)},$$
$$||v||^2_{V(Q_T)}=||v||^2_{W_2^1(Q_T)}+||v_{xt}||^2_{L_2(Q_T)}.$$

Следуя [24, с. 92, 210], из тождества $\int_0^T\int_0^l(Lu-f)vdxdt=0$ получим равенство

$$\int_0^T\int_0^l(-\sigma u_tv_t+au_xv_x-bu_{xt}v_{xt}+cuv)dxdt-\int_0^T v(0,t)[\alpha_{11}u(0,t)+\alpha_{12}u(l,t)]dt+$$
$$+\int_0^T v(l,t)[\alpha_{21}u(0,t)+\alpha_{22}u(l,t)]dt+\int_0^T v_t(0,t)[\beta_{11}u_t(0,t)+\beta_{12}u_t(l,t)]dt-$$
$$-\int_0^T v_t(l,t)[\beta_{21}u_t(0,t)+\beta_{22}u_t(l,t)]dt-\int_0^T v(0,t)\int_0^l H_1(x)u(x,t)dxdt+$$

$$+\int_0^T v(l,t)\int_0^l H_2(x)u(x,t)dxdt=$$

$$=\int_0^T\int_0^l fvdxdt+\int_0^T v(0,t)g_1(t)dt-\int_0^T v(l,t)g_2(t)dt. \tag{1.7}$$

Определение. Обобщенным решением задачи (1.1), (1.2), (1.6) будем называть функцию $u\in W(Q_T)$, удовлетворяющую начальному условию $u(x,0)=0$ и тождеству (1.7) для любой функции $v\in V(Q_T)$.

2. Разрешимость задачи

Теорема. Пусть выполняются условия

$$1.\quad f\in L_2(Q_T),\quad a,b\in C^1[0,l],\quad c,\sigma\in C[0,l];$$

$$2.\quad K_i\in C^2(0,l)\cup C^1[0,l],\quad K_1(0)K_2(l)-K_1(l)K_2(0)\neq 0;$$

$$3.\quad E\in C^2[0,T],\quad E_i(0)=E_i'(0)=0;$$

$$4.\quad \beta_{12}+\beta_{21}=0,\quad \beta_{11}<0,\quad \beta_{22}>0;$$

$$5.\ \alpha_{22}\xi_1^2+2\alpha_{12}\xi_1\xi_2-\alpha_{11}\leqslant 0,\quad \beta_{22}\xi_1^2+2\beta_{12}\xi_1\xi_2-\beta_{11}\leqslant 0,$$

причем равенство нулю возможно лишь при всех $\xi_i=0,\ i=1,2$.

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1.1), (1.2), (1.6).

Доказательство. Доказательство теоремы проведем в несколько этапов. На первом докажем единственность обобщенного решения. Реализацию второго этапа начнем с построения последовательности приближенных решений. Затем получим априорную оценку решений, которая позволит выделить из построенной последовательности приближенных решений слабо сходящуюся в пространстве $W(Q_T)$ подпоследовательность. На заключительном этапе покажем, что предел выделенной подпоследовательности и есть искомое обобщенное решение.

Единственность. Предположим, что существует два различных обобщенных решения задачи (1.1), (1.2), (1.6), u_1 и u_2. Тогда их разность, $u=u_1-u_2$, удовлетворяет условию $u(x,0)=0$ и тождеству

$$\int_0^T\int_0^l(-\sigma u_tv_t+au_xv_x-bu_{xt}v_{xt}+cuv)dxdt-\int_0^T v(0,t)[\alpha_{11}u(0,t)+\alpha_{12}u(l,t)]dt+$$

$$+\int_0^T v(l,t)[\alpha_{21}u(0,t)+\alpha_{22}u(l,t)]dt+\int_0^T v_t(0,t)[\beta_{11}u_t(0,t)+\beta_{12}u_t(l,t)]dt-$$

$$-\int_0^T v_t(l,t)[\beta_{21}u_t(0,t)+\beta_{22}u_t(l,t)]dt-\int_0^T v(0,t)\int_0^l H_1(x)u(x,t)dxdt+$$

$$+\int_0^T v(l,t)\int_0^l H_2(x)u(x,t)dxdt=0 \tag{2.8}$$

Положим в (2.8)

$$v=\begin{cases}\int_\tau^t u(x,\eta)d\eta, & 0\leqslant t\leqslant\tau,\\ 0, & \tau\leqslant t\leqslant T,\end{cases} \tag{2.9}$$

где $\tau\in[0,T]$ произвольно, и преобразуем его, интегрируя по частям. Получим равенство

$$\int_0^l[\sigma u^2(x,\tau)+av_x^2(x,0)+bu_x^2(x,\tau)]dx-$$

$$-\beta_{11}u^2(0,\tau)+2\beta_{21}u(0,\tau)u(l,\tau)+\beta_{22}u^2(l,\tau)+$$

$$+\alpha_{22}v^2(l,0)+2\alpha_{12}v(0,0)v(l,0)-\alpha_{11}v^2(0,0)=$$

$$=2(\alpha_{21}-\alpha_{12})\int_0^\tau u(0,t)v(l,t)dt+2\int_0^\tau\int_0^l cvv_tdxdt-$$

$$-2\int\limits_0^\tau v(0,t)\int\limits_0^l H_1 u dxdt + 2\int\limits_0^\tau v(l,t)\int\limits_0^l H_2 u dxdt +$$

$$+2(\beta_{12}+\beta_{21})\int\limits_0^\tau u(0,t)u_t(l,t)dt. \qquad (2.10)$$

Заметим, что в силу условий теоремы существуют положительные числа c_0, h, A, B такие, что

$$\max_{\bar{Q}_T}|c(x,t)| \leqslant c_0, \quad \max_i \max_{[0,T]}\{\int\limits_0^l H_i^2 dx\} \leqslant h,$$

$$\max_{ij}|\alpha_{ij}| \leqslant A, \quad \max_{ij}|\beta_{ij}| \leqslant B.$$

Перейдем к выводу оценок. Применив неравенство Коши, получим :

$$\Big|2\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l cvv_t dxdt\Big| \leqslant c_0\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (v^2+v_t^2)dxdt;$$

$$\Big|2(\alpha_{21}-\alpha_{12})\int\limits_0^\tau u(0,t)v(l,t)dt\Big| \leqslant A\int\limits_0^\tau [u^2(0,t)+v^2(l,y)]dt;$$

$$\Big|2\int\limits_0^\tau v(0,t)\int\limits_0^l H_1 u dxdt\Big| \leqslant \int\limits_0^{tau} v^2(0,t)dt + h\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l u^2 dxdt;$$

$$\Big|2\int\limits_0^\tau v(l,t)\int\limits_0^l H_2 u dxdt\Big| \leqslant \int\limits_0^{tau} v^2(l,t)dt + h\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l u^2 dxdt.$$

Для продолжения вывода оценки нам будут полезны неравенства

$$\begin{aligned} u^2(0,\tau) &\leqslant 2l\int\limits_0^l u_x^2(x,\tau)dx + \tfrac{2}{l}\int\limits_0^l u^2(x,\tau)dx, \\ u^2(l,\tau) &\leqslant 2l\int\limits_0^l u_x^2(x,\tau)dx + \tfrac{2}{l}\int\limits_0^l u^2(x,\tau)dx, \end{aligned} \qquad (2.11)$$

которые являются следствиями представлений

$$u(0,\tau) = \int\limits_x^0 u_{xi}d\xi + u(x,t), \quad u(l,\tau) = \int\limits_x^l u_{xi}d\xi + u(x,t),$$

а также неравенство

$$v^2(x,t) \leqslant \tau\int\limits_0^\tau u^2(x,t)dt,$$

которое вытекает из представления функции $v(x,t)$. Отметим, что неравенства (2.11) выполняются и для $v(x,t)$. Теперь из (2.8) с помощью полученных неравенств, условия (5) и первого из условий (4) теоремы получим неравенство

$$\int\limits_0^l [\sigma u^2(x,\tau) + av_x^2(x,0) + bu_x^2(x,\tau)]dx \leqslant C_1\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l [u^2+v_x^2+u_x^2]dxdt, \qquad (2.12)$$

где C_1 выражена через c_0, h, A, B, l, τ. Нетрудно видеть, что применению к (2.12) леммы Гроноулла препятствует присутствие в левой части (2.12) функции $v_x^2(x,0)$. Поэтому введем функцию $w(x,t) = = \int\limits_t^0 u_x(x,\eta)d\eta$, которая дает возможность получить равенства

$$v_x(x,t) = w(x,\tau) - w(x,t), \quad v_x(x,0) = w(x,\tau).$$

Тогда (2.12) примет вид

$$\int\limits_0^l [\sigma u^2(x,\tau) + aw^2(x,\tau) + bu_x^2(x,\tau)]dx \leqslant C_1\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l [u^2+u_x^2]dxdt +$$

$$+2C_1\int_0^\tau\int_0^l w^2dxdt+2\tau C_1\int_0^l w^2(x,\tau)dx. \tag{2.13}$$

Заметим, что из физического смысла коэффициентов уравнения (1.1) следует, что $a(x)\geqslant a_0>0,\quad b(x)\geqslant\geqslant b_0>0,\quad \sigma(x)\geqslant\sigma_0>0$. Пользуясь произволом, выберем τ так, чтобы $a_0-2C_1\tau>0$. Пусть $a_0-2C_1\tau\geqslant\geqslant\frac{a_0}{2}$. Перенесем последнее слагаемое правой части неравенства (2.13) в правую часть, в результате чего получим

$$m_0\int_0^l[u^2(x,\tau)+w^2(x,\tau)+u_x^2(x,\tau)]dx\leqslant M\int_0^\tau\int_0^l[u^2+w^2+u_x^2]dxdt,$$

где $m_0=\min\{\sigma_0,\frac{a_0}{2},b_0\},\quad M=2C_1$. Применение к последнему неравенству леммы Гронуолла приводит к равенству $u(x,t)=0\ \forall t\in[0,\frac{a_0}{4C_1}]$. Повторив рассуждение для $t\in[\frac{a_0}{4C_1},\frac{a_0}{2C_1}]$, убедимся, что и на этом промежутке $u(x,t)=0$. Продолжив этот процесс, в конечное число шагов докажем, что $u(x,t)=0$ на всем промежутке $[0,T]$. Итак, в условиях теоремы существует не более одного решения поставленной задачи.

Перейдем к доказательству существования решения.

Существование. Пусть $w_k\in C^2[0,l]$ линейно независимы и образуют полную систему в $W_2^1(0,l)$. Будем искать приближенное решение задачи в виде

$$u^m(x,t)=\sum_{k=1}^m c_k(t)w_k(x)$$

из соотношений

$$\int_0^l\left(\sigma u_{tt}^m w_j+u_x^m w_j'+bu_{xtt}^m w_j'+cu^m w_j\right)dx-$$
$$-w_j(0)[\alpha_{11}u(0,t)+\alpha_{12}u^m(l,t)+\beta_{11}u_{tt}^m(0,t)+\beta_{12}u_{tt}^m(l,t)]dt+$$
$$+w_j(l)[\alpha_{21}u(0,t)+\alpha_{22}u^m(l,t)+\beta_{21}u_{tt}^m(0,t)+\beta_{22}u_{tt}^m(l,t)]dt-$$
$$-w_j(0)\int_0^l H_1udx+w_j(l)\int_0^l H_2udx=$$
$$=w_j(0)g_1(t)-w_j(l)g_2(t)+\int_0^l fw_jdx, \tag{2.14}$$

которые представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно $c_k(t)$:

$$\sum_{k=1}^m[A_{kj}c_k''(t)+B_{kj}c_k(t)]=f_j(t), \tag{2.15}$$

коэффициенты которой выражаются формулами

$$A_{kj}=\int_0^l(\sigma w_kw_j+bw_k'w_j')dx-$$
$$-w_k(0)[\beta_{11}w_k(0)+\beta_{12}w_k(l)]+w_j(l)[\beta_{21}w_k(0)+\beta_{22}w_k(l)],$$
$$B_{kj}=\int_0^l aw_k'w_j'dx-w_j(0)\int_0^l H_1w_kdx+w_j(l)\int_0^l H_2w_kdx-$$
$$-w_j(0)[\alpha_{11}w_k(0)+\alpha_{12}w_k(l)]+w_j(0)[\alpha_{21}w_k(0)+\alpha_{22}w_k(l)],$$
$$f_j(t)=\int_0^l f(x,t)w_j(x)dx+g_1(t)w_j(0)-g_2(t)w_j(l).$$

Добавив начальные условия

$$c_k(0)=0,\quad c_k'(0)=0, \tag{2.16}$$

получаем задачу Коши для системы (2.15).

Выясним, разрешима ли эта система относительно $c_k''(t)$. Рассмотрим матрицу $\mathcal{A} = (A_{kj})_{k,j=1}^m$ при старших производных и покажем, что она положительно определена. Введем квадратичную форму с матрицей $\mathcal{A}$

$$q = \sum_{k,j=1}^m A_{kj}\xi_k\xi_j,$$

где ξ_k, ξ_j — коэффициенты линейных комбинаций $\xi = \sum_{i=1}^m \xi_i w_i(x)$. Преобразуем квадратичную форму, учитывая представление ее коэффициентов:

$$q = \sum_{k,j=1}^m \int_0^l (\sigma w_k w_j \xi_k \xi_j + b w_k' w_j' \xi_k \xi_j) dx + [\beta_{22} w_k(l) w_j(l) - \beta_{11} w_j(0) w_k(0)]\xi_k\xi_j -$$

$$-[\beta_{12} w_j(0) w_k(l) + \beta_{21} w_j(l) w_k(0)]\xi_k\xi_j.$$

Изменив порядок суммирования и интегрирования, получим

$$q = \int_0^l \left(\sigma|\xi|^2 + b|\nabla\xi|^2\right) dx + (\beta_{22}|\xi(l)|^2 + 2\beta_{21}|\xi(0)||\xi(l)| - \beta_{11}|\xi(0)|^2) > 0$$

в силу условий 4 и 5 теоремы.

Заметим, что квадратичная форма q обращается в нуль только при $\xi = 0$, а тогда в силу линейной независимости $w_k(x)$ $\xi_k = 0$, $\forall k = 1, ..., m$. Следовательно матрица $\mathcal{A}$ положительно определена, и поэтому система (2.15) разрешима относительно старших производных. Так как из условий теоремы следует ограниченность ее коэффициентов и принадлежность правой части пространству $L_2(Q_T)$, то задача Коши (2.15)–(2.16) разрешима и $c_k''(t) \in L_2(Q_T)$.

Итак, последовательность приближенных решений $\{u^m(x,t)\}$ построена. Следующий шаг в доказательстве теоремы состоит в получении априорных оценок.

Априорная оценка.

Умножим (2.14) на $c_j'(t)$, просуммируем от $j = 1$ до $j = m$, а затем проинтегрируем полученное равенство от $t = 0$ до $t = \tau$, в результате чего получим:

$$\int_0^\tau \int_0^l (\sigma u_{tt}^m u_t^m + a u_x^m u_{xt}^m + b u_{xtt}^m u_{xt}^m)\, dx dt +$$

$$-\int_0^\tau u_t^m(0,t)[\alpha_{11} u^m(0,t) + \alpha_{12} u^m(l,t) + \beta_{11} u_{tt}^m(0,t) + \beta_{12} u_{tt}^m] dt +$$

$$+\int_0^\tau u_t^m(l,t)[\alpha_{21} u^m(0,t) + \alpha_{22} u^m(l,t) + \beta_{21} u_{tt}^m(0,t) + \beta_{22} u_{tt}^m] dt -$$

$$-\int_0^\tau u_t^m(0,t) \int_0^l H_1 u^m dx dt + \int_0^\tau u_t^m(l,t) \int_0^l H_2 u^m dx dt =$$

$$= \int_0^\tau \int_0^l f u_t^m dx dt - \int_0^\tau g_1(t) u_t^m(0,t) dt - \int_0^\tau g_2(t) u_t^m(l,t) dt. \tag{2.17}$$

Интегрируя по частям, как и при доказательстве единственности, и учитывая условие $\beta_{12} + \beta_{21} = 0$ приходим к равенству

$$\int_0^l \left(\sigma(u_t^m(x,\tau))^2 + a(u_x^m(x,\tau))^2 + b(u_{xt}^m(x,\tau))^2\right) dx +$$

$$+[\alpha_{22}(u^m(l,\tau))^2 + 2\alpha_{21} u^m(0,\tau) u^m(l,\tau) - \alpha_{11}(u^m(0,t))^2] +$$

$$+[\beta_{22}(u_t^m(l,\tau))^2 + 2\beta_{21} u_t^m(0,\tau) u^m(l,\tau) - \beta_{11}(u_t^m(0,t))^2] =$$

$$= 2(\alpha_{12} + \alpha_{21}) \int_0^\tau u_t^m(0,t) u^m(l,t) dt - 2\int_0^\tau \int_0^l c u^m u_t^m dx dt +$$

$$+2\int_0^\tau u_t^m(0,t)\int_0^l H_1u^m dxdt - 2\int_0^\tau u_t^m(l,t)\int_0^l H_2u^m dxdt +$$
$$+2\int_0^\tau\int_0^l fu_t^m dxdt + 2\int_0^\tau g_1(t)u_t^m(0,t)dt - 2\int_0^\tau g_2(t)u_t^m(l,t)dt. \tag{2.18}$$

Оценим правую часть (2.18), заметив, что левая часть этого равенства неотрицательна.

Применив неравенство Коши и неравенства (2.11), с помощью той же техники, что и при доказательстве единственности, получим

$$\int_0^l \left(\sigma(u_t^m(x,\tau))^2 + a(u_x^m(x,\tau))^2 + b(u_{xt}^m(x,\tau))^2\right)dx +$$
$$+[\alpha_{22}(u^m(l,\tau))^2 + 2\alpha_{21}u^m(0,\tau)u^m(l,\tau) - \alpha_{11}(u^m(0,t))^2]$$
$$+[\beta_{22}(u_t^m(l,\tau))^2 + 2\beta_{21}u_t^m(0,\tau)u^m(l,\tau) - \beta_{11}(u_t^m(0,t))^2] \leqslant$$
$$C_3\int_0^\tau\int_0^l [(u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2 + (u^m)_{xt}^2]dxdt +$$
$$+C_4\left(\int_0^\tau\int_0^l f^2dxdt + \int_0^\tau (g_1^2 + g_2^2\right)dt \tag{2.19}$$

В частности

$$\int_0^l \left(\sigma(u_t^m(x,\tau))^2 + a(u_x^m(x,\tau))^2 + b(u_{xt}^m(x,\tau))^2\right)dx \leqslant$$
$$C_3\int_0^\tau\int_0^l [(u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2 + (u^m)_{xt}^2]dxdt +$$
$$+C_4\left(\int_0^\tau\int_0^l f^2dxdt + \int_0^\tau (g_1^2 + g_2^2\right)dt.$$

Прибавим к обеим частям последнего соотношения неравенство

$$(u^m(x,\tau))^2 \leqslant \tau\int_0^\tau (u_t^m(x,t))^2dt,$$

являющееся следствием применения неравенства Коши — Буняковского к представлению

$$u^m(x,\tau) = \int_0^\tau u_t^m(x,t)dt,$$

получим

$$\int_0^l \left((u^m(x,\tau)^2 + \sigma(u_t^m(x,\tau))^2 + a(u_x^m(x,\tau))^2 + b(u_{xt}^m(x,\tau))^2\right)dx \leqslant$$
$$C_5\int_0^\tau\int_0^l [(u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2 + (u^m)_{xt}^2]dxdt +$$
$$+C_4\left(\int_0^\tau\int_0^l f^2dxdt + \int_0^\tau (g_1^2 + g_2^2\right)dt,$$

$C_5 = C_4(1+\tau)$. Обозначим $\mu_1 = \min\{1,\sigma_0,a_0,b_0,\}$, $M_1 = C_5/\mu_1$, $M_2 = C_4/\mu_1$. Тогда последнее неравенство примет вид

$$\int_0^l \left((u^m(x,\tau)^2 + (u_t^m(x,\tau))^2 + (u_x^m(x,\tau))^2 + (u_{xt}^m(x,\tau))^2\right)dx \leqslant$$

$$\leqslant M_1 \int_0^\tau \int_0^l [(u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2 + (u^m)^2_{xt}]dxdt+$$

$$+M_2 \left(\int_0^\tau \int_0^l f^2 dxdt + \int_0^\tau (g_1^2 + g_2^2 \right) dt. \quad (2.20)$$

Применив к (2.20) лемму Гронуолла, получим

$$\int_0^l \left((u^m(x,\tau)^2 + (u_t^m(x,\tau))^2 + (u_x^m(x,\tau))^2 + (u_{xt}^m(x,\tau))^2 \right) dx \leqslant$$

$$\leqslant M_2 e^{M_1 \tau} \left(\int_0^\tau \int_0^l f^2 dxdt + \int_0^\tau (g_1^2 + g_2^2 \right) dt.$$

Заметим, что в силу условий теоремы функция $\int_0^\tau \int_0^l f^2 dxdt + \int_0^\tau (g_1^2 + g_2^2) dt$ ограничена. Пусть она ограничена некоторым числом k. Тогда мы получаем оценку

$$\int_0^l \left((u^m(x,\tau)^2 + (u_t^m(x,\tau))^2 + (u_x^m(x,\tau))^2 + (u_{xt}^m(x,\tau))^2 \right) dx \leqslant$$

$$\leqslant M_3 e^{M_1 \tau}, \quad M_3 = M_2 k. \quad (2.21)$$

Интегрируя (2.21)по τ от 0 до T, получим

$$\int_0^T \int_0^l [(u^m(x,\tau))^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m(x,\tau))^2 + (u_{xt}^m)^2] dxdt \leqslant \frac{M_3}{M_1}(e^{M_1 T} - 1).$$

Обозначив $\frac{M_3}{M_1}(e^{M_1 T} - 1) = R_1$, перепишем полученное неравенство

$$\int_0^T \int_0^l [(u^m(x,\tau))^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m(x,\tau))^2 + (u_{xt}^m)^2] dxdt \leqslant R_1. \quad (2.22)$$

Вернемся к (2.19). В силу полученной оценки (2.22) из него следует

$$\beta_{22}(u_t^m(l,\tau))^2 + 2\beta_{21} u_t^m(0,\tau) u^m(l,\tau) - \beta_{11}(u_t^m(0,t))^2] \leqslant\leqslant C_3 R_1.$$

Перенесем удвоенное произведение из левой части в правую и оценим с помощью неравенства Коши. Тогда

$$(\beta_{22} - |\beta_{21}|)(u_t^m(l,\tau))^2 + (-\beta_{11} - |\beta_{21}|)(u_t^m(0,\tau))^2 \leqslant C_3 R_1 + C_4 k.$$

Так по условию теоремы $\beta_{22} - |\beta_{21}| > 0, \quad -\beta_{11} - |\beta_{21}| > 0$, то, обозначив $M_3 = \min\{\beta_{22} - |\beta_{21}|, \; -\beta_{11} - |\beta_{21}|\}$, $R_2 = (C_3 R_1 + C_4 k)/M_3$, получим

$$(u_t^m(l,\tau))^2 + (u_t^m(0,t))^2 \leqslant R_2. \quad (2.23)$$

Из (2.22) и (2.23) следует оценка

$$||u^m||_{W(Q_T)} \leqslant R, \quad (2.24)$$

где мы обозначили $R^2 = R_1 + R_2$.

Так как пространств $W(Q_T)$ гильбертово, то полученная оценка позволяет утверждать, что из построенной последовательности приближенных решений $\{u^m(x,t)\}$ можно выделить слабо сходящуюся в норме $W(Q_T)$ подпоследовательность, за которой сохраним прежнее обозначение.

На завершающем этапе доказательства покажем, что предел выделенной подпоследовательности и есть искомое обобщенное решение. Умножим (2.14) на $d_j \in C^2(0,T), \quad d_j(T) = 0$, просуммируем от $j = 1$ до $j = m$, а затем проинтегрируем по t от 0 до T. Получим равенство

$$\int_0^T \int_0^l [\sigma u_{tt}^m \eta + a u_x^m \eta_x + b u_{xtt}^m \eta_x] dxdt -$$

$$- \int_0^T \eta(0,t)[\alpha_{11} u(0,t) + \alpha_{12} u^m(l,t) + \beta_{11} u_{tt}^m(0,t) + \beta_{12} u_{tt}^m(l,t)]dt +$$

$$+\int_0^T \eta(l,t)[\alpha_{21}u(0,t)+\alpha_{22}u^m(l,t)+\beta_{21}u^m_{tt}(0,t)+\beta_{22}u^m_{tt}(l,t)]dt-$$

$$-\int_0^T \eta(0,t)\int_0^l H_1 u dx dt + \int_0^T \eta(l,t)\int_0^l H_2 u dx dt =$$

$$=\int_0^T\int_0^l f\eta dx dt + \int_0^T \eta(0,t) g_1(t) dt - \int_0^T \eta(l,t) g_2(t) dt, \qquad (2.25)$$

где $\eta(x,t) = \sum\limits_{j=1}^{m} d_j(t)w_j(x)$. Доказанные сходимости позволяют перейти к пределу при $m \to \infty$ в равенстве (2.24). Мы получим тождество вида (1.7), но пока справедливое только для функций $\eta(x,t) = \sum\limits_{j=1}^{m} d_j(t)w_j(x)$. Однако множество всех функций такого вида всюду плотно в пространстве $W(Q_T)$ [24], поэтому мы вправе утверждать, что $u(x,t)$, слабый предел выделенной из $\{u^m(x,t)\}$ подпоследовательности удовлетворяет тождеству (1.7) для любой $v \in V(Q_T)$, т.е. является искомым обобщенноым решением задачи (1.1), (1.2), (1.6), а в силу леммы и решением задачи (1.1)–(1.3).

Теорема доказана.

Литература

[1] Re Стретт Дж.В. Теория звука. М.: ГИТТЛ, 1955. Т. I.

[2] Rao J.S. Advanced Theory of Vibration. N.Y.: Wiley, 1992.

[3] Федотов И.А., Полянин А.Д., Шаталов М.Ю. Теория свободных и вынужденных колебаний твердого стержня, основанная на модели Рэлея // ДАН. 2007. Т. 417. № 1.

[4] Бейлин А.Б., Пулькина Л.С. Задача о продольных колебаниях стержня с динамическими граничными условиями // Вестник СамГУ. 2014. № 3(114). С. 9–19.

[5] Стеклов В.А. Задача об охлаждении неоднородного твердого тела. // Сообщ. Харьковского мат. о-ва. 1896. № 5(3–4). С. 136–181.

[6] Лажетич Н.Л. О классической разрешимости смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 2006. № 42(8). С. 1072–1077.

[7] Ильин В.А., Моисеев Е.И. О единственности решения смешанной задачи для волнового уравнения с нелокальными граничными условиями // Дифференц. уравн. 2000. Т. 36. № 5. С. 656–661.

[8] Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости некоторых граничных задач со смещением для линейных гиперболических уравнений // Математический журнал института математики МО и НРК, Алматы. 2009. № 2(32). С. 78–92.

[9] Пулькина Л.С., Дюжева А.В. Нелокальная задача с переменными по времени краевыми условиями Стеклова для гиперболического уравнения // Вестник СамГУ. 2010. № 4(78), С. 56–64.

[10] Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. 1963. № 21. P. 155–160.

[11] Камынин Л.И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1964. № 4(6). С. 1006–1024.

[12] Гордезиани Д.Г., Авалишвили Г.А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Матем. моделир. 2000. № 12(1). С. 94–103.

[13] Bouziani A. On the solvability of a nonlocal problems arising in dynamics of moisture transfer // Georgian Mathematical Journal. 2003. № 4. P. 607–622.

[14] Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D. On integral nonlocal boundary problems for some partial differential equations // Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences. 2011. № 5(1). P. 31–37.

[15] Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. № 42(9). С. 1166–1179.

[16] Дмитриев В.Б. Нелокальная задача с интегральными условиями для волнового уравнения // Вестник СамГУ. 2006. № 2(42). С. 15–27.

[17] Zdeněk P. Bažant, Milan Jirásek, Nonlocal Integral Formulation of Plasticity And Damage: Survey of Progress // American Society of Civil Engineers. Journal of Engineering Mechanics. 2002. P. 1119–1149.

[18] Пулькина Л.С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода // Изв. вузов. Математика. 2012. № 4. С. 74-–83.

[19] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004. 798 с.

[20] Корпусов М.О. Разрушение в неклассических волновых уравнениях. М.: URSS, 2010.

[21] Doronin G.G., Lar'kin N.A., Souza A.J. A hyperbolic problem with nonlinear second-order boundary damping // EJDE. 1998. № 28. P. 1–10.

[22] Pulkina L.S. A nonlocal problem for a pseudohyperbolic Equation // EJDE. 2014. № 116. P. 1–11.

[23] Пулькина Л.С. Задача с динамическим нелокальным условием для псевдогиперболического уравнения // Известия вузов. 2016. Т. 60. № 9. С. 42–50.

[24] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

References

[1] J.W.S.Rayleigh. *Theory of sound.* New York: Dover, 1945. (translated in Russian in 1955). M.: GITTL, 1955, Vol. I [in Russian].

[2] Rao J.S. *Advanced Theory of Vibration.* N.Y.: Wiley, 1992 [in English].

[3] Fedotov I.A., Polyanin A.D., Shatalov M.Yu. *Teoriia svobodnykh i vynuzhdennykh kolebanii tverdogo sterzhnia, osnovannaia na modeli Releia* [Theory of free vibration of rigid rod based on Rayleigh model]. *DAN [Doklady Physics], 2007, Vol. 417, pp. 56–61.*

[4] Beilin A.B., Pulkina L.S. *Zadacha o prodol'nykh kolebaniiakh sterzhnia s dinamicheskimi granichnymi usloviiami* [A problem on longitudinal vibration in a short bar with dynamical boundary conditions]. *Vestnik SamGU* [Vestnik of Samara State University], 2014, no. 3(114), pp. 9–19 [in Russian].

[5] Steklov V.A. *Zadacha ob okhlazhdenii neodnorodnogo tverdogo tela* [The problem of cooling of inhomogeneous solid] *Soobshch. Khar'kovskogo mat. o-va* [Communications of Kharkov Mathematical Society], 1896, Vol. 5, Issue 3-4, pp. 136–181 [in Russian].

[6] Lazhetich N.L. *O klassicheskoi razreshimosti smeshannoi zadachi dlia odnomernogo giperbolicheskogo uravneniia vtorogo poriadka* [On the classical solvability of the mixed problem for a second-order one-dimensional hyperbolic equation]. *Differents. uravneniia* [Differential Equations], 2006, Vol. 42, Issue 8, pp. 1134–1139 [in Russian].

[7] Ilin V.A., Moiseev E.I. *O edinstvennosti resheniia smeshannoi zadachi dlia volnovogo uravneniia s nelokal'nymi granichnymi usloviiami* [Uniqueness of the solution of a mixed problem for the wave equation with nonlocal boundary conditions]. *Differents. uravneniia* [Differential Equations], 2000, Vol. 36, Issue 5, Pages 728–733 [in Russian].

[8] Kozhanov A.I., Pulkina L.S. *O razreshimosti nekotorykh granichnykh zadach so smeshcheniem dlia lineinykh giperbolicheskikh uravnenii* [On solvability of certain boundary problems with shift for linear hyperbolic equations]. *Matematicheskii zhurnal instituta matematiki MO i NRK, Almaty* [Matematical Journal. Institute of Mathematics and Mathematical Modelling. Almaty], 2009, Vol. 2(32), pp. 78–92 [in Russian].

[9] Pulkina L.S., Dyuzheva A.V. *Nelokal'naia zadacha s peremennymi po vremeni kraevymi usloviiami Steklova dlia giperbolicheskogo uravneniia* [Nonlocal problem with time variable boundary Steclov's conditions for hyperbolic equation]. *Vestnik SamGU* [Vestnik of Samara State University], 2010, no. 4(78), pp. 56–64 [in Russian].

[10] Cannon J.R. *The solution of the heat equation subject to the specification of energy. Quart.Appl.Math.*, 1963, no. 21, pp. 155–160 [in English].

[11] Kamynin L.I. *Ob odnoi kraevoi zadache teorii teploprovodnosti s neklassicheskimi granichnymi usloviiami* [On certain problem in heat theory with nonclassical boundary conditions]. *Zhurnal vychisl. matem. i matem. fiz.* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Phyzics], 1964, no. 4(6), pp. 1006–1024 [in Russian].

[12] Gordeziani D.G., Avalishvili G.A. *Resheniia nelokal'nykh zadach dlia odnomernykh kolebanii sredy* [Solutions of Nonlocal Problems for One-Dimensional Oscillations of the Medium]. *Matem. modelir.* [Mathematical Modeling], 2000, Vol. 12, no.1, pp. 94–103 [in Russian].

[13] Bouziani A. On the solvability of a nonlocal problems arising in dynamics of moisture transfer. *Georgian Mathematical Journal*, 2003, no. 4, pp. 607–622 [in English].

[14] Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D. On integral nonlocal boundary problems for some partial differential equations. *Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences*, 2011, no. 5(1), pp. 31–37 [in English].

[15] Kozhanov A.I., Pulkina L.S. *O razreshimosti kraevykh zadach s nelokal'nym granichnym usloviem integral'nogo vida dlia mnogomernykh giperbolicheskikh uravnenii* [On the Solvability of Boundary Value Problems with a Nonlocal Boundary Condition of Integral Form for Multidimentional Hyperbolic Equations]. *Differents. uravneniia* [Differential Equations], 2006, Vol. 42, no. 9, pp. 1233–1246 [in Russian].

[16] Dmitriev V.B. *Nelokal'naia zadacha s integral'nymi usloviiami dlia volnovogo uravneniia* [Nonlocal problem with integral condition for wave equation]. *Vestnik SamGU* [Vestnik of Samara State University], 2006, no. 2(42), pp. 15–27 [in Russian].

[17] Zdeněk P. Bažant, Milan Jirásek. *Nonlocal Integral Formulationof Plasticity And Damage: Survey of Progress. American Society of Civil Engineers. Journal of Engineering Mechanics*, 2002, pp. 1119–1149 [in English].

[18] Pulkina L.S. *Kraevye zadachi dlia giperbolicheskogo uravneniia s nelokal'nymi usloviiami I i II roda* [Boundary value problems for a hyperbolic equation with nonlocal conditions of the I and II kind]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics (Iz.VUZ)], 2012, Vol. 56, no.4, pp. 62–69 [in Russian].

[19] Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. M.: Nauka, 2004 [in Russian].

[20] Korpusov O.M. *Razrushenie v neklassicheskikh volnovykh uravneniiakh* [Blow-up in nonclassical wave equations]. M.: URSS, 2010 [in Russian].

[21] Doronin G.G., Larkin N.A., Souza A.J. A hyperbolic problem with nonlinear second-order boundary damping. *EJDE*, 1998, no. 28, pp. 1–10 [in English].

[22] Pulkina L.S. [Solutions to nonlocal problems of pseudohyperbolic equations]. *EJDE*, 2014, no. 116, pp. 1-9 [in English].

[23] Pul'kina L.S. *Zadacha s dinamicheskim nelokal'nym usloviem dlia psevdogiperbolicheskogo uravneniia* [A problem with dynamic nonlocal condition for pseudohyperbolic equation]. *Izv. vuzov. Matematika* [Russian Mathematics (Iz.VUZ)], 2016, Vol. 60, Issue 9, pp. 38–45 [in Russian]

[24] Ladyzhenskaya O.A. Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki [Boundary value problems of mathematical physics]. M.: Nauka, 1973 [in Russian].

A.B. Beylin, L.S. Pulkina [2]

A PROBLEM ON LONGITUDINAL VIBRATION IN A SHORT BAR WITH DYNAMICAL BOUNDARY CONDITIONS

In this paper, we consider an initial-boundary problem with dynamical nonlocal boundary condition for a pseudohyperbolic fourth-order equation in a rectangular. Dynamical nonlocal boundary condition represents a relation between values of a required solution, its derivatives with respect of spacial variables, second-order derivatives with respect of time-variables and an integral term. This problem may be used as a mathematical model of longitudinal vibration in a thick short bar and illustrates a nonlocal approach to such processes. The main result lies in justification of solvability of this problem. Existence and uniqueness of a generalized solution are proved. The proof is based on the a priori estimates obtained in this paper, Galerkin's procedure and the properties of the Sobolev spaces.

Key words: pseudohyperbolic equation, dynamical boundary conditions, longitudinal vibration, nonlocal conditions, generalized solution.

Статья поступила в редакцию $18/X/2017$.
The article received $18/X/2017$.

[2] *Beylin Alexander Borisovich* (`abeilin@mail.ru`), Department of Automated Machining and Tool Systems, Samara State Technical University, 133, Molodogvardeiskaya str., Samara, 443010, Russian Federation.

Pulkina Ludmila Stepanovna (`louise@samdiff.ru`), Department of Equations of Mathematical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

УДК 517.946 DOI: 10.18287/2541-7525-2017-23-4-19-24

А.И. Кожанов[1]

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛОКАЛЬНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

В статье исследуется вопрос о разрешимости краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений. Одной из особенностей изучаемых уравнений является возможность вырождения при обращении в нуль некоторых из его коэффициентов. Другая особенность изучаемых уравнений заключается в том, что они являются нелокальными, что влечет за собой существенные изменения в постановке задач. В частности, нелокальный характер уравнений приводит и к нелокальным условиям. В работе найдены достаточные условия, обеспечивающие корректность четырех поставленных задач.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, краевые задачи, вырождение, нелокальные условия, существование и единственность решений.

Пусть Ω есть ограниченная область из пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты — бесконечно-дифференцируемой) границей Γ, Q есть цилиндр $\Omega \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$, $S = \Gamma \times (0,T)$ — боковая граница Q, $f(x,t)$, $a_i(x,t)$, $b_i(x,t)$, $i = 0,1$ — заданные функции, определенные в $\overline{Q}$. Далее, пусть $\mathcal{L}_i(t;v)$, $i = 0,1$, есть операторы, действие которых на заданной функции $v(x,t)$ определяется равенствами

$$\mathcal{L}_i(t;v) = \int\limits_\Omega b_i(x,t)v(x,t)\,dx.$$

Целью работы является исследование разрешимости краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений

$$\Delta u + a_0(x,t)\mathcal{L}_0(t;u) + a_1(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathcal{L}_1(t;u)\right) = f(x,t). \tag{1}$$

Особенностями изучаемых уравнений является, во-первых, то, что они являются нелокальными, или нагруженными [1,2], во-вторых же — то, что в этих уравнениях допускается вырождение (вырождение имеет место, если функции $a_1(x,t)$ и $b_1(x,t)$ каким-либо образом обращаются в нуль; более точно характер вырождения будет описан ниже).

Как и для обычных параболических уравнений с меняющимся по переменной t направлением эволюции, вырождение в уравнениях (1) повлечет за собой видоизмененную постановку краевых задач: в некоторых случаях будут задаваться условие при $t = 0$, в других — при $t = T$, в третьих — и при $t = 0$, и при $t = T$, наконец, возможна будет и ситуация, в которой при $t = 0$ и при $t = T$ условий не будет вообще (подобные ситуации для параболических уравнений см., например, в работах [3–5]).

И еще одно замечание. Нелокальный характер уравнений (1) приведет и к нелокальному характеру условий при $t = 0$ и (или) при $t = T$ (точный вид этих условий будет представлен ниже).

Перейдем к содержательной части работы.

Обозначим через H_0 и H_T ортогональные дополнения в пространстве $L_2(\Omega)$ к функциям $b_1(x,0)$ и $b_1(x,T)$ соответственно.

Рассмотрим следующие краевые задачи:

Краевая задача I: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняется граничное условие*

$$u(x,t)|_S = 0, \tag{2}$$

и при этом функция $u(x,0)$ принадлежит множеству H_0.

Краевая задача II: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняется условие (2), и при этом функция $u(x,T)$ принадлежит множеству H_T.*

Кожанов Александр Иванович (kozhanov@math.nsc.ru), Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 630090, Российская Федерация, г. Новосибирск, пр. акад. Коптюгаул, 4.

Краевая задача III: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняется условие (2), и при этом функция $u(x,0)$ принадлежит множеству H_0, функция $u(x,T)$ принадлежит множеству H_T.*

Краевая задача IV: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняется условие (2).*

Всюду ниже под решением уравнения (1) будем подразумевать функцию $u(x,t)$, принадлежащую пространству $L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$ и такую, что $\mathcal{L}_0(t;u)$ принадлежит пространству $L_\infty([0,T])$, $\mathcal{L}_1(t;u)$ принадлежит пространству $W_\infty^1([0,T])$.

Целью настоящей работы является определение достаточных условий, обеспечивающих корректность краевых задач I–IV.

Определим функции $\widetilde{b}_i(x,t)$, $i=0,1$, как решения краевых задач

$$\Delta\widetilde{b}_i(x,t)=b_i(x,t),\quad \widetilde{b}_i(x,t)|_S=0.$$

Далее, введем обозначения:

$$\alpha_0(t)=\int\limits_\Omega a_0(x,t)\widetilde{b}_0(x,t)\,dx,\quad \alpha_1(t)=\int\limits_\Omega a_1(x,t)\widetilde{b}_0(x,t)\,dx,$$

$$\beta_0(t)=\int\limits_\Omega a_0(x,t)\widetilde{b}_1(x,t)\,dx,\quad \beta_1(t)=\int\limits_\Omega a_1(x,t)\widetilde{b}_1(x,t)\,dx,$$

$$f_0(t)=\int\limits_\Omega f(x,t)\widetilde{b}_0(x,t)\,dx,\quad f_1(t)=\int\limits_\Omega f(x,t)\widetilde{b}_1(x,t)\,dx,$$

$$h(t)=\beta_1(t)-\frac{\alpha_1(t)\beta_0(t)}{1+\alpha_0(t)},\quad g(t)=f_1(t)-\frac{\beta_0(t)f_0(t)}{1+\alpha_0(t)}.$$

Разрешимость краевых задач I–IV будет основана на разрешимости краевыз задач для обыкновеного дифференциального уравнения

$$h(t)w'+w=g(t).$$

Приведем соответствующие утверждения.

Утверждение 1. *Пусть выполняются условия*

$$h(t)\in C^2([0,T]),\quad -\frac{2}{3}<h'(t)<2\quad \textit{при}\quad t\in[0,T];\tag{3}$$

$$g(t)\in W_2^2([0,T]);\tag{4}$$

$$h(0)>0,\quad h(T)=0,\quad g(0)=0,\quad g'(T)=0.\tag{5}$$

Тогда краевая задача

$$h(t)w'+w=g(t),\quad w(0)=0,\tag{6}$$

имеет решение $w(t)$, принадлежащее пространству $W_2^2([0,T])$, и это решение единственно.

Утверждение 2. *Пусть выполняются условия (3) и (4), а также условие*

$$h(0)=0,\quad h(T)<0,\quad g(T)=0,\quad g'(0)=0.\tag{7}$$

Тогда краевая задача

$$h(t)w'+w=g(t),\quad w(T)=0,\tag{8}$$

имеет решение $w(t)$, принадлежащее пространству $W_2^2([0,T])$, и это решение единственно.

Утверждение 3. *Пусть выполняются условия (3) и (4), а также условие*

$$h(0)>0,\quad h(T)<0,\quad g(0)=g(T)=0,\quad g'(0)=g'(T)=0.\tag{9}$$

Тогда краевая задача

$$h(t)w'+w=g(t),\quad w(0)=w(T)=0,\tag{10}$$

имеет решение $w(t)$, принадлежащее пространству $W_2^2([0,T])$, и это решение единственно.

Утверждение 4. *Пусть выполняются условия (3) и (4), а также условие*

$$h(0)=0,\quad h(T)=0,\quad g'(0)=g'(T)=0.\tag{11}$$

Тогда уравнение

$$h(t)w'+w=g(t)\tag{12}$$

имеет решение $w(t)$, принадлежащее пространству $W_2^2([0,T])$, и это решение единственно.

Доказательство утверждений 1–4 проводится в целом по одной и той же схеме. Рассматриваются вспомогательные задачи с положительным параметром ε:

$$\varepsilon w'''' + h(t)w' + w = g(t), \quad w(0) = w''(0) = w'(T) = w'''(T) = 0 \tag{13}$$

(к задаче (6));

$$\varepsilon w'''' + h(t)w' + w = g(t), \quad w'(0) = w'''(0) = w(T) = w''(T) = 0 \tag{14}$$

(к задаче (8));

$$\varepsilon w'''' + h(t)w' + w = g(t), \quad w(0) = w'(0) = w(T) = w'(T) = 0 \tag{15}$$

(к задаче (10));

$$\varepsilon w'''' + h(t)w' + w = g(t), \quad w'(0) = w'''(0) = w'(T) = w'''(T) = 0 \tag{16}$$

(к задаче (12)).

Каждая из задач (13)–(16) разрешима (и притом единственным образом) в пространстве $W_2^4([0,T])$, для решений $w(t)$ каждой из этих задач выполняется априорная оценка

$$\varepsilon \int\limits_0^T (w'''')^2\,dt + \|w\|^2_{W_2^2([0,T])} \leqslant M\|g\|^2_{W_2^2([0,T])} \tag{17}$$

с фиксированной постоянной M (для доказательства этой оценки необходимо последовательно умножить дифференциальное уравнение задач (13)–(16) на функции $w(t)$, $-w''(t)$, $w''''(t)$ и проинтегрировать по отрезку $[0,T]$; с помощью условий (3) и (4), а также условий на функцию $g(t)$ из полученных равенств и выводится оценка (17)). Из оценки (17) и из свойства рефлексивности пространства L_2 вытекает, что существуют последовательность $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$ положительных чисел, последовательность $\{w_m(t)\}_{m=1}^\infty$ решений задач (13)–(16) с соответствующим параметром ε_m, а также функция $w(t)$ такие, что при $m \to \infty$ имеют место сходимости $\varepsilon_m \to 0$, $\varepsilon_m w_m''''(t) \to 0$ слабо в пространстве $L_2([0,T])$, $h(t)w_m'(t) + w_m(t) \to h(t)w'(t) + w$ слабо в пространстве $L_2([0,T])$, и при этом предельная функция $w(t)$ будет решением соответствующих задач (6), (8), (10) или (12), и будет принадлежать пространству $W_2^2([0,T])$. Единственность решений задач (6), (8), (10) или (12) в пространстве $W_2^2([0,T])$ очевидным образом вытекает из равенства

$$\int\limits_0^T (h(t)w' + w)w\,dt = \int\limits_0^T gw\,dt$$

и условий соответствующего утверждения.

Замечание. В утверждениях 1–4 рассматривается ситуация, в которой функция $h(t)$ обязательно где-либо на отрезке $[0,T]$ обращается в нуль (и, вообще говоря, может менять знак произвольным образом). Вместе с тем очевидно, что при отсутствии вырождения — т.е. в случае положительной или же отрицательной на отрезке $[0,T]$ функции $h(t)$ — условие разрешимости в пространстве $W_2^2([0,T])$ задач (6) или (8) можно ослабить.

Перейдем к исследованию разрешимости краевых задач I–IV.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$a_i(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad a_{it}(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad a_{itt}(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad b_i(x,t) \in C(\overline{Q}),$$
$$b_{it}(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad b_{itt}(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad i = 0,1; \tag{17}$$

$$f(x,t) \in L_2(Q), \quad f_t(x,t) \in L_2(Q), \quad f_{tt}(x,t) \in L_2(Q); \tag{18}$$

$$h(t) \in C^2([0,T]), \quad 1 + \alpha_0(t) \neq 0, \quad -\frac{2}{3} < h'(t) < 2 \quad \textit{при} \quad t \in [0,T]; \tag{19}$$

$$h(0) > 0, \quad h(T) = 0, \quad g(0) = 0, \quad g'(T) = 0. \tag{20}$$

Тогда краевая задача I имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$, $\mathcal{L}_0(t;u)$ принадлежит пространству $W_2^1([0,T])$, $\mathcal{L}_1(t;u)$ принадлежит пространству $W_2^2([0,T])$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что из условия (17) и из [6] вытекает, что функции $\widetilde{b}_i(x,t)$ корректно определены, и для них будут выполняться включения $\widetilde{b}_i(x,t) \in C^2(\overline{Q})$, $\widetilde{b}_{it}(x,t) \in C^2(\overline{Q})$, $\widetilde{b}_{itt}(x,t) \in C^2(\overline{Q})$, $i = 0,1$. Эти включения и условия (17)–(20) означают, что для функций $h(t)$ и $g(t)$ выполняются все условия Утверждения 1. Следовательно, существует функция $w(t)$, принадлежащая пространству $W_2^2([0,T])$ и являющаяся решением краевой задачи (6). Определим функцию $v(t)$:

$$v(t) = \frac{f_0(t)}{1+\alpha_0(t)} - \frac{\alpha_1(t)}{1+\alpha_0(t)}w'(t).$$

Далее, рассмотрим задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$\Delta u = f(x,t) - a_0(x,t)v(t) - a_1(x,t)w'(t) \tag{22}$$

и такую, что для нее выполняется условие (2). Заметим, что правая часть в уравнении (22) принадлежит пространству $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$. Отсюда и из [7] следует, что функция $u(x,t)$ как решение краевой задачи (22), (2) определена корректно и является элементом пространства $L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$. Имеют место равенства

$$[1+\alpha_0(t)]v(t) + \alpha_1(t)w'(t) = f_0(t),$$
$$\beta_0(t)v(t) + w(t) + \beta_1(t)w'(t) = f_1(t),$$
$$\int\limits_\Omega b_0(x,t)u(x,t)\,dx + \alpha_0(t)v(t) + \alpha_1(t)w'(t) = f_0(t),$$
$$\int\limits_\Omega b_1(x,t)u(x,t)\,dx + \beta_0(t)v(t) + \beta_1(t)w'(t) = f_1(t).$$

Из этих равенств очевидным образом вытекают соотношения

$$v(t) = \int\limits_\Omega b_0(x,t)u(x,t)\,dx, \quad w(t) = \int\limits_\Omega b_1(x,t)u(x,t)\,dx.$$

Эти соотношения, уравнение (22) и включения $u(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$, $v(t) \in W_2^1([0,T])$, $w(t) \in W_2^2([0,T])$ означают, что найденная функция $u(x,t)$ будет искомым решением краевой задачи I.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия (17)–(19), а также условие*

$$h(0) = 0, \quad h(T) < 0, \quad g(T) = 0, \quad g'(0) = 0.$$

Тогда краевая задача II имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$, $\mathcal{L}_0(t;u)$ принадлежит пространству $W_2^1([0,T])$, $\mathcal{L}_1(t;u)$ принадлежит пространству $W_2^2([0,T])$.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия (17)–(19), а также условие*

$$h(0) > 0, \quad h(T) < 0, \quad g(0) = g(T) = g'(0) = g'(T) = 0.$$

Тогда краевая задача III имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$, $\mathcal{L}_0(t;u)$ принадлежит пространству $W_2^1([0,T])$, $\mathcal{L}_1(t;u)$ принадлежит пространству $W_2^2([0,T])$.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия (17)–(19), а также условие*

$$h(0) = 0, \quad h(T) = 0, \quad g'(0) = g'(T) = 0.$$

Тогда краевая задача IV имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))$, $\mathcal{L}_0(t;u)$ принадлежит пространству $W_2^1([0,T])$, $\mathcal{L}_1(t;u)$ принадлежит пространству $W_2^2([0,T])$.

Доказательство теорем 2–4 проводится полностью аналогично доказательству теоремы 1.

Следствие. *При выполнении условий одной из теорем 1–4 решение $u(x,t)$ краевых задач I, II, III или IV будет иметь обобщенную производную $u_t(x,t)$, и эта обобщенная производная будет принадлежать пространству $L_2(0,T;W_2^2(\Omega))$.*

Доказательство. При выполнении условий теорем 1,2,3 или 4 правая часть в уравнении (22) будет иметь обобщенную производную по переменной t, и эта обобщенная производная будет принадлежать пространству $L_2(Q)$. Из общей теории разрешимости в пространствах Соболева краевых задач для эллиптических уравнений [7] и следует требуемое.

Следствие доказано.

В заключение заметим следующее. Краевое условие Дирихле в задачах I–IV можно заменить другим условием — например, условием третьей краевой задачи. Далее, в уравнении (1) оператор Лапласа можно заменить более общим эллиптическим оператором второго или же произвольного четного порядка (в случае оператора порядка выше второго краевое условие (2) должно меняться на естественные краевые условия для эллиптических уравнений высокого порядка). Во всех случаях требования на коэффициенты оператора и коэффициенты граничных условий, нафункции $a_0(x,t)$, $a_1(x,t)$, $b_0(x,t)$ и $b_1(x,t)$, должны быть такими, чтобы краевые задачи, определяющие функции $\widetilde{b}_0(x,t)$ и $\widetilde{b}_1(x,t)$, задачи (6), (8), (10), (12), а также задачи, соответствующие задаче (22), (2), имели бы решения, принадлежащие требуемым классам. И, наконец, последнее. Если в уравнении

$$h(t)w' + w = g(t),$$

функция $h(t)$ не вырождается — т.е. если выполняется условие

$$|h(t)| \geqslant h_0 > 0,$$

то корректной будет либо задача (6), либо задача (8), и при этом условия на функции $h(t)$ и $g(t)$ можно существенно ослабить.

Литература

[1] Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012.

[2] Дженалиев М.Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: Ин-т теоретической и прикладной математики, 1995.

[3] Егоров И.Е., Федоров В.Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Вычисл. Центр СО РАН, 1995.

[4] Efimova, E.S., Egorov, I.E., Kolesova, M.S. Error Estimate to the Stationary Galerkin Method Applied to a Semilinear Parabolic Equation with Alternating Time Direction. Journal of Mathematical Sciences. 2016. № 213(6). P. 838–843.

[5] Егоров И.Е., Федоров В.Е., Тихонова И.М., Ефимова Е.С. Метод Галеркина для неклассических уравнений математической физики // VIII Международная конференция по математическому моделированию. Якутск. 4–8 июля 2017 г. Тезисы докладов. С. 11.

[6] Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.

[7] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

References

[1] Nahushev A.M. *Nagruzhennye uravneniia i ikh primenenie* [Loaded equations and their application]. M.: Nauka, 2012 [in Russian].

[2] Dzhenaliev M.T. *K teorii lineinykh kraevykh zadach dlia nagruzhennykh differentsial'nykh uravnenii* [On the theory of linear boundary value problems for loaded differential equations]. Almaty: In-t teoreticheskoi i prikladnoi matematiki, 1995 [in Russian].

[3] Egorov I.E., Fedorov V.E. *Neklassicheskie uravneniia matematicheskoi fiziki vysokogo poriadka* [Nonclassical equations of high-order mathematical physics]. Novosibirsk: Vychisl. Tsentr SO RAN, 1995 [in Russian].

[4] Efimova E.S., Egorov I.E., Kolesova M.S. Error Estimate to the Stationary Galerkin Method Applied to a Semilinear Parabolic Equation with Alternating Time Direction. *Journal of Mathematical Sciences*, 2016, 213(6), pp. 838–843 [in English].

[5] Egorov I.E., Fedorov V.E., Tihonova I.M., Efimova E.S. *Metod Galerkina dlia neklassicheskikh uravnenii matematicheskoi fiziki* [The Galerkin method for nonclassical equations of mathematical physics]. In: VIII Mezhdunarodnaia konferentsiia po matematicheskomu modelirovaniiu. Iakutsk. 4–8 iiulia 2017 g. Tezisy dokladov [VIII International Conference on mathematical modeling. Yakutsk. July 4-8, 2017. Abstracts of reports], p. 11 [in Russian].

[6] Bitsadze A.V. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. M.: Nauka, 1976 [in Russian].

[7] Ladyzhenskaya O.A., Uraltseva N.N. Lineinye i kvazilineinye uravneniia ellipticheskogo tipa [Linear and quasilinear equations of elliptic type]. M.: Nauka, 1973 [in Russian].

A.I. Kozhanov[2]

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A CLASS OF NONLOCAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DEGENERATION

In this paper, we study the solvability of boundary value problems for integro-differential equation. One of the features of the equations under consideration is the possibility of degeneration when some of coefficients vanish. The other feature is that the equations under consideration are nonlocal. This motivates modifications in statement of problems. Nonlocal nature of equation in particular leads to nonlocal conditions. Sufficient conditions providing well-posedness of four problems are obtained.

Key words: integro-differential equations, boundary problems, degeneration, nonlocal conditions, existence and uniqueness of solutions.

Статья поступила в редакцию 28/*IX*/2017.
The article received 28/*IX*/2017.

[2]*Kozhanov Alexander Ivanovich* (kozhanov@math.nsc.ru), Sobolev Institute of Mathematics, 4, Akad. Koptyug Av., Novosibirsk, 630090, Russian Federation.

УДК 517.98 DOI: 10.18287/2541-7525-2017-23-4-25-32

Д.А. Рогач[1]

ФРЕЙМ ДЛЯ АЛГОРИТМА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ВЕКТОРА-СИГНАЛА

Рассмотрен фрейм конечномерного евклидова пространства, составленный из ортов и их сумм. Представлено операторное доказательство фреймовых свойств построенной системы, для матрицы фреймового оператора найдены собственные значения, которые являются и фреймовыми границами. Доказано свойство альтернативной полноты построенной системы. Именно это свойство является причиной интереса к построенному фрейму, так как в вещественном евклидовом пространстве оно эквивалентно инъективности оператора измерений, который отображает вектор-сигнал в последовательность модулей измерений. Исследуемый фрейм лежит в основе быстрого алгоритма восстановления сигнала, предложенного М. Штрауссом. Найден оператор, который переводит построенный фрейм в ближайший к нему фрейм Парсеваля — Стеклова.

Ключевые слова: фрейм, фрейм Парсеваля — Стеклова, оператор анализа, оператор синтеза, фреймовый оператор, собственное значение, собственный вектор, альтернативная полнота.

1. Фреймы конечномерных пространств

1.1. Определение фрейма

Пусть $\mathbb{H}^N$ — конечномерное пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и ортонормированным базисом $\{e_n\}_{n=1}^N$. Каждый вектор-сигнал x единственным образом представим суммой

$$x = \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n\rangle e_n,$$

где $\langle x, e_n\rangle$ — координаты вектора в выбранном базисе. Физические приборы, которые применяются в процессе обработки сигналов, настроены на регистрацию положительных чисел, хотя точными значениями координат могут быть как отрицательные числа, так и комплексные. Для решения задачи о восстановлении сигнала по модулям измерений важно подобрать такую систему "измерительных векторов" $F = \{f_1, ..., f_M\}, N < M$, чтобы максимально точно восстановить сигнал x по "измерениям"$|\langle x, f_m\rangle|,\ m = 1, ..., M$.

Для решения этой задачи полезными оказываются фреймы конечномерных пространств.

Определение 1.1. Набор элементов $F = \{f_m,\ m = 1, ..., M\} \subset \mathbb{H}^N$ называется фреймом для пространства $\mathbb{H}^N$, если существуют положительные числа A и B такие, что для любого $x \in \mathbb{H}^N$

$$A\|x\|^2 \leqslant \sum_{m=1}^{M} |\langle x, f_m\rangle|^2 \leqslant B\|x\|^2 \qquad (1.1)$$

Числа A, B называются нижней и верхней границами фрейма соответственно. Они определены неоднозначно [2], поэтому естественно возникает понятие оптимальных нижней и верхней границы фрейма.

Правое неравенство в (1.1) выполняется в силу неравенства Буняковского-Коши-Шварца:

$$\sum_{m=1}^{M} |\langle x, f_m\rangle|^2 \leqslant \left(\sum_{m=1}^{M} \|f_m\|^2\right)\|x\|^2 \qquad (1.2)$$

для всех x из $\mathbb{H}^N$, верхняя граница при этом (обычно далекая от оптимальной) равна $\sum\limits_{m=1}^{M} \|f_m\|^2$.

Рогач Дарья Александровна (ida@ssau.ru), кафедра теории вероятностей и математической статистики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Для выполнения нижнего неравенства в (1.1) необходима полнота системы $\{f_m\}_{m=1}^M$. Докажем, что $\operatorname{span}\left(\{f_m\}_{m=1}^M\right)^\perp = \{0\}$. Пусть x — произвольный элемент из $\operatorname{span}\left(\{f_k\}_{k=1}^N\right)^\perp$. Тогда $< x, f_m >= 0$ для всех $m = 1, \dots, M$. Из (1.1) получаем, что $x = 0$. Таким образом, доказана полнота системы $\{f_m\}_{m=1}^M$.

Если оптимальная верхняя и нижняя границы совпадают, т. е. $A = B$, то фрейм называется *жестким*. Для жесткого фрейма соотношение (1.1) переходит в равенство

$$\sum_{m=1}^{M} |\langle x, f_m\rangle|^2 = A\|x\|^2, \tag{1.3}$$

которое при $A = 1$ принимает форму равенства Парсеваля — Стеклова:

$$\sum_{m=1}^{M} |\langle x, f_m\rangle|^2 = \|x\|^2. \tag{1.4}$$

Фреймы, для которых выполнено (1.4), называют фреймами Парсеваля -Стеклова. Эти фреймы оказываются наиболее подходящими для восстановления сигнала, так как для них, и только для них, справедливо равенство $x = \sum\limits_{m=1}^{M} \langle x, f_m\rangle f_m$, что показано в работе [2].

1.2. Фреймовый оператор

Определение 1.2. Фреймовый оператор — положительный, самосопряженный обратимый оператор

$$S : H^N \to H^N, S = V^*V,$$

где V — оператор анализа

$$V : x \in H^N \to \{\langle x, f_m\rangle\}_{m=1}^M \in \mathbb{C}^M.$$

V^* — оператор синтеза, сопряженный оператор к V, который удовлетворяет:

$$V^* : \{z_m\}_{m=1}^M \in \mathbb{C}^M \to \sum_{m=1}^{M} z_m f_m \in H^N.$$

Следовательно, (1.1) можно переписать следующим образом:

$$A\langle x, x\rangle \leqslant \langle Sx, x\rangle \leqslant B\langle x, x\rangle.$$

1.3. Восстановление без фаз

Введем понятие системы, которая позволяет по модулям измерений $|\{x, f_m\}|_{m=1}^M$ восстановить сигнал. На H^N вводится отношение эквивалентности $\sim$: $x \sim y$ тогда и только тогда, когда существует постоянная z, $|z| = 1$, такая что $y = zx$. Пусть $\hat{H} = H^N/\sim$ - фактор-пространство. Таким образом, класс эквивалентности имеет вид $\hat{x} = \{\pm x\}$.

Рассмотрим следующее нелинейное отображение

$$\beta : \hat{H} \to \mathbb{R}^M, (\beta(\hat{x}))_m = |\langle x, f_m\rangle|^2, 1 \leqslant m \leqslant M,$$

корректно определено на классах $\hat{x}$, поскольку из $x \sim y$ следует $|\langle x, f_m\rangle|^2 = |\langle y, f_m\rangle|^2$.

Определение 1.3. Будем говорить, что фрейм $F = \{f_1, ..., f_M\}$ восстанавливает без фаз (ВБФ-фрейм), если нелинейное отображение β инъективно.

Заметим, что любой сигнал $x \in H^N$ однозначно (с точностью до множителя) определяется модулями фреймовых коэффициентов с точностью до фазового множителя тогда и только тогда, когда F является ВБФ-фреймом.

Для определения, является ли система ВБФ, будем использовать свойство *альтернативной полноты*, так как данное свойство эквивалентно ВБФ в $\mathbb{R}^N$, что будет доказано ниже.

Определение 1.4. Набор векторов $F = \{f_m\}_{m=1}^M$ в $\mathbb{R}^N$ альтернативно полон (АП), если для любого $P \subseteq \{1, \dots, M\}$ либо $\{f_m\}_{m\in P}$, либо $\{f_m\}_{m\in P^c}$ полно в $\mathbb{R}^N$ (P^c —дополнение к множеству P).

Теорема 1.1. [3] Фрейм $\{f_m\}_{m=1}^M$ в $\mathbb{R}^N$ является ВБФ-системой тогда и только тогда, когда он обладает свойством альтернативной полноты.

Доказательство: 1) Дана система векторов $F = \{f_m\}_{m=1}^M$ в $\mathbb{R}^N$. F- фрейм. Предположим, что F не обладает свойством альтернативной полноты. Следовательно, найдется $P \subseteq \{1, \dots, M\}$ такое, что ни $\{f_m\}_{m\in P}$, ни $\{f_m\}_{m\in P^c}$ не полно в $\mathbb{R}^N$.

Возьмем ненулевые векторы $u, v \in \mathbb{R}^N$ так, что $\langle u, f_m\rangle = 0$ для всех $m \in P$ и $\langle v, f_m\rangle = 0$ для всех $m \in P^c$.

Для каждого m получим

$$|\langle u+v, f_m\rangle|^2 = |\langle u, f_m\rangle|^2 + 2\langle u, f_m\rangle\langle v, f_m\rangle + |\langle v, f_m\rangle|^2 = |\langle u, f_m\rangle|^2 + |\langle v, f_m\rangle|^2.$$

$$|\langle u-v, f_m\rangle|^2 = |\langle u, f_m\rangle|^2 - 2\langle u, f_m\rangle\langle v, f_m\rangle + |\langle v, f_m\rangle|^2 = |\langle u, f_m\rangle|^2 + |\langle v, f_m\rangle|^2.$$

Отсюда следует, что $|\langle u+v, f_m\rangle|^2 = |\langle u-v, f_m\rangle|^2$ для каждого m, и для отображения $\mathcal{A}$ справедливо

$$\mathcal{A}(u+v) = \mathcal{A}(u-v).$$

По предположению u и v не нулевые, значит,

$$u + v \neq \pm(u-v).$$

Таким образом, отображение $\mathcal{A}$ - не инъективно.

2) F — АП. Предположим, что $\mathcal{A}$ не инъективно. Это означает, что существуют векторы $x, y \in \mathbb{R}^N$ такие, что $x \neq \pm y$ и $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(y)$.

Обозначим $P := \{n : \langle x, f_m\rangle = -\langle y, f_m\rangle\}$. Имеем: $\langle x+y, f_m\rangle = 0$ для каждого $m \in P$, и $\langle x-y, f_m\rangle = 0$ для каждого $m \in P^c$.

По предположению, $x + y \neq 0$ и $x - y \neq 0$. Таким образом, и $\{f_m\}_{m\in P}$, и $\{f_m\}_{m\in P^c}$ не полны в $\mathbb{R}^N$. Что противоречит определению альтернативной полноты. Теорема доказана.

Теорема 1.2. [2] Для произвольного фрейма $\{f_m\}_{m=1}^M \subset \mathbb{H}^N$ фрейм $\{S^{-1/2}f_m\}_{m=1}^M$ является фреймом Парсеваля — Стеклова.

Доказательство: Для каждого $x \in \mathbb{H}^N$ верно представление

$$x = S^{-1/2}SS^{-1/2}x = \sum_{m=1}^{M} < S^{-1/2}x, f_m > S^{-1/2}f_m = \sum_{m=1}^{M} < x, S^{-1/2}f_m > S^{-1/2}f_m.$$

Таким образом, получаем, что $\{S^{-1/2}f_m\}_{m=1}^M$ является фреймом Парсеваля — Стеклова.

В следующей теореме показана связь между собственными значениями фреймового оператора и границами фрейма.

Теорема 1.3.[3] Пусть $\{f_m\}_{m=1}^M$ —фрейм для $\mathbb{H}^N$ с фреймовым оператором S, собственные значения которого суть $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_N$. Тогда λ_1 совпадает с оптимальной верхней фреймовой границей, а λ_N — с оптимальной нижней фреймовой границей.

Доказательство Пусть $\{g_n\}_{n=1}^N$ - нормированные собственные векторы фреймового оператора и соответствующими собственными значениями, выписанными в порядке убывания. Для произвольного $x \in \mathbb{H}^N$ имеем $x = \sum\limits_{n=1}^{N} \langle x, g_n\rangle g_n$, отсюда

$$Sx = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, g_n\rangle g_n.$$

Далее, получаем

$$\sum_{m=1}^{M} |\langle x, f_m\rangle|^2 = \langle Sx, x\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, g_n\rangle g_n, \sum_{n=1}^{N} \langle x, g_n\rangle g_n \right\rangle =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \lambda_n |\langle x, g_n\rangle|^2 \leqslant \lambda_1 \sum_{n=1}^{N} |\langle x, g_n\rangle|^2 = \lambda_1 \|x\|^2.$$

Таким образом, $B_{op} \leqslant \lambda_1$, здесь B_{op} обозначает оптимальную верхнюю фреймовую границу фрейма $\{f_m\}_{m=1}^M$. Равенство $B_{op} = \lambda_1$ оказывается следствием следующих равенств:

$$\sum_{m=1}^{M} |\langle g_1, f_m\rangle|^2 = \langle Sg_1, g_1\rangle = \langle \lambda_1 g_1, g_1\rangle = \lambda_1.$$

Аналогичные рассуждения проводятся в отношении нижней границы.

2. Фрейм из ортов

Рассмотрим, следуя [1], систему векторов $F = \{e_1, e_2, ..., e_N\} \cup \{e_i + e_j\}_{1\leqslant i<j\leqslant N}$, где $\{e_1, e_2, ..., e_N\}$ - ортонормированный базис в $\mathbb{R}^N$.

Фрейм F состоит из M векторов.

$$M = N + C_N^2 = N + \frac{N(N-1)}{2} = \frac{N(N+1)}{2}$$

Вычислим фреймовый оператор для нашей системы, для это сначала запишем V - оператор синтеза и V^*- оператор анализа.

Столбцы матрицы оператора синтеза являются координатами фреймовых векторов $V = F$. Матрица оператора анализа $V^* = F^T$, где F^T —транспонированная матрица F.

$$S = V^*V = \begin{pmatrix} N & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & N & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & N & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & N \end{pmatrix}$$

Мы получаем матрицу, все диагональные элементы которой равны N, а на остальных местах стоят единицы.

Корнями характеристического уравнения $|S - \lambda E| = 0$ будут $\lambda_1 = N - 1$ кратности $N - 1$ и $\lambda_2 = 2N - 1$ кратности равной 1. Для λ_1 собственные вектора, найденные из уравнения $(S - \lambda_1 E)\bar{x} = \bar{0}$ будут выражаться из соотношения $x_1 = -x_2 - ... - x_N$. Для λ_2: $x_1 = x_2 = ... = x_N$.

Так как полученная матрица является самосопряженной и обратимой, можно сказать [3], что выбранная система векторов F — фрейм. Притом $\lambda_1 = N - 1$ —оптимальная нижняя граница, а $\lambda_2 = 2N - 1$ — верхняя.

Выясним, является ли F — ВБФ-фреймом. Для определения, является ли F ВБФ, будем использовать свойство альтернативной полноты, так как оно эквивалентно ВБФ в $\mathbb{R}^N$, что было доказано выше.

Рассмотрим всевозможные разбиения F. Так как эта системапредставляет собой набор векторов ортонормированного базиса и линейные комбинации этих векторов, то легко увидеть, что при любом разбиении F получится хотя бы одна система векторов, которая будет полна в $\mathbb{R}^N$.

Распишем подробно операторы синтеза, анализа и фреймовый оператор в пространстве $\mathbb{R}^4$.

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad V^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения λ_i и собственные вектора v_i, $i = 1, ..., 4$. Для этого найдем значения $|S - \lambda E| = 0$.

$$|S - \lambda E| = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^4 - 16\lambda^3 + 90\lambda^2 - 216\lambda + 189 =$$

$$= (\lambda - 3)^3(\lambda - 7) = 0.$$

Корнями этого выражения будут $\lambda_1 = 3$ кратности 3, $\lambda_2 = 7$. Подставим найденные значения в характеристическое уравнение и найдем собственные вектора.

1) $\lambda_1 = 3$

$$(S - 3E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из уравнения $(S - 3E)x = \bar{0}$ получаем соотношение $x_1 = -x_2 - x_3 - x_4$. Возьмем $x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = 0$, тогда $x_1 = -1$. Первый собственный вектор примет значение $v_1 = (1, -1, 0, 0)^T$. Теперь возьмем $x_3 = 1$, $x_2 = x_4 = 0$, тогда $x_1 = -1$ и $v_2 = (1, 0, -1, 0)^T$. Аналогично и для оставшегося случая, получим вектор $v_3 = (1, 0, 0, -1)^T$.

2) $\lambda_2 = 7$

$$(S-7E) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем сиситему

$$\{ x_1 = x_4; x_2 = x_4; x_3 = x_4.$$

Возьмем $x_4 = 1$, тогда $v_4 = (1,1,1,1)^T$.

Обозначим матрицу, столбцы которой найденные собственные вектора, T. В случае $\mathbb{R}^4$

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из первой части мы знаем, что из любого фрейма можно получить фрейм Парсеваля — Стектова. Для этого нужно найти оператор $S^{-1/2}$.

$$S = TDT^{-1}, \text{где } D \text{ —диагональная матрица для матрицы } S.$$

$$S^{1/2} = TD^{1/2}T^{-1}$$

Вычислим в $\mathbb{R}^4$:

$$S^{1/2} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3\sqrt{3}+\sqrt{7} & -\sqrt{3}+\sqrt{7} & -\sqrt{3}+\sqrt{7} & -\sqrt{3}+\sqrt{7} \\ -\sqrt{3}+\sqrt{7} & 3\sqrt{3}+\sqrt{7} & -\sqrt{3}+\sqrt{7} & -\sqrt{3}+\sqrt{7} \\ -\sqrt{3}+\sqrt{7} & -\sqrt{3}+\sqrt{7} & 3\sqrt{3}+\sqrt{7} & -\sqrt{3}+\sqrt{7} \\ -\sqrt{3}+\sqrt{7} & -\sqrt{3}+\sqrt{7} & -\sqrt{3}+\sqrt{7} & 3\sqrt{3}+\sqrt{7} \end{pmatrix}$$

Для того чтобы получить искомый $S^{-1/2}$, нужно лишь найти обрытный оператор от полученного выше $S^{1/2}$.

$$S^{-1/2} = \frac{1}{84} \begin{pmatrix} 21\sqrt{3}+3\sqrt{7} & -7\sqrt{3}+3\sqrt{7} & -7\sqrt{3}+3\sqrt{7} & -7\sqrt{3}+3\sqrt{7} \\ -7\sqrt{3}+3\sqrt{7} & 21\sqrt{3}+3\sqrt{7} & -7\sqrt{3}+3\sqrt{7} & -7\sqrt{3}+3\sqrt{7} \\ -7\sqrt{3}+3\sqrt{7} & -7\sqrt{3}+3\sqrt{7} & 21\sqrt{3}+3\sqrt{7} & -7\sqrt{3}+3\sqrt{7} \\ -7\sqrt{3}+3\sqrt{7} & -7\sqrt{3}+3\sqrt{7} & -7\sqrt{3}+3\sqrt{7} & 21\sqrt{3}+3\sqrt{7} \end{pmatrix}$$

Теперь подействуем найденным оператором на состему векторов F. Получим фрейм Парсеваля — Стеклова, который представлен в виде матрицы размерности M на N.

2.1. Алгоритм восстановления сигнала

Проанализировав выбранную систему векторов, перейдем к алгоритму восстановления сигнала, в соотверствии с [1]. Как указано в [1] идея алгоритма принадлежит М.Штрауссу.

Возьмем систему $F = \{e_1, e_2, ..., e_N\} \cup \{e_i + e_j\}_{1 \leqslant i < j \leqslant N}$, которая, как доказано выше, является ВБФ-фреймом.

Обозначим измерения, как

$$< x, e_n >= a_n, \;\; n = 1, ..., N$$

$$< x, e_i + e_j >= a_l, \;\; 1 \leqslant i < j \leqslant N, l = N+1, ..., M.$$

Но на практике, нам известны лишь модули измерений. Пусть a_i - первый ненулевой коэффициент, и пусть $b_j = a_j / a_i$, где $i \neq j$, $i, j = 1, ..., M$.

Представим сигнал в виде суммы и распишем её, используя введённые ранее обозначения:

$$x = \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle e_n = a_1 f_1 + a_2 f_2 + ... + a_N f_N. \tag{2.1}$$

$$\frac{x}{a_i} = \frac{a_1}{a_i} f_1 + ... + f_i + ... + \frac{a_N}{a_i} f_N = b_1 f_1 + ... + f_i + ... b_N f_N. \tag{2.2}$$

Для b_j справедлива формула:

$$b_j = \frac{|1+b_j|^2 - |b_j|^2 - 1}{2},$$

где

$$|b_j| = |\frac{a_j}{a_i}| = \frac{|a_j|}{|a_i|},$$

$$|1+b_j| = |1+\frac{a_j}{a_i}| = |\frac{a_i+a_j}{a_i}| = \frac{|< x, e_i > + < x, e_j >|}{|a_i|} =$$

$$= \frac{|< x, e_i + e_j >|}{|a_i|} = \frac{|a_l|}{|a_i|}.$$

Вычислим нужные значения b_j, и подставим значения в (2). Получим, что

$$x = |a_i|(b_1 e_1 + ... + e_i + ... b_N e_N).$$

Для наглядности метода представим примеры восстановления сигнала в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^4$.
Пример 2.1. В пространстве $\mathbb{R}^3$ даны измерения

$$|a_1| = |\langle x, e_1\rangle| = 3; |a_2| = |\langle x, e_2\rangle| = \sqrt{3}; |a_3| = |\langle x, e_3\rangle| = 2;$$

$$|a_4| = |\langle x, e_4\rangle| = 3+\sqrt{3}; |a_5| = |\langle x, e_5\rangle| = 5; |a_6| = |\langle x, e_6\rangle| = 2+\sqrt{3}$$

Фрейм представим векторами

$$e_1 = \{1,0,0\}; e_2 = \{0,1,0\}; e_3 = \{0,0,1\}; e_4 = \{1,1,0\};$$

$$e_5 = \{1,0,1\}; e_6 = \{0,1,1\}.$$

Мы знаем, что исходный сигнал можно представить в следующем виде

$$x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3,$$

Возьмем a_1, так как $a_1 \neq 0$:

$$\frac{x}{a_1} = e_1 + \frac{a_2}{a_1} e_2 + \frac{a_3}{a_1} e_3 = e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 \tag{2.3}$$

Вычислим

$$b_2 = \frac{\frac{|a_4|^2}{|a_1|^2} - \frac{|a_2|^2}{|a_1|^2} - 1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$b_3 = \frac{\frac{|a_5|^2}{|a_1|^2} - \frac{|a_3|^2}{|a_1|^2} - 1}{2} = \frac{2}{3}$$

Подставляем найденные значения в уравнение (2.3).

$$x = |a_1|(e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) = \pm\{3, -\sqrt{3}, 2\}$$

Получаем, что исходный сигнал принимал одно из полученных значений $x = \pm\{3, -\sqrt{3}, 2\}$.
Пример 2.2 Даны измерения:

$$|a_1| = |\langle x, e_1\rangle| = 1; |a_2| = |\langle x, e_2\rangle| = 0; |a_3| = |\langle x, e_3\rangle| = 3; |a_4| = |\langle x, e_4\rangle| = 1;$$

$$|a_5| = |\langle x, e_1+e_2\rangle| = 1; |a_6| = |\langle x, e_1+e_3\rangle| = 4; |a_7| = |\langle x, e_1+e_4\rangle| = 2;$$

$$|a_8| = |\langle x, e_2+e_3\rangle| = 1; |a_8| = |\langle x, e_2+e_4\rangle| = 1; |a_1 0| = |\langle x, e_3+e_4\rangle| = 4.$$

Вычислим коэффициенты b_2, b_3, b_4.

$$b_2 = \frac{|1-b_2|^2 - |b_2|^2 - 1}{2} = \frac{\frac{|a_5|^2}{|a_1|^2} - \frac{|a_2|^2}{|a_1|^2} - 1}{2} = 0$$

$$b_3 = \frac{\frac{|a_6|^2}{|a_1|^2} - \frac{|a_3|^2}{|a_1|^2} - 1}{2} = 3$$

$$b_4 = \frac{\frac{|a_7|^2}{|a_1|^2} - \frac{|a_4|^2}{|a_1|^2} - 1}{2} = 1$$

Получаем исходный сигнал: $x = \pm\{1, 0, 3, 1\}$.

Литература

[1] Fast algorithms for signal reconstruction without phase / R. Balan [et al.]. Wavelets XII. 2007. Vol. 6701 of Proc. SPIE. P. 670111920–670111932.

[2] Новиков С.Я., Лихобабенко М.А. Фреймы конечномерных пространств. Самара: Самарский госуниверситет, 2013. С. 5–24

[3] Новиков С.Я. Фреймы конечномерных пространств и дискретная фазовая проблема. Самара: Самарский госуниверситет, 2016. С. 25–35

[4] Фрейзер М. Введение в вэйвлеты в свете линейной алгебры. М.: БИНОМ, 2008. 487 с.

[5] Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz bases. Boston: Birkhäuser. 2003. 440 p.

[6] Saving phase: Injectivity and stability / A. Bandeira [et al.]. arXiv: math. 1302.4618v1.

[7] Balan R., Casazza P., Edidin D. On signal reconstruction without phase. Appl. Comput. Harmon. Anal. 2006. № 20:3. P. 345–356.

[8] Dustin G.M. SOFT 2016: Summer of Frame Theory.
URL: http://dustingmixon.wordpress.com/2016/05/03/soft-2016-summer-of-frame-theory (15.06.2016).

References

[1] R. Balan, B.G. Bodmann, P.G. Casazza, D. Edidin *Fast algorithms for signal reconstruction without phase. Wavelets XII*, 2007, Volume 6701 of Proc. SPIE, pp. 670111920–670111932 [in English].

[2] Novikov S.Ya., Likhobabenko M.A. *Freimy konechnomernykh prostranstv* [Frames of finite dimensional spaces]. Samara: Samarskii gosuniversitet, 2013, pp. 5-24 [in Russian].

[3] Novikov S.Ya. *Freimy konechnomernykh prostranstv i diskretnaia fazovaia problema* [Frames of finite dimensional spaces and discrete phase problem]. Samara: Samarskii gosuniversitet, 2016, pp. 25-35 [in Russian].

[4] Frazier M. *Vvedenie v veivlety v svete lineinoi algebry* [An Introduction to Wavelets Through Linear Algebra]. M.: BINOM, 2008, 487 p. [in Russian].

[5] Christensen O. *An Introduction to Frames and Riesz bases.* Boston: Birkhäuser, 2003, 440 pp. [in English]

[6] Bandeira A.S., Cahill J., Mixon G., Nelson A.A. *Saving phase: Injectivity and stability.* arXiv: math. 1302.4618v1. [in English]

[7] Balan R., Casazza P., Edidin D. *On signal reconstruction without phase. Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 2006, no. 20:3, pp. 345–356 [in English].

[8] *Dustin G. Mixon* SOFT 2016: Summer of Frame Theory. Retrieved from: http://dustingmixon.wordpress.com/2016/05/03/soft-2016-summer-of-frame-theory (accessed 15.06.2016) [in English].

D.A. Rogach[2]

THE FRAME FOR ALGORITHM SIGNAL RECOVERY

A frame of a finite-dimensional Euclidean space composed of vectors and their sums is considered. The operator proof of frame properties of the constructed system is presented, the eigenvalues for the matrix of the frame operator are found, which are also frame boundaries. The property of alternative completeness of the constructed system is proved. This property is the cause of interest in the constructed frame, since in real Euclidean space it is equivalent to injectivity of the measurement operator, which maps the signal vector into a sequence of measurement modules. The investigated frame underlies the fast algorithm of signal reconstruction, proposed by M. Shapiro and stated in [1]. An operator that translates the constructed frame into the Parseval-Steklov frame closest to it, is found.

Key words: frame, Parseval-Steklov frame, analysis operator, synthesis operator, frame operator, eigenvalent, eigenvector, alternative completeness.

Статья поступила в редакцию $11/XI/2017$.
The article received $11/XI/2017$.

[2] *Rogach Daria Alexandrovna* (`ida@ssau.ru`), Department of Probability Theory and Mathematical Statistics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

УДК 517.987 DOI: 10.18287/2541-7525-2017-23-4-33-39

Т.А. Срибная[1]

ТЕОРЕМА БРУКСА-ДЖЕВЕТТА О РАВНОМЕРНОЙ ИСЧЕРПЫВАЕМОСТИ НА НЕ-СИГМА-ПОЛНОМ КЛАССЕ МНОЖЕСТВ

Для последовательности исчерпывающих композиционно-треугольных функций множества, заданных на не-сигма-полном классе множеств, более общем, чем кольцо множеств, доказана теорема Брукса-Джеветта о равномерной исчерпываемости. В качестве следствия получен аналог теоремы Брукса-Джеветта для функций, заданных на сигма-суммируемом классе множеств. Показано, что если кроме свойства композиционной треугольности функции множества обладают свойством композиционной полуаддитивности и являются непрерывными сверху в нуле, то для них справедлив аналог теоремы Никодима о равностепенной слабой непрерывности. Получены соответствующие результаты для семейства квазилипшицевых функций множества.

Ключевые слова: композиционно-треугольные функции множества, композиционно-полуаддитивные функции множества, не-сигма-полный класс множеств, мультипликативный класс множеств, исчерпываемость, непрерывность сверху в нуле, равномерная исчерпываемость, равностепенная слабая непрерывность.

Введение

Теорема Брукса-Джеветта, являющаяся аддитивной версией теоремы Никодима о равностепенной слабой непрерывности ([1], теорема IV.10.6), утверждает, что, если $\{\varphi_n\}$ — последовательность аддитивных банаховозначных функций, определенных на σ- алгебре Σ, причем для каждого множества $E \in \Sigma$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(E) = \varphi_0(E)$ и функции множества $\varphi_n,\ n = 0, 1, 2...$, исчерпывающие на Σ, то функции множества последовательности $\{\varphi_n\},\ n = 0, 1, 2...$, равномерно исчерпывающие на Σ [2].

В работах [3; 4] теорема Брукса-Джеветта доказана для неаддитивных функций, заданных на σ-кольце множеств ([3],теорема 1) и на σ- суммируемом классе множеств ([4],теорема 5.1.1).

В работах [5–8] теоремы Брукса-Джеветта и Никодима распространены на случай аддитивных функций, заданных на не σ- полном классе множеств. При этом наиболее общим из не σ- полных классов множеств, рассматриваемых в [5–8], является кольцо с f_1- свойством.

В данной статье теорема Брукса-Джеветта доказана для семейства композиционно-треугольных функций, область определения которых является не σ- полным классом множеств, более общим, чем кольцо с f_1- свойством. В качестве следствия получено обобщение теоремы Никодима о равностепенной слабой непрерывности семейства неаддитивных функций множества, заданных на не σ- полном классе множеств.

1. Обозначения и основные определения. Примеры

Пусть T — некоторое множество, Σ- класс подмножеств множества T, $\varnothing \in \Sigma$. Пусть G — абелева группа, $|\cdot|$ — функция на G, обладающая свойствами полунормы: $0 \leqslant |x| < +\infty$, $|\theta| = 0$, $|-x| = |x|$, $|x + y| \leqslant |x| + |y|,\ x, y \in G$.

Всюду в дальнейшем $\Phi = \{\varphi\}$ — некоторое семейство функций множества, $\varphi:\ \Sigma \to (G, |\cdot|),\ \varphi(\varnothing) = \theta$.

Для любой функции $\varphi \in \Phi$ положим

$$\overline{\varphi}(E) = \sup\{|\varphi(F)|, F \subset E, F \in \Sigma\},\ \ E \subset T.$$

Последовательность попарно непересекающихся множеств называют спектром, убывающую последовательность множеств с пустым пересечением называют локализатором.

Срибная Татьяна Аркадьевна (sribnayata@mail.ru), кафедра функционального анализа и теории функций, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Говорят, что функция множества $\varphi \in \Phi$

— исчерпывающая на Σ, если для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$ справедливо

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(E_n) = \theta, \tag{1.1}$$

— непрерывна сверху в нуле на Σ, если для любого локализатора $\{E_n\} \subset \Sigma$ выполнено соотношение (1.1).

Говорят, что функции множества семейства $\Phi = \{\varphi_\alpha\}$ обладают свойством равномерной исчерпываемости на Σ, если для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$ соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_\alpha(E_n) = \theta \tag{1.2}$$

выполняется равномерно относительно $\varphi_\alpha \in \Phi$.

Говорят, что функции множества семейства $\Phi = \{\varphi_\alpha\}$ обладают свойством равностепенной слабой непрерывности на Σ, если для любого локализатора $\{E_n\} \subset \Sigma$ соотношение (1.2) выполняется равномерно относительно $\varphi_\alpha \in \Phi$.

Пусть $\mathcal{F} = \{f\}$, $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(0) = 0$, — класс непрерывных, строго возрастающих функций, удовлетворяющих условию $f(x) \geqslant x$, $x \in \mathbb{R}^+$.

Если $\varphi \in \Phi$, $f \in \mathcal{F}$, то всюду в дальнейшем будем писать $f\varphi(E)$ вместо $f(|\varphi(E)|)$, $E \in \Sigma$.

Определение 1. Функцию множества $\varphi \in \Phi$ называют квазилипшицевой, если существует такое число $N \geqslant 1$, что для любых непересекающихся множеств $A, B \in \Sigma$, с условием $A \cup B \in \Sigma$, выполняется неравенство $|\varphi(A \cup B) - \varphi(A)| \leqslant N|\varphi(B)|$.

Примеры квазилипшицевых функций множества приведены в работе [9].

Определение 2. Будем говорить, что функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ f- композиционно-треугольные (или, просто, композиционно-треугольные), если существует функция $f \in \mathcal{F}$ такая, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ и для любых непересекающихся множеств $A, B \in \Sigma$, с условием $A \cup B \in \Sigma$, справедливо

$$|\varphi(A)| \leqslant f\varphi(A \cup B) + f\varphi(B).$$

Будем говорить, что функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ f- композиционно-полуаддитивные (или, просто, композиционно-полуаддитивные), если существует функция $f \in \mathcal{F}$ такая, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ и для любых непересекающихся множеств $A, B \in \Sigma$, с условием $A \cup B \in \Sigma$, справедливо

$$|\varphi(A \cup B)| \leqslant f\varphi(A) + f\varphi(B).$$

Пример 1. Если функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ квазилипшицевые, то они f- композиционно-треугольные и f- композиционно-полуаддитивные.

Пример 2. Пусть $\Phi = \{\varphi\}$ — семейство аддитивных функций множества. Для любого множества $E \in \Sigma$ положим

$$\mu(E) = 2|\varphi(E)|^2 + 3|\varphi(E)|^3.$$

Тогда функции множества семейства $M = \{\mu\}$, $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$ и функция $f \in \mathcal{F}$, $f(x) = 4x$, удовлетворяют условиям определения 2.

2. Классы множеств с f_1- свойством

Говорят, что класс множеств Σ обладает f_1- свойством, если для любых спектров $\{E_n\}$ и $\{F_n\}$ из Σ, таких что $E_n \cap F_k = \varnothing$ при всех $n, k \in \mathbb{N}$, существует такое бесконечное подмножество $P \subset \mathbb{N}$ и такое множество $F \in \Sigma$, что $F_k \subset F$ при всех $k \in P$, $F \cap E_n = F \cap F_k = \varnothing$ при $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N} \setminus P$ [7].

Из этого определения следует, что σ- алгебра множеств обладает f_1- свойством. В работе [10] приведен пример алгебры, обладающей f_1- свойством, но не являющейся сигма-полной. В частности, там показано, что если $2^{\mathbb{N}}$ — класс всевозможных подмножеств множества $\mathbb{N}$; $\triangle$ — идеал, образованный всевозможными конечными подмножествами множества $\mathbb{N}$, то алгебра открыто-замкнутых множеств реализующего стоуновского компакта булевой алгебры $\hat{\mathcal{A}} = 2^{\mathbb{N}}/\triangle$ является не-сигма-полной алгеброй множеств, обладающей f_1- свойством.

Пусть Σ — непустой класс множеств, замкнутый относительно образования разности множеств. Тогда Σ будет замкнут относительно образования пересечения конечного числа множеств. В связи с этим такой класс множеств называют мультипликативным классом множеств, или, кратко, m- классом.

Пример 3. Пусть E — некоторое бесконечное множество, F — счетное подмножество множества E. Рассмотрим класс множеств $\mathcal{P}$, состоящий из пустого множества и всех конечных и счетных подмножеств множества F, за исключением самого множества F. Тогда класс множеств $\mathcal{P}$ замкнут относительно образования разности, обладает f_1- свойством, но не является кольцом множеств и, тем более, сигма-полным классом множеств.

В дальнейшем потребуется следующее предложение, доказанное в работе [11].

Предложение 1. Если Σ — m- класс с f_1- свойством, $\varphi_n : \Sigma \to (G, |\cdot|)$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность исчерпывающих функций множества на Σ, то для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют подспектр $\{E_{n_i}\}$ и множество $E \in \Sigma$, для которых

$$E_{n_i} \subset E,$$

$$\overline{\varphi}_{n_i}(E \setminus (E_{n_1} \cup ... \cup E_{n_i})) < \varepsilon, \ \ i \in \mathbb{N}.$$

3. Теорема Брукса-Джеветта для композиционно-треугольных функций множества на m- классе с f_1- свойством

Теорема 1. Пусть Σ — m- класс с f_1- свойством. Пусть $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n : \Sigma \to (G, |\cdot|)$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность f- композиционно-треугольных исчерпывающих на Σ функций множества. Пусть для каждого множества $E \in \Sigma$ существует

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(E_n) = \varphi_0(E), \tag{3.1}$$

и функция множества φ_0 — исчерпывающая на Σ. Тогда функции множества последовательности $\{\varphi_n\}$ обладают свойством равномерной исчерпываемости на Σ. Доказательство. Предположим противное. Тогда существуют число $\varepsilon > 0$ и спектр $\{E_n\} \subset \Sigma$, такие что

$$|\varphi_n(E_n)| > \varepsilon, \ \ n \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Пусть $\delta_1 = f^{-1}(\frac{\varepsilon}{2})$, $\delta_2 = f^{-1}(\frac{\delta_1}{2})$.

Так как функция $f \in \mathcal{F}$ строго возрастает и $f(x) \geqslant x$, $x \in \mathbb{R}^+$, то $\delta_2 < \delta_1$.

1^0. Покажем, что существует такое бесконечное множество $P \subset \mathbb{N}$ и такое множество $F \in \Sigma$, что

$$E_n \subset F, \ \ n \in P$$

и

$$\overline{\varphi}_0(F) < \delta_2. \tag{3.3}$$

Рассмотрим разбиение множества натуральных чисел на счетное множество бесконечных подмножеств $\{N_i, \ i = 1, 2, ...\}$. . Согласно определению f_1-свойства, для спектров $\{E'_n, \ n \in \mathbb{N}\} = \{E_n, \ n \in \mathbb{N} \backslash N_1\}$ и $\{F'_n, \ n \in \mathbb{N}\} = \{E_n, \ n \in N_1\}$ найдем такое бесконечное подмножество $P' \subset N_1$ и такое множество $F' \in \Sigma$, что $E_n \subset F'$ при всех $n \in P'$, $F' \cap E_n = \varnothing$ при $n \in \mathbb{N} \setminus N_1$.

Положим $P_1 = P'$, $F_1 = F'$.

Аналогично, применив определение f_1- свойства к спектрам $\{E''_n, \ n \in \mathbb{N}\} = \{F_1, \ E_n, \ n \in \mathbb{N} \backslash (N_1 \cup N_2)\}$ и $\{F''_n, \ n \in \mathbb{N}\} = \{E_n, \ n \in N_2\}$, найдем такое бесконечное подмножество $P_2 \subset N_2$ и такое множество $F_2 \in \Sigma$, что $E_n \subset F_2$ при всех $n \in P_2$, $F_2 \cap F_1 = F_2 \cap E_n = \varnothing$ при $n \in \mathbb{N} \setminus (N_1 \cup N_2)$.

Продолжив процесс по индукции, получим последовательность попарно непересекающихся подмножеств множества натуральных чисел $\{P_i\}$ и спектр $\{F_i\} \subset \Sigma$, для которых справедливо

$$E_n \subset F_i, \ \ n \in P_i, \ \ i \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Для спектра $\{F_n\} \subset \Sigma$ справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\varphi}_0(F_n) = 0. \tag{3.5}$$

Действительно, в противном случае существуют число $\delta > 0$ и подспектр $\{F_{n_k}\}$ спектра $\{F_n\}$, для которых

$$|\varphi_0(F_{n_k})| > \delta,$$

что противоречит исчерпываемости функции множества φ_0 на Σ.

Из соотношения (3.5) следует, что существует номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\overline{\varphi}_0(F_{n_0}) < \delta_2.$$

Из условия (3.4) следует, что $E_n \subset F_{n_0}$ при $n \in P_{n_0}$.

Множества $P = P_{n_0}$ и $F = F_{n_0}$ — искомые.

2^0. Покажем, что существует подпоследовательность номеров $\{n_k\} \subset P$ такая, что

$$\left| \varphi_{n_k} \left(\bigcup_{i \in I} E_{n_i} \right) \right| < \delta_1,$$

$$I \subset \{1, 2, ..., k-1\}, \ \ k = 2, 3, ...$$

Пусть $n_1 = \min P$. Так как
$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(E_{n_1}) = \varphi_0(E_{n_1}),$$
то, в силу (3.3) и неравенства $\delta_2 < \delta_1$, существует такой номер $n_2 \in P$, $n_2 > n_1$, что
$$|\varphi_{n_2}(E_{n_1})| < \delta_1.$$
Аналогично, учитывая (3.1) и (3.3), найдем такой номер $n_3 \in P$, $n_3 > n_2$, что
$$|\varphi_{n_3}(E_{n_1})| < \delta_1, |\varphi_{n_3}(E_{n_2})| < \delta_1,$$
$$|\varphi_{n_3}(E_{n_1} \cup E_{n_2})| < \delta_1.$$
Продолжив процесс по индукции, получим искомую подпоследовательность номеров $\{n_k\} \subset P$.

3^0. Без ограничения общности можно считать, что
$$\left|\varphi_k\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right)\right| < \delta_1 \tag{3.6}$$
$$I \subset \{1, 2, ..., k-1\},\ \ k = 2, 3, ...,$$
$$E_n \subset F,\ \ n \in \mathbb{N}.$$

4^0. Используя свойство композиционной треугольности функций множества последовательности $\{\varphi_n\}$ покажем, что
$$\left|\varphi_k\left(\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) \cup E_k\right)\right| \geqslant \delta_1, \tag{3.7}$$
$$I \subset \{1, 2, ..., k-1\},\ \ k = 2, 3, ...$$
Предположим, что
$$\left|\varphi_k\left(\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) \cup E_k\right)\right| < \delta_1,$$
$$I \subset \{1, 2, ..., k-1\},\ \ k = 2, 3, ...$$
Тогда, в силу неравенства
$$|\varphi_k(E_k)| < f\varphi_k\left(\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) \cup E_k\right) + f\varphi_k\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right),$$
$$I \subset \{1, 2, ..., k-1\},\ \ k = 2, 3, ...,$$
и условия (3.6), имеем
$$|\varphi_k(E_k)| < \varepsilon,$$
что противоречит (3.2).

5^0. К спектру $\{E_n\} \subset \Sigma$ и числу $\delta_2 > 0$ применим предложение 1 пункта 2. Пусть $\{E_{n_i}\}$ — подспектр $\{E_n\}$ и множество $E \in \Sigma$, $E \subset F$ такие, что
$$\overline{\varphi}_{n_i}\left(E \setminus (E_{n_1} \cup ... \cup E_{n_i})\right) < \delta_2,\ \ i \in \mathbb{N}, \tag{3.8}$$
$$E_{n_i} \subset E,\ \ i \in \mathbb{N}.$$
Из (3.7) следует, что
$$|\varphi_{n_i}\left(E_{n_1} \cup ... \cup E_{n_i}\right)| \geqslant \delta_1,\ \ i = 2, 3, ...$$
Отсюда и из (3.8), в силу выбора числа $\delta_2 > 0$, следует
$$|\varphi_{n_i}(E)| > \delta_2,\ \ i = 2, 3, ...$$
С другой стороны, в силу (3.1) и (3.3), существует номер i_0 такой, что для всех $i > i_0$
$$|\varphi_{n_i}(E)| < \delta_2.$$
Получили противоречие.

Покажем, что теорема 1 не верна для последовательности функций множества, заданной на m- классе, не обладающим f_1- свойством.

Пример 4. Пусть Σ — класс множеств, состоящий из пустого множества, всех конечных подмножеств множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ и всех тех подмножеств множества $\mathbb{N}$, которые имеют непустое конечное дополнение. Класс множеств Σ является m- классом, но не обладает f_1- свойством.

Пусть $x \in (G, |\cdot|)$ — некоторый ненулевой элемент группы G. Зададим функции множества φ_n, $n \in \mathbb{N}$, формулами

$$\varphi_n(E) = \begin{cases} x, & n \in E, \\ \theta, & n \notin E \end{cases},$$

для любого множества $E \in \Sigma$.

Функции множества φ_n, $n \in \mathbb{N}$, являются аддитивными и исчерпывающими на Σ. Для любого множества $E \in \Sigma$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(E) = \varphi_0(E) = \begin{cases} \theta, & \text{если } E - \text{конечно}, \\ x, & \text{если } \mathbb{N} \setminus E - \text{конечно}. \end{cases}$$

При этом функция множества φ_0 исчерпывающая на Σ.

В то же время для спектра одноэлементных множеств $E_n = \{n\}$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(E_n) = x.$$

Следовательно, функции множества последовательности $\{\varphi_n\}$ не являются равномерно исчерпывающими на Σ.

Покажем, что теорема 1 остается справедливой в случае, когда Σ — сигма-суммируемый класс множеств.

Непустой класс множеств Σ, $\varnothing \in \Sigma$, замкнутый относительно образования счетных объединений попарно непересекающихся множеств, называют сигма-суммируемым классом множеств [4].

Следствие 1. Пусть Σ — сигма-суммируемый класс множеств. Пусть функции множества последовательности $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n : \Sigma \to (G, |\cdot|)$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда функции множества последовательности $\{\varphi_n\}$ равномерно исчерпывающие на Σ.

Доказательство. Пусть $\{E_k\}$ — произвольный спектр из Σ. Тогда все множества вида

$$\bigcup_{k\in I} E_k, \ \ I \subset \mathbb{N},$$

принадлежат Σ.

Рассмотрим класс множеств $\mathcal{A}$, состоящий из пустого множества и всех множеств вида $\bigcup\limits_{k\in I} E_k$, $I \subset \mathbb{N}$. Такой класс множеств является σ- алгеброй.

Так как сужения функций множества φ_n, $n \in \mathbb{N}$, на σ- алгебру $\mathcal{A}$ удовлетворяют условиям теоремы 1, то соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_n(E_k) = \theta$$

выполняется равномерно относительно $n \in \mathbb{N}$.

4. Обобщение теоремы Никодима

Теорема 2. Пусть Σ — m- класс с f_1- свойством. Пусть $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n : \Sigma \to (G, |\cdot|)$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность f- композиционно-треугольных и f- композиционно-полуаддитивных функций множества. Пусть для каждого множества $E \in \Sigma$ существует

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(E) = \varphi_0(E)$$

и функции множества φ_0, φ_n, $n \in \mathbb{N}$, — исчерпывающие на Σ. Если каждая функция множества φ_n, $n \in \mathbb{N}$, непрерывна сверху в нуле на Σ, то функции множества последовательности $\{\varphi_n\}$ обладают свойством равностепенной слабой непрерывности на Σ.

Доказательство. В силу теоремы 1, функции множества последовательности $\{\varphi_n\}$ обладают свойством равномерной исчерпываемости на Σ.

Предположим, что функции множества последовательности $\{\varphi_n\}$ не являются равностепенно слабо непрерывными на Σ. Тогда существуют число $\varepsilon > 0$ и локализатор $\{E_n\} \subset \Sigma$ такие, что

$$|\varphi_n(E_n)| > \varepsilon, n \in \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

Пусть $\delta = f^{-1}(\frac{\varepsilon}{2})$. По определению непрерывности сверху в нуле на Σ функции множества φ_1 найдем номер n_1 такой, что

$$|\varphi_1(E_{n_1})| < \delta. \tag{4.2}$$

Так как

$$E_1 = (E_1 \setminus E_{n_1}) \cup E_{n_1},$$

то из (4.1) и (4.2) следует, что

$$|\varphi_1(E_1 \setminus E_{n_1})| > \delta.$$

По определению непрерывности сверху в нуле Σ функции множества φ_{n_1} найдем номер $n_2 > n_1$ такой, что
$$|\varphi_{n_1}(E_{n_2})| < \delta.$$

Так как
$$E_{n_1} = (E_{n_1} \setminus E_{n_2}) \cup E_{n_2},$$
то
$$|\varphi_{n_1}(E_{n_1} \setminus E_{n_2})| > \delta.$$

Продолжив процесс неограниченно, построим подпоследовательность номеров $n_k < n_{k+1},$ и спектр $\{E_{n_k} \setminus E_{n_{k+1}}\}$ такие, что
$$|\varphi_{n_k}(E_{n_k} \setminus E_{n_{k+1}})| > \delta.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Из примера 1и теорем 1, 2 вытекает справедливость следствия 2.

Следствие 2. Пусть Σ — m- класс с f_1- свойством. Пусть $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n : \Sigma \to (G, |\cdot|)$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность квазилипшицевых функций множества. Пусть для любого множества $E \in \Sigma$ существует
$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(E) = \varphi_0(E).$$

Если функции множества φ_0, φ_n, $n \in \mathbb{N}$, — исчерпывающие на Σ, то функции множества последовательности $\{\varphi_n\}$ равномерно исчерпывающие на Σ.

Если, кроме этого, функции множества φ_n, $n \in \mathbb{N}$, — непрерывнны сверху в нуле на Σ, то функции множества последовательности φ_n равностепенно слабо непрерывные на Σ.

Литература

[1] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория // М.: ИИЛ, 1962. 896 с.

[2] Brooks J.K., Jewett R.S. On finitely additive vector measures // Proc. Nat. Acad. Sci USA. 1970. V. 67. № 3. P. 1294–1298.

[3] Гусельников Н.С. О теоремах Брукса-Джеветта и Никодима // Теория функций и функц. анализ. Л. 1975. С. 45–54.

[4] Климкин В.М. Введение в теорию функций множества. Издательство Саратовского университета, Куйбышевский филиал, 1989. 210 с.

[5] Molto A. On the Vitali-Hahn-Saks theorem // Proc. Royal. Soc. Edinburgh. 1981. Sect. A90. P. 163–173.

[6] Schachermayer W. On some classical measure-theoretic theorems for non-sigma-complete Boolean algebras // Dissertationes Math.-Warszawa. 1982. V. 214. P. 1–33.

[7] Friniche F.I. The Vitali-Hahn-Saks theorem for Boolean algebras with the subsequential interprolation property // Proc. Amer. Math. Soc. 1984. V. 92. № 3. P. 362–366.

[8] Lucia P., Marales P. Some Consequences of the Brooks-Jewett theorem for Additive Uniform Semigroup-valued Functions // Conf. Semin. Mat. Univ. Bari. 1988. V. 227. P. 1–23.

[9] Гусельников Н.С. О продолжении квазилипшицевых функций множества //Матем. заметки. 1975. Т. 17. № 1. С. 21–31.

[10] Seever G.L. Measures on F-spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 133. P. 267–280.

[11] Срибная Т.А. Критерий равномерной исчерпываемости семейства векторных внешних мер // Вестник Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия. 2012. № 6 (97). С. 58–65.

References

[1] Dunford N., Schwartz J. *Lineinye operatory. Obshchaia teoriia* [Linear operators. Part 1: General theory]. M.: IIL, 1962, 896 p. [in Russian].

[2] Brooks J.K., Jewett R.S. On finitely additive vector measures. *Proc. Nat. Acad. Sci USA*, 1970, Vol. 67, no 3, pp. 1294–1298 [in English].

[3] Guselnikov N.S. *O teoremakh Bruksa-Dzhevetta i Nikodima* [On the theorems of Brooks-Jewett and Nicodemus]. In: *Sb. Teoriia funktsii i funkts. analiz* [Collection Theory of functions and functional analysis]. L., 1975, pp. 45–54 [in Russian].

[4] Klimkin V.M. *Vvedenie v teoriiu funktsii mnozhestva* [Introduction to the theory of set functions]. Izdatel'stvo Saratovskogo universiteta, Kuibyshevskii filial, 1989, 210 p. [in Russian].

[5] Molto A. On the Vitali-Hahn-Saks theorem. *Proc. Royal. Soc.*. Edinburgh, 1981, Sect. A90, pp. 163–173 [in English].

[6] Schachermayer W. On some classical measure-theoretic theorems for non-sigma-complete Boolean algebras. *Dissertationes Math.*. Warszawa, 1982, Vol. 214, pp. 1–33 [in English].

[7] Friniche F.I. The Vitali-Hahn-Saks theorem for Boolean algebras with the subsequential interprolation property. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1984, Vol. 92, no 3, pp. 362–366 [in English].

[8] Lucia P., Marales P. Some Consequences of the Brooks-Jewett theorem for Additive Uniform Semigroup-valued Functions. *Conf. Semin. Mat. Univ.*. Bari, 1988, Vol. 227, pp. 1–23 [in English].

[9] Guselnikov N.S. *O prodolzhenii kvazilipshitsevykh funktsii mnozhestva* [On the extension of quasi-Lipschitz set functions]. *Matem. zametki* [Mathematical Notes], 1975, Vol. 17, no. 1, pp. 21–31 [in Russian].

[10] Seever G.L. Measures on F-spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1968, Vol. 133, pp. 267–280 [in Russian].

[11] Sribnaya T.A. *Kriterii ravnomernoi ischerpyvaemosti semeistva vektornykh vneshnikh mer* [A criterion for the uniform exhaustibility of a family of vector external measures]. *Vestnik Samarskogo gosuniversiteta. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University], 2012, no 6 (97), pp. 58–65 [in Russian].

T.A. Sribnaya[2]

THE BROOKS-JEVETT THEOREM ON UNIFORM DIMENTRICULARITY ON A NON-SIGMA-FULL CLASS OF SETS

For a sequence of exhaustive composition-triangular set functions defined on a non-sigma-complete class of sets, more general than the ring of sets, the Brooks-Jewett theorem on uniform exhaustibility is proved. As a corollary, we have obtained analogue of the Brooks-Jewett theorem for functions defined on a sigma-summable class of sets. It is shown that if, in addition to the property compositional triangularity, the set functions have the composite semi-additivity property and are continuous from above at zero, then an analog of Nikodym's theorem on equicontinuous weak continuity is valid for them. The corresponding results are obtained for a family of quasi-Lipschitz set functions.

Key words: composition-triangular set functions, composition-semi-additive set functions, non-sigma-complete class of sets, multiplicative class of sets, exhaustibility, continuity from above at zero, uniform exhaustibility, equicontinuous weak continuity.

Статья поступила в редакцию $22/XI/2017$.
The article received $22/XI/2017$.

[2] *Sribnaya Tatyana Arkadievna* (sribnayata@mail.ru), Department of Functional Analysis and Theory of Functions, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

УДК 517+531.01 DOI: 10.18287/2541-7525-2017-23-4-40-67

М.В. Шамолин[1]

О ДВИЖЕНИИ МАЯТНИКА В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ. ЧАСТЬ 2. НЕЗАВИСИМОСТЬ ПОЛЯ СИЛ ОТ ТЕНЗОРА УГЛОВОЙ СКОРОСТИ[2]

В предлагаемом цикле работ исследуются уравнения движения динамически симметричного закрепленного n-мерного твердого тела-маятника, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных закрепленных твердых тел, помещенных в однородный поток набегающей среды. Параллельно рассматривается задача о движении свободного n-мерного твердого тела, также находящегося в подобном поле сил. При этом на данное свободное тело действует также неконсервативная следящая сила, заставляющая во все время движения величину скорости некоторой характерной точки твердого тела оставаться либо постоянной во времени (что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи), либо центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно (что означает присутствие в системе пары сил). В данной работе рассматривается случай независимости силового поля от тензора угловой скорости.

Ключевые слова: многомерное твердое тело, неконсервативное поле сил, динамическая система, случаи интегрируемости.

1 Вводные замечания

Выберем функцию $\mathbf{r}_N$ в следующем виде (диск $\mathcal{D}^{n-1}$ задается уравнением $x_{1N} \equiv 0$):

$$\mathbf{r}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ x_{2N} \\ \vdots \\ x_{nN} \end{pmatrix} = R(\alpha)\mathbf{i}_N, \tag{1.1}$$

где

$$\mathbf{i}_N = \mathbf{i}_v\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\right). \tag{1.2}$$

В нашем случае

$$\mathbf{i}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\beta_1 \\ \sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \ldots \\ \sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} \\ \sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Таким образом, выполнены равенства

$$\begin{gathered} x_{2N} = R(\alpha)\cos\beta_1, \ \ x_{3N} = R(\alpha)\sin\beta_1\cos\beta_2, \ \ \ldots, \\ x_{n-1,N} = R(\alpha)\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2}, \ \ x_{nN} = R(\alpha)\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}, \end{gathered} \tag{1.4}$$

убеждающие нас о том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента сил от тензора угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$).

Итак, для построения силового поля используется пара функций $R(\alpha), s(\alpha)$, информация о которых носит качественный характер. Подобно выбору аналитических функций типа Чаплыгина [1, 2], динамические функции s и R примем в следующем виде:

$$R(\alpha) = A\sin\alpha, \ \ s(\alpha) = B\cos\alpha, \ \ A, B > 0. \tag{1.5}$$

Шамолин Максим Владимирович (shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru), Институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, 119192, Российская Федерация, г. Москва, Мичуринский пр., 1.
[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 15-01-00848-а).

1.1. Приведенные системы

Теорема 1.1. *Совместные уравнения*

$$
\begin{gathered}
(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_1=0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_1-1}=0,\\
(n-2)I_2\dot\omega_{r_1}+(-1)^{n+1}(I_1-I_2)W_{n-1}(\Omega)=\\
=(-1)^n x_{nN}\left(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_1+1}=0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_2-1}=0,\\
(n-2)I_2\dot\omega_{r_2}+(-1)^{n}(I_1-I_2)W_{n-2}(\Omega)=\\
=(-1)^{n-1} x_{n-1,N}\left(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_2+1}=0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
(I_1+(n-3)I_2)\dot\omega_{r_{n-2}-1}=0,\\
(n-2)I_2\dot\omega_{r_{n-2}}+(I_1-I_2)W_{2}(\Omega)=\\
=-x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
(n-2)I_2\dot\omega_{r_{n-1}}+(I_2-I_1)W_{1}(\Omega)=\\
=x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,
\end{gathered}
\tag{1.6}
$$

$r_{n-2}+1=r_{n-1}$, функции $W_t(\Omega)$, $t=1,\dots,n-1$, — квадратичные формы по компонентам $\omega_1,\dots,\omega_f$, $f=n(n-1)/2$, тензора Ω, причем $(k_j\neq r_i)$

$$
W_t(\Omega)|_{\omega_{k_1}=\dots=\omega_{k_s}=0}=0, s=(n-1)(n-2)/2, j=1,\dots,s, i=1,\dots,n-1,
\tag{1.7}
$$

$$
\begin{gathered}
v_D\cos\alpha=-v_\infty\cos\xi,\\
v_D\sin\alpha\cos\beta_1=l\omega_{r_{n-1}}+v_\infty\sin\xi\cos\eta_1,\\
v_D\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2=-l\omega_{r_{n-2}}+v_\infty\sin\xi\sin\eta_1\cos\eta_2,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
v_D\sin\alpha\sin\beta_1\dots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2}=\\
=(-1)^{n+1}l\omega_{r_2}+v_\infty\sin\xi\sin\eta_1\dots\sin\eta_{n-3}\cos\eta_{n-2},\\
v_D\sin\alpha\sin\beta_1\dots\sin\beta_{n-2}=(-1)^n l\omega_{r_1}+v_\infty\sin\xi\sin\eta_1\dots\sin\eta_{n-2},
\end{gathered}
\tag{1.8}
$$

$$
\begin{gathered}
\begin{pmatrix}\omega_{r_1}\\ \omega_{r_2}\\ \dots\\ \omega_{r_{n-1}}\end{pmatrix}=T_{1,2}(\eta_{n-2})\circ T_{2,3}(\eta_{n-3})\circ\dots\circ\\
\circ T_{n-3,n-2}(\eta_2)T_{n-2,n-1}(\eta_1)\begin{pmatrix}(-1)^n\dot\eta_{n-2}\frac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\dots\sin\eta_{n-3}\\ (-1)^{n+1}\dot\eta_{n-3}\frac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\dots\sin\eta_{n-4}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dot\eta_2\frac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\\ -\dot\eta_1\frac{\sin\xi}{\cos\xi}\\ \dot\xi\end{pmatrix}
\end{gathered}
\tag{1.9}
$$

при выполнении условий

$$
I_2=\dots=I_n,
\tag{1.10}
$$

$$
\omega_{k_1}\equiv\omega_{k_1}^0=const,\ \dots,\ \omega_{k_s}\equiv\omega_{k_s}^0=const,\ s=\frac{(n-1)(n-2)}{2},
\tag{1.11}
$$

$$
\omega_{k_1}^0=\dots=\omega_{k_s}^0=0,
\tag{1.12}
$$

редуцируются к динамической системе на касательном расслоении

$$
\begin{gathered}
T_*\mathbf{S}^{n-1}\Big\{(\dot\xi,\dot\eta_1,\dots,\dot\eta_{n-2};\xi,\eta_1,\dots,\eta_{n-2})\in\mathbf{R}^{2(n-1)}:\\
0\leqslant\xi,\eta_1,\dots,\eta_{n-3}\leqslant\pi,\ \ \eta_{n-2}\ \ mod\ 2\pi\Big\}
\end{gathered}
\tag{1.13}
$$

$(n-1)$-мерной сферы

$$
\mathbf{S}^{n-1}\{(\xi,\eta_1,\dots,\eta_{n-2})\in\mathbf{R}^{n-1}:\ \ 0\leqslant\xi,\eta_1,\dots,\eta_{n-3}\leqslant\pi,\ \ \eta_{n-2}\ \ mod\ 2\pi\}.
\tag{1.14}
$$

Действительно, если ввести безразмерные параметр и дифференцирование:

$$
b_*=ln_0,\ \ n_0^2=\frac{AB}{(n-2)I_2},\ \ <\cdot>=n_0v_\infty<'>,
\tag{1.15}
$$

то полученные уравнения будут иметь следующий вид:

$$
\begin{gathered}
\xi'' + b_*\xi'\cos\xi + \sin\xi\cos\xi - \\
-\left[\eta_1'^2 + \eta_2'^2\sin^2\eta_1 + \eta_3'^2\sin^2\eta_1\sin^2\eta_2 + \right. \\
\left. + \ldots + \eta_{n-2}'^2\sin^2\eta_1\ldots\sin^2\eta_{n-3}\right]\frac{\sin\xi}{\cos\xi} = 0, \\
\eta_1'' + b_*\eta_1'\cos\xi + \xi'\eta_1'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} - \\
-\left[\eta_2'^2 + \eta_3'^2\sin^2\eta_2 + \eta_4'^2\sin^2\eta_2\sin^2\eta_3 + \ldots + \right. \\
\left. + \eta_{n-2}'^2\sin^2\eta_2\ldots\sin^2\eta_{n-3}\right]\sin\eta_1\cos\eta_1 = 0, \\
\eta_2'' + b_*\eta_2'\cos\xi + \xi'\eta_2'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\eta_1'\eta_2'\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - \\
-\left[\eta_3'^2 + \eta_4'^2\sin^2\eta_3 + \eta_5'^2\sin^2\eta_3\sin^2\eta_4 + \ldots + \right. \\
\left. + \eta_{n-2}'^2\sin^2\eta_3\ldots\sin^2\eta_{n-3}\right]\sin\eta_2\cos\eta_2 = 0, \\
\eta_3'' + b_*\eta_3'\cos\xi + \xi'\eta_3'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\eta_1'\eta_3'\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + 2\eta_2'\eta_3'\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2} - \\
-\left[\eta_4'^2 + \eta_5'^2\sin^2\eta_4 + \eta_6'^2\sin^2\eta_4\sin^2\eta_5 + \ldots + \right. \\
\left. + \eta_{n-2}'^2\sin^2\eta_4\ldots\sin^2\eta_{n-3}\right]\sin\eta_3\cos\eta_3 = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\eta_{n-4}'' + b_*\eta_{n-4}'\cos\xi + \xi'\eta_{n-4}'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + \\
+ 2\eta_1'\eta_{n-4}'\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \ldots + 2\eta_{n-5}'\eta_{n-4}'\frac{\cos\eta_{n-5}}{\sin\eta_{n-5}} - \\
-\left[\eta_{n-3}'^2 + \eta_{n-2}'^2\sin^2\eta_{n-3}\right]\sin\eta_{n-4}\cos\eta_{n-4} = 0, \\
\eta_{n-3}'' + b_*\eta_{n-3}'\cos\xi + \xi'\eta_{n-3}'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + \\
+ 2\eta_1'\eta_{n-3}'\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \ldots + 2\eta_{n-4}'\eta_{n-3}'\frac{\cos\eta_{n-4}}{\sin\eta_{n-4}} - \\
-\eta_{n-2}'^2\sin\eta_{n-3}\cos\eta_{n-3} = 0, \\
\eta_{n-2}'' + b_*\eta_{n-2}'\cos\xi + \xi'\eta_{n-2}'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + \\
+ 2\eta_1'\eta_{n-2}'\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \ldots + 2\eta_{n-3}'\eta_{n-2}'\frac{\cos\eta_{n-3}}{\sin\eta_{n-3}} = 0, \quad b_* > 0.
\end{gathered}
\tag{1.16}
$$

В частности, при $n = 5$ имеем:

$$
\begin{gathered}
\xi'' + b_*\xi'\cos\xi + \sin\xi\cos\xi - \left[\eta_1'^2 + \eta_2'^2\sin^2\eta_1 + \eta_3'^2\sin^2\eta_1\sin^2\eta_2\right]\frac{\sin\xi}{\cos\xi} = 0, \\
\eta_1'' + b_*\eta_1'\cos\xi + \xi'\eta_1'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} - \left[\eta_2'^2 + \eta_3'^2\sin^2\eta_2\right]\sin\eta_1\cos\eta_1 = 0, \\
\eta_2'' + b_*\eta_2'\cos\xi + \xi'\eta_2'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\eta_1'\eta_2'\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - \eta_3'^2\sin\eta_2\cos\eta_2 = 0, \\
\eta_3'' + b_*\eta_3'\cos\xi + \xi'\eta_3'\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\eta_1'\eta_3'\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + 2\eta_2'\eta_3'\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2} = 0, \quad b_* > 0.
\end{gathered}
\tag{1.17}
$$

Вспомним для начала про группу переменных z:

$$
\begin{pmatrix} \omega_{r_1} \\ \omega_{r_2} \\ \ldots \\ \omega_{r_{n-1}} \end{pmatrix} = T_{1,2}(\eta_{n-2}) \circ T_{2,3}(\eta_{n-3}) \circ \ldots \circ T_{n-2,n-1}(\eta_1) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \ldots \\ z_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{1.18}
$$

где матрица $T_{k,k+1}(\eta)$, $k = 1, \ldots, n-2$, получена из единичной наличием минора второго порядка $M_{k,k+1}$:

$$
T_{k,k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{k,k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.19}
$$

$$
M_{k,k+1} = \begin{pmatrix} m_{k,k} & m_{k,k+1} \\ m_{k+1,k} & m_{k+1,k+1} \end{pmatrix}, \quad m_{k,k} = m_{k+1,k+1} = \cos\eta, \quad m_{k+1,k} = -m_{k,k+1} = \sin\eta.
$$

После же перехода от переменных z к промежуточным безразмерным переменным

$$
z_k = n_0 v_\infty Z_k, \quad k = 1, \ldots, n-2, \quad z_{n-1} = n_0 v_\infty Z_{n-1} - n_0 v_\infty b_* \sin\xi, \tag{1.20}
$$

система (1.16) будет эквивалентна системе

$$
\xi' = Z_{n-1} - b_*\sin\xi, \tag{1.21}
$$

$$
Z_{n-1}' = -\sin\xi\cos\xi + (Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{1.22}
$$

$$
Z_{n-2}' = -Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi} - (Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}, \tag{1.23}
$$

$$Z'_{n-3} = -Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}+$$

$$+(Z_1^2+\ldots+Z_{n-4}^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}, \tag{1.24}$$

. . . .

$$Z'_1 = -Z_1\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\eta_{s-1}}{\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{s-1}}\right\}, \tag{1.25}$$

$$\eta'_1 = -Z_{n-2}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{1.26}$$

$$\eta'_2 = Z_{n-3}\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1}, \tag{1.27}$$

. . . .

$$\eta'_{n-3} = (-1)^{n+1}Z_2\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-4}}, \tag{1.28}$$

$$\eta'_{n-2} = (-1)^{n}Z_1\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-3}}, \tag{1.29}$$

на касательном расслоении

$$T_*\mathbf{S}^{n-1}\{(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2})\in\mathbf{R}^{2(n-1)}:$$

$$0\leqslant\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-3}\leqslant\pi,\ \ \eta_{n-2} \mod 2\pi\} \tag{1.30}$$

$(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{(\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2})\in\mathbf{R}^{n-1}:\ 0\leqslant\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-3}\leqslant\pi,\ \ \eta_{n-2} \mod 2\pi\}$.

Видно, что в системе (1.21)–(1.29) порядка $2(n-1)$ по причине цикличности переменной η_{n-2} выделяется независимая подсистема (1.21)–(1.28) порядка $2(n-1)-1$, которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем $(2n-3)$-мерном многообразии.

В частности, при $n=5$ получим следующую систему восьмого порядка:

$$\xi' = Z_4 - b_*\sin\xi, \tag{1.31}$$

$$Z'_4 = -\sin\xi\cos\xi + (Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{1.32}$$

$$Z'_3 = -Z_3Z_4\frac{\cos\xi}{\sin\xi} - (Z_1^2+Z_2^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}, \tag{1.33}$$

$$Z'_2 = -Z_2Z_4\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_2Z_3\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + Z_1^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}, \tag{1.34}$$

$$Z'_1 = -Z_1Z_4\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_1Z_3\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - Z_1Z_2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}, \tag{1.35}$$

$$\eta'_1 = -Z_3\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{1.36}$$

$$\eta'_2 = Z_2\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1}, \tag{1.37}$$

$$\eta'_3 = -Z_1\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2}, \tag{1.38}$$

на касательном расслоении

$$T_*\mathbf{S}^4\{(Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3,)\in\mathbf{R}^8:\ \ 0\leqslant\xi,\eta_1,\eta_2\leqslant\pi,\ \ \eta_3 \mod 2\pi\} \tag{1.39}$$

четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{(\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)\in\mathbf{R}^4:\ \ 0\leqslant\xi,\eta_1,\eta_2\leqslant\pi,\ \ \eta_3 \mod 2\pi\}$.

Видно, что в системе восьмого порядка (1.31)–(1.38) по причине цикличности переменной η_3 выделяется независимая подсистема седьмого порядка (1.31)–(1.37), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем семимерном многообразии.

1.2. Общие замечания об интегрируемости системы

Для полного интегрирования системы (1.21)–(1.29) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов (в частности, для полного интегрирования системы восьмого порядка (1.31)–(1.38) необходимо, вообще говоря, знать семь независимых первых интегралов). Но рассматриваемые системы имеют такие симметрии, которые позволяют снизить достаточное количество первых интегралов до n (в частности, до пяти) для интегрирования систем.

1.2.1. Система при отсутствии силового поля

Рассмотрим систему (1.31)–(1.38) на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^4\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{\xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3\}$. При этом получим из нее систему консервативную. Более того, будем считать, что функция

$$\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = |\mathbf{r}_N| = (\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2})) =$$

$$= 0 \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \sum_{s=2}^{n} x_{sN}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) i_{sN}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \tag{1.40}$$

тождественно равна нулю (в частности, $b_* = 0$, а также коэффициент $\sin\xi\cos\xi$ в уравнении (1.32) отсутствует). Здесь $i_{sN}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$, $s = 1, \ldots, n$, $(i_{1N}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \equiv 0)$ — компоненты единичного вектора по оси вектора $\mathbf{r}_N = \{0, x_{2N}, \ldots, x_{nN}\}$ на $(n-2)$-мерной сфере $\mathbf{S}^{n-2}\{\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$, заданной равенством $\alpha = \pi/2$, как экваториальном сечении соответствующей $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$. Рассматриваемая система примет вид

$$\xi' = Z_4, \tag{1.41}$$

$$Z_4' = (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{1.42}$$

$$Z_3' = -Z_3 Z_4 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} - (Z_1^2 + Z_2^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}, \tag{1.43}$$

$$Z_2' = -Z_2 Z_4 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_2 Z_3 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + Z_1^2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}, \tag{1.44}$$

$$Z_1' = -Z_1 Z_4 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_1 Z_3 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - Z_1 Z_2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}, \tag{1.45}$$

$$\eta_1' = -Z_3 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{1.46}$$

$$\eta_2' = Z_2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1}, \tag{1.47}$$

$$\eta_3' = -Z_1 \frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2}. \tag{1.48}$$

Система (1.41)–(1.48) описывает движение твердого тела при отсутствии внешнего поля сил.

Теорема 1.2. *Система (1.41)–(1.48) обладает пятью независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида:*

$$\Phi_1(Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2} = C_1 = const, \tag{1.49}$$

$$\Phi_2(Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\sin\xi = C_2 = const, \tag{1.50}$$

$$\Phi_3(Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\xi\sin\eta_1 = C_3 = const, \tag{1.51}$$

$$\Phi_4(Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = Z_1\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2 = C_4 = const, \tag{1.52}$$

$$\Phi_5(Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = C_5 = const. \tag{1.53}$$

Четыре первых интеграла (1.49)–(1.52) констатируют тот факт, что поскольку внешнего поля сил нет, то сохраняются четыре (вообще говоря, ненулевые) компоненты тензора угловой скорости пятимерного твердого тела, а именно:

$$\omega_4 \equiv \omega_4^0 = \text{const}, \;\; \omega_7 \equiv \omega_7^0 = \text{const}, \;\; \omega_9 \equiv \omega_9^0 = \text{const}, \;\; \omega_{10} \equiv \omega_{10}^0 = \text{const}. \tag{1.54}$$

В частности, наличие первого интеграла (1.49) объясняется равенством

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 = \frac{1}{n_0^2 v_\infty^2}\left[\omega_4^2 + \omega_7^2 + \omega_9^2 + \omega_{10}^2\right] \equiv C_1^2 = \text{const}. \tag{1.55}$$

Пятый первый интеграл (1.53) имеет кинематический смысл, "привязывает" уравнение на η_3 и может быть найден из следующей квадратуры:

$$\frac{d\eta_3}{d\eta_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}\frac{1}{\sin\eta_2}, \tag{1.56}$$

при этом если воспользоваться уровнями первых интегралов (1.51), (1.52) и получить равенство

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \pm\sqrt{\frac{C_3^2}{C_4^2}\sin^2\eta_2 - 1}, \tag{1.57}$$

то квадратура (1.56) примет вид

$$\eta_3 = \pm\int \frac{du}{(1-u^2)\sqrt{\left(\frac{C_3^2}{C_4^2}-1\right) - \frac{C_3^2}{C_4^2}u^2}}, \ \ u = \cos\eta_2. \tag{1.58}$$

Ее вычисление приводит к следующему виду:

$$\eta_3 + C_5 = \pm\mathrm{arctg}\frac{\cos\eta_2}{\sqrt{\frac{C_3^2}{C_4^2}\sin^2\eta_2 - 1}}, \ \ C_5 = \mathrm{const}, \tag{1.59}$$

позволяющему получить первый интеграл (1.53). Преобразуя последнее равенство, имеем следующее инвариантное соотношение:

$$\mathrm{tg}^2(\eta_3 + C_5) = \frac{C_4^2}{(C_3^2 - C_4^2)\mathrm{tg}^2\eta_2 - C_4^2}. \tag{1.60}$$

Теперь перефразируем теорему 1.2.

Теорема 1.3. *Система (1.41)–(1.48) обладает пятью независимыми первыми интегралами следующего вида:*

$$\Psi_1(Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \frac{\Phi_1^2}{\Phi_2} = \frac{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\sin\xi} = C_1' = const, \tag{1.61}$$

$$\Psi_2(Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = C_2' = const, \tag{1.62}$$

$$\Psi_3(Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1\sin\eta_2} = C_3' = const, \tag{1.63}$$

$$\Psi_4(Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\eta_1} = C_4' = const, \tag{1.64}$$

$$\Psi_5(Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = C_5' = const. \tag{1.65}$$

Первый интеграл (1.65) также имеет кинематический смысл и "привязывает" уравнение на η_3, а функции Ψ_2, Ψ_5 можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_5.

В формулировке теоремы 1.3 (в отличие от теоремы 1.2) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (1.61)–(1.65) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 1.3 преобразованный набор первых интегралов (1.61)–(1.65) системы (1.41)–(1.48) (системы при отсутствии силового поля) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (1.41)–(1.48) восьмого порядка необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных:

$$w_4 = -Z_4, \ \ w_3 = \sqrt{Z_3^2 + Z_2^2 + Z_1^2}, \ \ w_2 = \frac{Z_2}{Z_1}, \ \ w_1 = -\frac{Z_3}{\sqrt{Z_2^2 + Z_1^2}}, \tag{1.66}$$

система (1.41)–(1.48) распадается следующим образом:

$$\xi' = -w_4, \ \ w_4' = -w_3^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \ \ w_3' = w_3 w_4\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{1.67}$$

$$\left.\begin{aligned} w_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3)\tfrac{1+w_2^2}{w_2}\tfrac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}, \\ \eta_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3), \end{aligned}\right\} \tag{1.68}$$

$$\left.\begin{aligned} w_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3)\tfrac{1+w_1^2}{w_1}\tfrac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}, \\ \eta_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3), \end{aligned}\right\} \tag{1.69}$$

$$\eta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3), \tag{1.70}$$

где

$$\begin{gathered} d_1(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3) = -Z_3(w_4,w_3,w_2,w_1)\tfrac{\cos\xi}{\sin\xi} = \\ = \mp\tfrac{w_1w_3}{\sqrt{1+w_1^2}}\tfrac{\cos\xi}{\sin\xi}, \\ d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3) = Z_2(w_4,w_3,w_2,w_1)\tfrac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1} = \\ = \pm\tfrac{w_2w_3}{\sqrt{1+w_1^2}\sqrt{1+w_2^2}}\tfrac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1}, \\ d_3(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3) = -Z_1(w_4,w_3,w_2,w_1)\tfrac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2} = \\ = \mp\tfrac{w_3}{\sqrt{1+w_1^2}\sqrt{1+w_2^2}}\tfrac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2}, \end{gathered} \tag{1.71}$$

при этом

$$Z_k = Z_k(w_4,w_3,w_2,w_1),\ \ k=1,2,3, \tag{1.72}$$

— функции в силу замены (1.66).

Система (1.67)–(1.70) рассматривается на касательном расслоении

$$T_*\mathbf{S}^4\{(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)\in\mathbf{R}^8:\ \ 0\leqslant\xi,\eta_1,\eta_2\leqslant\pi,\ \ \eta_3 \mod 2\pi\} \tag{1.73}$$

четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{(\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)\in\mathbf{R}^4:\ \ 0\leqslant\xi,\eta_1,\eta_2\leqslant\pi,\ \ \eta_3 \mod 2\pi\}$.

Видно, что в системе восьмого порядка (1.67)–(1.70) выделяется независимая подсистема третьего порядка (1.67), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, две независимых системы второго порядка (1.68), (1.69) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной η_3) уравнение (1.70) на η_3 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.67)–(1.70) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.67), по одному — для систем (1.68), (1.69) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (1.70) (*т.е. всего пять*).

Замечание 1.1. *Выпишем первые интегралы (1.61)–(1.65) в переменных w_1,w_2,w_3,w_4 в силу (1.66). Получим:*

$$\Theta_1(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3) = \frac{w_3^2+w_4^2}{w_3\sin\xi} = C_1'' = const, \tag{1.74}$$

$$\Theta_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3) = w_3\sin\xi = C_2'' = const, \tag{1.75}$$

$$\Theta_3(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3) = \frac{\sqrt{1+w_2^2}}{\sin\eta_2} = C_3'' = const, \tag{1.76}$$

$$\Theta_4(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3) = \frac{\sqrt{1+w_1^2}}{\sin\eta_1} = C_4'' = const, \tag{1.77}$$

$$\Theta_5(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3) = C_5'' = const. \tag{1.78}$$

Таким образом, два независимых первых интеграла (1.74), (1.75) достаточны для интегрирования системы (1.67), первые интегралы (1.76), (1.77) достаточны для интегрирования двух независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\eta_s} = \frac{1+w_s^2}{w_s}\frac{\cos\eta_s}{\sin\eta_s},\ \ s=1,2, \tag{1.79}$$

после замены независимого переменного эквивалентных системам (1.68), (1.69), и, наконец, первый интеграл (1.78) достаточен для "привязывания" уравнения (1.70). Доказана

Теорема 1.4. *Система (1.41)–(1.48) восьмого порядка обладает достаточным количеством (пятью) независимых первых интегралов.*

1.2.2. Система при наличии консервативного силового поля

Теперь рассмотрим систему (1.31)–(1.38) при условии $b_* = 0$. При этом получим систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует коэффициент $\sin\xi\cos\xi$ в уравнении (1.32) (в отличие от системы (1.41)–(1.48)). Рассматриваемая система примет вид

$$\xi' = Z_4, \tag{1.80}$$

$$Z_4' = -\sin\xi\cos\xi + (Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{1.81}$$

$$Z_3' = -Z_3Z_4\frac{\cos\xi}{\sin\xi} - (Z_1^2+Z_2^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}, \tag{1.82}$$

$$Z_2' = -Z_2Z_4\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_2Z_3\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + Z_1^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}, \tag{1.83}$$

$$Z_1' = -Z_1 Z_4 \frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_1 Z_3 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - Z_1 Z_2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}, \tag{1.84}$$

$$\eta_1' = -Z_3 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{1.85}$$

$$\eta_2' = Z_2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1}, \tag{1.86}$$

$$\eta_3' = -Z_1 \frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2}. \tag{1.87}$$

Итак, система (1.80)–(1.87) описывает движение твердого тела в консервативном внешнем поле сил.

Теорема 1.5. *Система (1.80)–(1.87) обладает пятью независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида:*

$$\Phi_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + \sin^2\xi = C_1 = const, \tag{1.88}$$

$$\Phi_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\sin\xi = C_2 = const, \tag{1.89}$$

$$\Phi_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\xi\sin\eta_1 = C_3 = const, \tag{1.90}$$

$$\Phi_4(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = Z_1\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2 = C_4 = const. \tag{1.91}$$

$$\Phi_5(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = C_5 = const. \tag{1.92}$$

Первый интеграл (1.88) является интегралом полной энергии. Первый интеграл (1.92) имеет кинематический смысл, "привязывает" уравнение на η_3 и найден выше.

Теперь перефразируем теорему 1.5.

Теорема 1.6. *Система (1.80)–(1.87) обладает пятью независимыми первыми интегралами следующего вида:*

$$\Psi_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \\ = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + \sin^2\xi}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\sin\xi} = C_1' = const, \tag{1.93}$$

$$\Psi_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = C_2' = const, \tag{1.94}$$

$$\Psi_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1\sin\eta_2} = C_3' = const, \tag{1.95}$$

$$\Psi_4(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_2^2}}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\eta_1} = C_4' = const, \tag{1.96}$$

$$\Psi_5(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = C_5' = const. \tag{1.97}$$

Функции Ψ_2, Ψ_5 можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_5.

В формулировке теоремы 1.6 (в отличие от теоремы 1.5) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (1.93)–(1.97) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 1.6 преобразованный набор первых интегралов (1.93)–(1.97) системы (1.80)–(1.87) (системы при наличии консервативного силового поля) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (1.80)–(1.87) восьмого порядка необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (1.66) система (1.80)–(1.87) распадается следующим образом:

$$\xi' = -w_4, \;\; w_4' = \sin\xi\cos\xi - w_3^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \;\; w_3' = w_3 w_4 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{1.98}$$

$$\left.\begin{aligned} w_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3)\tfrac{1+w_2^2}{w_2}\tfrac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}, \\ \eta_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3), \end{aligned}\right\} \tag{1.99}$$

$$\left.\begin{aligned} w_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3)\tfrac{1+w_1^2}{w_1}\tfrac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}, \\ \eta_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3), \end{aligned}\right\} \tag{1.100}$$

$$\eta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \xi, \eta_1, \eta_2, \eta_3), \tag{1.101}$$

где выполнены условия (1.71).

Система (1.98)–(1.101) рассматривается на касательном расслоении (1.73) четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{(\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)\in\mathbf{R}^4:\ 0\leqslant\xi,\eta_1,\eta_2\leqslant\pi,\ \eta_3 \mod 2\pi\}$.

Видно, что в системе восьмого порядка (1.98)–(1.101) выделяется независимая подсистема третьего порядка (1.98), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, две независимых системы второго порядка (1.99), (1.100) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной η_3) уравнение (1.101) на η_3 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.98)–(1.101) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.98), по одному — для систем (1.99), (1.100) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (1.101) (*т.е. всего пять*).

Замечание 1.2. *Выпишем первые интегралы (1.93)–(1.97) в переменных w_1,w_2,w_3,w_4 в силу (1.66). Получим:*

$$\Theta_1(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\frac{w_3^2+w_4^2+\sin^2\xi}{w_3\sin\xi}=C_1''=const, \tag{1.102}$$

$$\Theta_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)=w_3\sin\xi=C_2''=const, \tag{1.103}$$

$$\Theta_3(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\frac{\sqrt{1+w_2^2}}{\sin\eta_2}=C_3''=const, \tag{1.104}$$

$$\Theta_4(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\frac{\sqrt{1+w_1^2}}{\sin\eta_1}=C_4''=const, \tag{1.105}$$

$$\Theta_5(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)=C_5''=const. \tag{1.106}$$

Таким образом, два независимых первых интеграла (1.102), (1.103) достаточны для интегрирования системы (1.98), первые интегралы (1.104), (1.105) достаточны для интегрирования двух независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\eta_s}=\frac{1+w_s^2}{w_s}\frac{\cos\eta_s}{\sin\eta_s},\ \ s=1,2, \tag{1.107}$$

после замены независимого переменного эквивалентных системам (1.99), (1.100), и, наконец, первый интеграл (1.106) достаточен для "привязывания" уравнения (1.101). Доказана

Теорема 1.7. *Система (1.80)–(1.87) восьмого порядка обладает достаточным количеством (пятью) независимых первых интегралов.*

1.3. Полный список первых интегралов

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы восьмого порядка (1.31)–(1.38) (без всяких упрощений — при наличии всех коэффициентов).

Аналогичным образом, для полного интегрирования системы (1.31)–(1.38) восьмого порядка необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (1.66) система (1.31)–(1.38) распадается следующим образом:

$$\xi'=-w_4-b_*\sin\xi,\ \ w_4'=\sin\xi\cos\xi-w_3^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi},\ \ w_3'=w_3w_4\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{1.108}$$

$$\left.\begin{array}{r} w_2'=d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)\frac{1+w_2^2}{w_2}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2},\\ \eta_2'=d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3),\end{array}\right\} \tag{1.109}$$

$$\left.\begin{array}{r} w_1'=d_1(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)\frac{1+w_1^2}{w_1}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1},\\ \eta_1'=d_1(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3),\end{array}\right\} \tag{1.110}$$

$$\eta_3'=d_3(w_4,w_3,w_2,w_1;\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3), \tag{1.111}$$

где выполнены условия (1.71).

Система (1.108)–(1.110) рассматривается на касательном расслоении (1.73) четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{(\xi,\eta_1,\eta_2,\eta_3)\in\mathbf{R}^4:\ 0\leqslant\xi,\eta_1,\eta_2\leqslant\pi,\ \eta_3 \mod 2\pi\}$.

Видно, что в системе восьмого порядка (1.108)–(1.111) выделяется независимая подсистема третьего порядка (1.108), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, две независимых системы второго порядка (1.109), (1.110) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной η_3) уравнение (1.111) на η_3 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.108)–(1.111) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.108), по одному — для систем (1.109), (1.110) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (1.111) (*т.е. всего пять*).

Для начала сопоставим системе третьего порядка (1.108) неавтономную систему второго порядка

$$\frac{dw_4}{d\xi} = \frac{\sin\xi\cos\xi - w_3^2\cos\xi/\sin\xi}{-w_4 - b_*\sin\xi}, \quad \frac{dw_3}{d\xi} = \frac{w_3w_4\cos\xi/\sin\xi}{-w_4 - b_*\sin\xi}. \tag{1.112}$$

Используя замену $\tau = \sin\xi$, перепишем систему (1.112) в алгебраическом виде

$$\frac{dw_4}{d\tau} = \frac{\tau - w_3^2/\tau}{-w_4 - b_*\tau}, \quad \frac{dw_3}{d\tau} = \frac{w_3w_4/\tau}{-w_4 - b_*\tau}. \tag{1.113}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_4 = u_2\tau, \quad w_3 = u_1\tau, \tag{1.114}$$

приводим систему (1.113) к следующему виду:

$$\tau\frac{du_2}{d\tau} + u_2 = \frac{1 - u_1^2}{-u_2 - b_*}, \quad \tau\frac{du_1}{d\tau} + u_1 = \frac{u_1u_2}{-u_2 - b_*}, \tag{1.115}$$

что эквивалентно

$$\tau\frac{du_2}{d\tau} = \frac{1 - u_1^2 + u_2^2 - bu_2}{-u_2 - b_*}, \quad \tau\frac{du_1}{d\tau} = \frac{2u_1u_2 - bu_1}{-u_2 - b_*}. \tag{1.116}$$

Сопоставим системе второго порядка (1.116) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - u_1^2 + u_2^2 + b_*u_2}{2u_1u_2 + b_*u_1}, \tag{1.117}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{u_2^2 + u_1^2 + b_*u_2 + 1}{u_1}\right) = 0. \tag{1.118}$$

Итак, уравнение (1.117) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2 + u_1^2 + b_*u_2 + 1}{u_1} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{1.119}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_4, w_3; \xi) = \frac{w_4^2 + w_3^2 + b_*w_4\sin\xi + \sin^2\xi}{w_3\sin\xi} = C_1 = \mathrm{const}. \tag{1.120}$$

Замечание 1.3. *Рассмотрим систему (1.108) с переменной диссипацией с нулевым средним [2, 3, 4], становящейся консервативной при $b_* = 0$:*

$$\xi' = -w_4, \quad w_4' = \sin\xi\cos\xi - w_3^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \quad w_3' = w_3w_4\frac{\cos\xi}{\sin\xi}. \tag{1.121}$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$w_4^2 + w_3^2 + \sin^2\xi = C_1^* = const, \tag{1.122}$$

$$w_3\sin\xi = C_2^* = const. \tag{1.123}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (1.122), (1.123) также является первым интегралом системы (1.121). Но при $b_* \neq 0$ каждая из функций

$$w_4^2 + w_3^2 + b_*w_4\sin\xi + \sin^2\xi \tag{1.124}$$

и (1.123) по отдельности не является первым интегралом системы (1.108). Однако отношение функций (1.124), (1.123) является первым интегралом системы (1.108) при любом b_*.

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (1.108). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (1.119) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 + \frac{b_*}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b_*^2 + C_1^2}{4} - 1. \tag{1.125}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b_*^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0, \tag{1.126}$$

и фазовое пространство системы (1.108) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (1.125).

Таким образом, в силу соотношения (1.119) первое уравнение системы (1.116) примет вид

$$\tau\frac{du_2}{d\tau}=\frac{2(1+b_*u_2+u_2^2)-C_1U_1(C_1,u_2)}{-u_2-b_*}, \tag{1.127}$$

где

$$U_1(C_1,u_2)=\frac{1}{2}\{C_1\pm\sqrt{C_1^2-4(u_2^2+b_*u_2+1)}\}, \tag{1.128}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (1.126).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (1.108) примет вид

$$\int\frac{d\tau}{\tau}=\int\frac{(-b_*-u_2)du_2}{2(1+b_*u_2+u_2^2)-C_1\{C_1\pm\sqrt{C_1^2-4(u_2^2+b_*u_2+1)}\}/2}. \tag{1.129}$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln|\sin\xi|. \tag{1.130}$$

Если

$$u_2+\frac{b_*}{2}=r_1,\ \ b_1^2=b_*^2+C_1^2-4, \tag{1.131}$$

то правая часть равенства (1.129) примет вид

$$-\frac{1}{4}\int\frac{d(b_1^2-4r_1^2)}{(b_1^2-4r_1^2)\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}}+b_*\int\frac{dr_1}{(b_1^2-4r_1^2)\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}}{C_1}\pm 1\right|\pm\frac{b_*}{2}I_1, \tag{1.132}$$

где

$$I_1=\int\frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2-r_3^2}(r_3\pm C_1)},\ \ r_3=\sqrt{b_1^2-4r_1^2}. \tag{1.133}$$

При вычислении интеграла (1.133) возможны три случая.

I. $b_*>2$.

$$I_1=-\frac{1}{2\sqrt{b_*^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b_*^2-4}+\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{r_3\pm C_1}\pm\frac{C_1}{\sqrt{b_*^2-4}}\right|+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{b_*^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b_*^2-4}-\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{r_3\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{b_*^2-4}}\right|+\mathrm{const}. \tag{1.134}$$

II. $b_*<2$.

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{4-b_*^2}}\arcsin\frac{\pm C_1r_3+b_1^2}{b_1(r_3\pm C_1)}+\mathrm{const}. \tag{1.135}$$

III. $b_*=2$.

$$I_1=\mp\frac{\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{C_1(r_3\pm C_1)}+\mathrm{const}. \tag{1.136}$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1=\frac{w_4}{\sin\xi}+\frac{b_*}{2}, \tag{1.137}$$

имеем окончательный вид для величины I_1:

I. $b_*>2$.

$$I_1=-\frac{1}{2\sqrt{b_*^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b_*^2-4}\pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1}\pm\frac{C_1}{\sqrt{b_*^2-4}}\right|+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{b_*^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b_*^2-4}\mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{b_*^2-4}}\right|+\mathrm{const}. \tag{1.138}$$

II. $b_*<2$.

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{4-b_*^2}}\arcsin\frac{\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}+b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1)}+\mathrm{const}. \tag{1.139}$$

III. $b_*=2$.

$$I_1=\mp\frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1)}+\mathrm{const}. \tag{1.140}$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (1.108) — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Замечание 1.4. *В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (1.119).*

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_4, w_3; \xi) = G\left(\sin\xi, \frac{w_4}{\sin\xi}, \frac{w_3}{\sin\xi}\right) = C_2 = \text{const}. \tag{1.141}$$

Итак, найдены два первых интеграла (1.120), (1.141) независимой системы третьего порядка (1.108). Осталось указать по одному первому интегралу — для систем (1.109), (1.110) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (1.111).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (1.104)–(1.106), а именно:

$$\Theta_3(w_2; \eta_2) = \frac{\sqrt{1+w_2^2}}{\sin\eta_2} = C_3 = \text{const}, \tag{1.142}$$

$$\Theta_4(w_1; \eta_1) = \frac{\sqrt{1+w_1^2}}{\sin\eta_1} = C_4 = \text{const}, \tag{1.143}$$

$$\Theta_5(w_2, w_1; \eta_1, \eta_2, \eta_3) = \eta_3 \pm \operatorname{arctg}\frac{C_4\cos\eta_2}{\sqrt{C_3^2\sin^2\eta_2 - C_4^2}} = C_5 = \text{const}, \tag{1.144}$$

при этом в левую часть равенства (1.144) вместо C_3, C_4 необходимо подставить интегралы (1.142), (1.143).

Теорема 1.8. *Система (1.108)–(1.110) восьмого порядка обладает достаточным количеством (пятью) независимых первых интегралов (1.120), (1.141), (1.142), (1.143), (1.144).*

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (1.31)–(1.38) имеет пять первых интегралов, выражающихся соотношениями (1.120), (1.141), (1.142), (1.143), (1.144) (при этом используются выражения (1.129)–(1.140)), являющихся трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа) и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Теорема 1.9. *Три группы соотношений*

$$\begin{gathered}
(I_1+2I_2)\dot\omega_1 = 0,\\
(I_1+2I_2)\dot\omega_2 = 0,\\
(I_1+2I_2)\dot\omega_3 = 0,\\
3I_2\dot\omega_4 + (I_1-I_2)(\omega_3\omega_{10}+\omega_2\omega_9+\omega_1\omega_7) = -x_{5N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
(I_1+2I_2)\dot\omega_5 = 0,\\
(I_1+2I_2)\dot\omega_6 = 0,\\
3I_2\dot\omega_7 + (I_2-I_1)(\omega_1\omega_4-\omega_6\omega_{10}-\omega_5\omega_9) = x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
(I_1+2I_2)\dot\omega_8 = 0,\\
3I_2\dot\omega_9 + (I_1-I_2)(\omega_8\omega_{10}-\omega_5\omega_7-\omega_2\omega_4) = -x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,\\
3I_2\dot\omega_{10} + (I_2-I_1)(\omega_8\omega_9+\omega_6\omega_7+\omega_3\omega_4) = x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\tfrac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2,
\end{gathered} \tag{1.145}$$

$$\begin{gathered}
v_D\cos\alpha = -v_\infty\cos\xi,\\
v_D\sin\alpha\cos\beta_1 = l\omega_{10} + v_\infty\sin\xi\cos\eta_1,\\
v_D\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 = -l\omega_9 + v_\infty\sin\xi\sin\eta_1\cos\eta_2,\\
v_D\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 = l\omega_7 + v_\infty\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2\cos\eta_3,\\
v_D\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 = -l\omega_4 + v_\infty\sin\xi\sin\eta_1\sin\eta_2\sin\eta_3,
\end{gathered} \tag{1.146}$$

$$\begin{gathered}
\omega_4 = -\dot\xi\sin\eta_1\sin\eta_2\sin\eta_3 - \dot\eta_1\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\cos\eta_1\sin\eta_2\sin\eta_3 -\\
-\dot\eta_2\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\cos\eta_2\sin\eta_3 - \dot\eta_3\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\sin\eta_2\cos\eta_3,\\
\omega_7 = \dot\xi\sin\eta_1\sin\eta_2\cos\eta_3 + \dot\eta_1\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\cos\eta_1\sin\eta_2\cos\eta_3 +\\
+\dot\eta_2\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\cos\eta_2\cos\eta_3 - \dot\eta_3\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\sin\eta_2\sin\eta_3,\\
\omega_9 = -\dot\xi\sin\eta_1\cos\eta_2 - \dot\eta_1\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\cos\eta_1\cos\eta_2 + \dot\eta_2\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1\sin\eta_2,\\
\omega_{10} = \dot\xi\cos\eta_1 - \dot\eta_1\tfrac{\sin\xi}{\cos\xi}\sin\eta_1,
\end{gathered} \tag{1.147}$$

при условиях

$$\omega_1 \equiv \omega_1^0,\ \ \omega_2 \equiv \omega_2^0,\ \ \omega_3 \equiv \omega_3^0,\ \ \omega_5 \equiv \omega_5^0,\ \ \omega_6 \equiv \omega_6^0,\ \ \omega_8 \equiv \omega_8^0, \tag{1.148}$$

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_3^0 = \omega_5^0 = \omega_6^0 = \omega_8^0 = 0, \tag{1.149}$$

(1.1), (1.5) обладают пятью первыми интегралами (полным набором), являющимися трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа, выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций.

1.4. Общие замечания об интегрируемости системы при любом конечном n

Как уже было указано, для полного интегрирования системы (1.21)–(1.29) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Но рассматриваемые системы имеют такие симметрии, которые позволяют снизить достаточное количество первых интегралов до n для интегрирования систем.

1.4.1. Система при отсутствии силового поля

Рассмотрим систему (1.21)–(1.29) на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}\}$ и получим из нее систему консервативную. Более того, будем считать, что функция (1.40) тождественно равна нулю (в частности, $b_*=0$, а также коэффициент $\sin\xi\cos\xi$ в уравнении (1.22) отсутствует). Рассматриваемая система примет вид

$$\xi' = Z_{n-1}, \tag{1.150}$$

$$Z'_{n-1} = (Z_1^2+\ldots+Z_{n-2}^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{1.151}$$

$$Z'_{n-2} = -Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi} - (Z_1^2+\ldots+Z_{n-3}^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}, \tag{1.152}$$

$$Z'_{n-3} = -Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}+$$

$$+(Z_1^2+\ldots+Z_{n-4}^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}, \tag{1.153}$$

....

$$Z'_1 = -Z_1\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\eta_{s-1}}{\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{s-1}}\right\}, \tag{1.154}$$

$$\eta'_1 = -Z_{n-2}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{1.155}$$

$$\eta'_2 = Z_{n-3}\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1}, \tag{1.156}$$

....

$$\eta'_{n-3} = (-1)^{n+1}Z_2\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-4}}, \tag{1.157}$$

$$\eta'_{n-2} = (-1)^{n}Z_1\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-3}}. \tag{1.158}$$

Система (1.150)–(1.158) описывает движение твердого тела при отсутствии внешнего поля сил.

Теорема 1.10. *Система (1.150)–(1.158) обладает n независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида:*

$$\Phi_1(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = \sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-1}^2} = C_1 = const, \tag{1.159}$$

$$\Phi_2(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = \sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-2}^2}\sin\xi = C_2 = const, \tag{1.160}$$

$$\Phi_3(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) =$$

$$= \sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-3}^2}\sin\xi\sin\eta_1 = C_3 = const, \tag{1.161}$$

.... (1.162)

$$\Phi_{n-2}(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) =$$

$$= \sqrt{Z_1^2+Z_2^2}\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-4} = C_{n-2} = const, \tag{1.163}$$

$$\Phi_{n-1}(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) =$$

$$= Z_1\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-3} = C_{n-1} = const, \tag{1.164}$$

$$\Phi_n(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = C_n = const. \tag{1.165}$$

Первые $n-1$ первых интеграла (1.159)–(1.164) констатируют тот факт, что поскольку внешнего поля сил нет, то сохраняются $n-1$ (вообще говоря, ненулевые) компоненты тензора угловой скорости n-мерного твердого тела, а именно:

$$\omega_{r_1} \equiv \omega^0_{r_1} = \mathrm{const}, \ \ldots, \ \omega_{r_{n-1}} \equiv \omega^0_{r_{n-1}} = \mathrm{const}. \tag{1.166}$$

В частности, наличие первого интеграла (1.159) объясняется равенством

$$Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2 = \frac{1}{n_0^2 v_\infty^2}[\omega^2_{r_1} + \ldots + \omega^2_{r_{n-1}}] \equiv C_1^2 = \mathrm{const}. \tag{1.167}$$

Последний первый интеграл (1.165) имеет кинематический смысл, "привязывает" уравнение на β_{n-2} и может быть найден из следующей квадратуры:

$$\frac{d\eta_{n-2}}{d\eta_{n-3}} = -\frac{Z_1}{Z_2}\frac{1}{\sin\eta_{n-3}}, \tag{1.168}$$

при этом если воспользоваться уровнями первых интегралов (1.163), (1.164) и получить равенство

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \pm\sqrt{\frac{C^2_{n-2}}{C^2_{n-1}}\sin^2\eta_{n-3} - 1}, \tag{1.169}$$

то квадратура (1.168) примет вид

$$\eta_{n-2} = \pm\int \frac{du}{(1-u^2)\sqrt{\left(\frac{C^2_{n-2}}{C^2_{n-1}} - 1\right) - \frac{C^2_{n-2}}{C^2_{n-1}}u^2}}, \ \ u = \cos\eta_{n-3}. \tag{1.170}$$

Ее вычисление приводит к следующему виду:

$$\eta_{n-2} + C_n = \pm\mathrm{arctg}\frac{\cos\eta_{n-3}}{\sqrt{\frac{C^2_{n-2}}{C^2_{n-1}}\sin^2\eta_{n-3} - 1}}, \ \ C_n = \mathrm{const}, \tag{1.171}$$

позволяющему получить первый интеграл (1.165). Преобразуя последнее равенство, имеем следующее инвариантное соотношение:

$$\mathrm{tg}^2(\eta_{n-2} + C_n) = \frac{C^2_{n-1}}{(C^2_{n-2} - C^2_{n-1})\mathrm{tg}^2\eta_{n-3} - C^2_{n-1}}. \tag{1.172}$$

Теперь перефразируем теорему 1.10.

Теорема 1.11. *Система (1.150)–(1.158) обладает n независимыми первыми интегралами следующего вида:*

$$\Psi_1(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) =$$
$$= \frac{\Phi_1^2}{\Phi_2} = \frac{Z_1^2 + \ldots + Z^2_{n-1}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z^2_{n-2}}\sin\xi} = C_1' = const, \tag{1.173}$$

$$\Psi_2(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = C_2' = const, \tag{1.174}$$

$$\Psi_3(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = \frac{\Phi_{n-2}}{\Phi_{n-1}} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1\sin\eta_{n-3}} = C_3' = const, \tag{1.175}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{1.176}$$

$$\Psi_{n-2}(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) =$$
$$= \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z^2_{n-3}}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z^2_{n-4}}\sin\eta_2} = C'_{n-2} = const, \tag{1.177}$$

$$\Psi_{n-1}(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) =$$
$$= \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z^2_{n-2}}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z^2_{n-3}}\sin\eta_1} = C'_{n-1} = const, \tag{1.178}$$

$$\Psi_n(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = C'_n = const. \tag{1.179}$$

Первый интеграл (1.179) также имеет кинематический смысл и "привязывает" уравнение на η_{n-2}, а функции Ψ_2, Ψ_n можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_n.

В формулировке теоремы 1.11 (в отличие от теоремы 1.10) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (1.173)–(1.179) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 1.11 преобразованный набор первых интегралов (1.173)–(1.179) системы (1.150)–(1.158) (системы при отсутствии силового поля) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (1.150)–(1.158) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после следующей замены переменных:

$$\begin{pmatrix} Z_{n-1} \\ Z_{n-2} \\ \ldots \\ Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_{n-2} \\ \ldots \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{gathered} w_{n-1} = -Z_{n-1}, \;\; w_{n-2} = \sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}, \\ w_{n-3} = \frac{Z_2}{Z_1}, \;\; w_{n-4} = -\frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}, \;\; \ldots, \\ w_2 = -\frac{Z_{n-3}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-4}^2}}, \;\; w_1 = -\frac{Z_{n-2}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2}}, \end{gathered} \tag{1.180}$$

система (1.150)–(1.158) распадается следующим образом:

$$\xi' = -w_{n-1}, \;\; w_{n-1}' = -w_{n-2}^2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \;\; w_{n-2}' = w_{n-2} w_{n-1} \frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{1.181}$$

$$\left.\begin{aligned} w_s' &= d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) \tfrac{1+w_s^2}{w_s} \tfrac{\cos\eta_s}{\sin\eta_s}, \\ \eta_s' &= d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}), \;\; s = 1, \ldots, n-3, \end{aligned}\right\} \tag{1.182}$$

$$\eta_{n-2}' = d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}), \tag{1.183}$$

где

$$\begin{gathered} d_1(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = -Z_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1) \tfrac{\cos\xi}{\sin\xi}, \\ d_2(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = Z_{n-3}(w_{n-1}, \ldots, w_1) \tfrac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = \\ = (-1)^n Z_1(w_{n-1}, \ldots, w_1) \tfrac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1 \ldots \sin\eta_{n-3}}, \end{gathered} \tag{1.184}$$

при этом

$$Z_k = Z_k(w_{n-1}, \ldots, w_1), \;\; k = 1, \ldots, n-2, \tag{1.185}$$

— функции в силу замены (1.180).

Система (1.181)–(1.183) рассматривается на касательном расслоении

$$\begin{gathered} T_*\mathbf{S}^{n-1}\{(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) \in \mathbf{R}^{2(n-1)} : \\ 0 \leqslant \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-3} \leqslant \pi, \;\; \eta_{n-2} \mod 2\pi\} \end{gathered} \tag{1.186}$$

$(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) \in \mathbf{R}^{n-1} : \; 0 \leqslant \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-3} \leqslant \pi, \;\; \eta_{n-2} \mod 2\pi\}$.

Видно, что в системе (1.181)–(1.183) порядка $3 + 2(n-3) + 1 = 2(n-1)$ выделяется независимая подсистема третьего порядка (1.181), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, $n-3$ независимых системы второго порядка (1.182) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной η_{n-2}) уравнение (1.183) на η_{n-2} отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.181)–(1.183) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.181), по одному — для систем (1.182) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (1.183) (*т.е. всего* n).

Замечание 1.5. *Выпишем первые интегралы (1.173)–(1.179) в переменных* $w_1, \ldots, w_{n-1}$ *в силу (1.180). Получим:*

$$\Theta_1(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = \frac{w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2}{w_{n-2}\sin\xi} = C_1'' = const, \tag{1.187}$$

$$\Theta_2(w_{n-1},\ldots,w_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = w_{n-2}\sin\xi = C_2'' = const, \tag{1.188}$$

$$\Theta_{s+2}(w_{n-1},\ldots,w_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) =$$

$$= \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\eta_s} = C_{s+2}'' = const, \ \ s=1,\ldots,n-3, \tag{1.189}$$

$$\Theta_n(w_{n-1},\ldots,w_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = C_n'' = const. \tag{1.190}$$

Таким образом, два независимых первых интеграла (1.187), (1.188) достаточны для интегрирования системы (1.181), первые интегралы (1.189) (их $n-3$ штук) достаточны для интегрирования независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\eta_s} = \frac{1+w_s^2}{w_s}\frac{\cos\eta_s}{\sin\eta_s}, \ \ s=1,\ldots,n-3, \tag{1.191}$$

после замены независимого переменного эквивалентных системам (1.182), и, наконец, первый интеграл (1.190) достаточен для "привязывания" уравнения (1.183). Доказана

Теорема 1.12. *Система (1.150)–(1.158) порядка* $2(n-1)$ *обладает достаточным количеством* (n) *независимых первых интегралов.*

1.4.2. Система при наличии консервативного силового поля

Теперь рассмотрим систему (1.21)–(1.29) при условии $b_* = 0$. При этом получим систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует коэффициент $\sin\xi\cos\xi$ в уравнении (1.22) (в отличие от системы (1.150)–(1.158)). Рассматриваемая система примет вид

$$\xi' = Z_{n-1}, \tag{1.192}$$

$$Z_{n-1}' = -\sin\xi\cos\xi + (Z_1^2+\ldots+Z_{n-2}^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{1.193}$$

$$Z_{n-2}' = -Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi} - (Z_1^2+\ldots+Z_{n-3}^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1}, \tag{1.194}$$

$$Z_{n-3}' = -Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi} + Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} +$$

$$+(Z_1^2+\ldots+Z_{n-4}^2)\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\frac{1}{\sin\eta_1}\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2}, \tag{1.195}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Z_1' = -Z_1\frac{\cos\xi}{\sin\xi}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\eta_{s-1}}{\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{s-1}}\right\}, \tag{1.196}$$

$$\eta_1' = -Z_{n-2}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{1.197}$$

$$\eta_2' = Z_{n-3}\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1}, \tag{1.198}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\eta_{n-3}' = (-1)^{n+1}Z_2\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-4}}, \tag{1.199}$$

$$\eta_{n-2}' = (-1)^{n}Z_1\frac{\cos\xi}{\sin\xi\sin\eta_1\ldots\sin\eta_{n-3}}. \tag{1.200}$$

Итак, система (1.192)–(1.200) описывает движение твердого тела в консервативном внешнем поле сил.

Теорема 1.13. *Система (1.192)–(1.200) обладает* n *независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида:*

$$\Phi_1(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = Z_1^2+\ldots+Z_{n-1}^2+\sin^2\xi = C_1 = const, \tag{1.201}$$

$$\Phi_2(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) = \sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-2}^2}\sin\xi = C_2 = const, \tag{1.202}$$

$$\Phi_3(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) =$$

$$= \sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-3}^2}\sin\xi\sin\eta_1 = C_3 = const, \tag{1.203}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{1.204}$$

$$\Phi_{n-2}(Z_{n-1},\ldots,Z_1;\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}) =$$

$$= \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} \sin\xi \sin\eta_1 \ldots \sin\eta_{n-4} = C_{n-2} = const, \tag{1.205}$$

$$\Phi_{n-1}(Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) =$$
$$= Z_1 \sin\xi \sin\eta_1 \ldots \sin\eta_{n-3} = C_{n-1} = const, \tag{1.206}$$

$$\Phi_n(Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = C_n = const. \tag{1.207}$$

Первый интеграл (1.201) является интегралом полной энергии. Первый интеграл (1.207) имеет кинематический смысл, "привязывает" уравнение на β_{n-2} и найден выше.

Теперь перефразируем теорему 1.13.

Теорема 1.14. *Система (1.192)–(1.200) обладает n независимыми первыми интегралами следующего вида:*

$$\Psi_1(Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) =$$
$$= \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2 + \sin^2\xi}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}\sin\xi} = C_1' = const, \tag{1.208}$$

$$\Psi_2(Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = C_2' = const, \tag{1.209}$$

$$\Psi_3(Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = \frac{\Phi_{n-2}}{\Phi_{n-1}} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1 \sin\eta_{n-3}} = C_3' = const, \tag{1.210}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{1.211}$$

$$\Psi_{n-2}(Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) =$$
$$= \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-4}^2}\sin\eta_2} = C_{n-2}' = const, \tag{1.212}$$

$$\Psi_{n-1}(Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) =$$
$$= \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2}\sin\eta_1} = C_{n-1}' = const, \tag{1.213}$$

$$\Psi_n(Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = C_n' = const. \tag{1.214}$$

Функции Ψ_2, Ψ_n можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_n.

В формулировке теоремы 1.14 (в отличие от теоремы 1.13) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (1.208)–(1.214) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 1.14 преобразованный набор первых интегралов (1.208)–(1.214) системы (1.192)–(1.200) (системы при наличии консервативного силового поля) по-прежнему остается набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (1.192)–(1.200) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (1.180) система (1.192)–(1.200) распадается следующим образом:

$$\xi' = -w_{n-1}, \;\; w_{n-1}' = \sin\xi\cos\xi - w_{n-2}^2 \frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \;\; w_{n-2}' = w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}, \tag{1.215}$$

$$\left.\begin{aligned} w_s' &= d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) \tfrac{1+w_s^2}{w_s} \tfrac{\cos\eta_s}{\sin\eta_s}, \\ \eta_s' &= d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}), \;\; s = 1, \ldots, n-3, \end{aligned}\right\} \tag{1.216}$$

$$\eta_{n-2}' = d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}), \tag{1.217}$$

где выполнены условия (1.184).

Система (1.215)–(1.217) рассматривается на касательном расслоении (1.186) $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) \in \mathbf{R}^{n-1} : \;\; 0 \leqslant \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-3} \leqslant \pi, \;\; \eta_{n-2} \mod 2\pi\}$.

Видно, что в системе (1.215)–(1.217) порядка $3 + 2(n-3) + 1 = 2(n-1)$ выделяется независимая подсистема третьего порядка (1.215), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, $n-3$ независимых системы второго порядка (1.216) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной η_{n-2}) уравнение (1.217) на η_{n-2} отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.215)–(1.217) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.215), по одному — для систем (1.216) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (1.217) (*т.е. всего* n).

Замечание 1.6. *Выпишем первые интегралы (1.208)–(1.214) в переменных* $w_1, \ldots, w_{n-1}$ *в силу (1.180). Получим:*

$$\Theta_1(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = \frac{w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2 + \sin^2 \xi}{w_{n-2} \sin \xi} = C_1'' = const, \tag{1.218}$$

$$\Theta_2(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = w_{n-2} \sin \xi = C_2'' = const, \tag{1.219}$$

$$\Theta_{s+2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) =$$
$$= \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\sin \eta_s} = C_{s+2}'' = const, \;\; s = 1, \ldots, n-3, \tag{1.220}$$

$$\Theta_n(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) = C_n'' = const. \tag{1.221}$$

Таким образом, два независимых первых интеграла (1.218), (1.219) достаточны для интегрирования системы (1.215), первые интегралы (1.220) (их $n-3$ штук) достаточны для интегрирования независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\eta_s} = \frac{1 + w_s^2}{w_s} \frac{\cos \eta_s}{\sin \eta_s}, \;\; s = 1, \ldots, n-3, \tag{1.222}$$

после замены независимого переменного эквивалентных системам (1.216), и, наконец, первый интеграл (1.221) достаточен для "привязывания" уравнения (1.217). Доказана

Теорема 1.15. *Система (1.192)–(1.200) порядка* $2(n-1)$ *обладает достаточным количеством* (n) *независимых первых интегралов.*

1.5. Полный список первых интегралов при любом конечном n

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы (1.21)–(1.29) порядка $2(n-1)$ (без всяких упрощений — при наличии всех коэффициентов).

Аналогичным образом, для полного интегрирования системы (1.21)–(1.29) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (1.180) система (1.21)–(1.29) распадается следующим образом:

$$\xi' = -w_{n-1} - b_* \sin \xi, \;\; w_{n-1}' = \sin \xi \cos \xi - w_{n-2}^2 \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \;\; w_{n-2}' = w_{n-2} w_{n-1} \frac{\cos \xi}{\sin \xi}, \tag{1.223}$$

$$\left. \begin{aligned} w_s' &= d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) \tfrac{1+w_s^2}{w_s} \tfrac{\cos \eta_s}{\sin \eta_s}, \\ \eta_s' &= d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}), \;\; s = 1, \ldots, n-3, \end{aligned} \right\} \tag{1.224}$$

$$\eta_{n-2}' = d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}), \tag{1.225}$$

где выполнены условия (1.184).

Система (1.223)–(1.225) рассматривается на касательном расслоении (1.186) $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}) \in \mathbf{R}^{n-1}: \;\; 0 \leqslant \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-3} \leqslant \pi, \;\; \eta_{n-2} \mod 2\pi\}$.

Видно, что в системе (1.223)–(1.225) порядка $3 + 2(n-3) + 1 = 2(n-1)$ выделяется независимая подсистема третьего порядка (1.223), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, $n-3$ независимых системы второго порядка (1.224) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной η_{n-2}) уравнение (1.225) на η_{n-2} отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.223)–(1.225) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.223), по одному — для систем (1.224) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (1.225) (*т.е. всего* n).

Для начала сопоставим системе третьего порядка (1.223) неавтономную систему второго порядка

$$\frac{dw_{n-1}}{d\xi} = \frac{\sin \xi \cos \xi - w_{n-2}^2 \cos \xi / \sin \xi}{-w_{n-1} - b_* \sin \xi}, \;\; \frac{dw_{n-2}}{d\xi} = \frac{w_{n-2} w_{n-1} \cos \xi / \sin \xi}{-w_{n-1} - b_* \sin \xi}. \tag{1.226}$$

Используя замену $\tau = \sin \xi$, перепишем систему (1.226) в алгебраическом виде

$$\frac{dw_{n-1}}{d\tau} = \frac{\tau - w_{n-2}^2 / \tau}{-w_{n-1} - b_* \tau}, \;\; \frac{dw_{n-2}}{d\tau} = \frac{w_{n-2} w_{n-1} / \tau}{-w_{n-1} - b_* \tau}. \tag{1.227}$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_{n-1} = u_2 \tau, \;\; w_{n-2} = u_1 \tau, \tag{1.228}$$

приводим систему (1.227) к следующему виду:

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} + u_2 = \frac{1 - u_1^2}{-u_2 - b_*}, \;\; \tau \frac{du_1}{d\tau} + u_1 = \frac{u_1 u_2}{-u_2 - b_*}, \tag{1.229}$$

что эквивалентно

$$\tau\frac{du_2}{d\tau}=\frac{1-u_1^2+u_2^2-bu_2}{-u_2-b_*},\quad \tau\frac{du_1}{d\tau}=\frac{2u_1u_2-bu_1}{-u_2-b_*}. \tag{1.230}$$

Сопоставим системе второго порядка (1.230) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1}=\frac{1-u_1^2+u_2^2+b_*u_2}{2u_1u_2+b_*u_1}, \tag{1.231}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{u_2^2+u_1^2+b_*u_2+1}{u_1}\right)=0. \tag{1.232}$$

Итак, уравнение (1.231) имеет следующий первый интеграл:

$$\frac{u_2^2+u_1^2+b_*u_2+1}{u_1}=C_1=\mathrm{const}, \tag{1.233}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_{n-1},w_{n-2};\xi)=\frac{w_{n-1}^2+w_{n-2}^2+b_*w_{n-1}\sin\xi+\sin^2\xi}{w_{n-2}\sin\xi}=C_1=\mathrm{const}. \tag{1.234}$$

Замечание 1.7. *Рассмотрим систему (1.223) с переменной диссипацией с нулевым средним [5, 6, 7], становящейся консервативной при* $b_*=0$*:*

$$\xi'=-w_{n-1},\quad w'_{n-1}=\sin\xi\cos\xi-w_{n-2}^2\frac{\cos\xi}{\sin\xi},\quad w'_{n-2}=w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\xi}{\sin\xi}. \tag{1.235}$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$w_{n-1}^2+w_{n-2}^2+\sin^2\xi=C_1^*=const, \tag{1.236}$$

$$w_{n-2}\sin\xi=C_2^*=const. \tag{1.237}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (1.236), (1.237) также является первым интегралом системы (1.235). Но при $b_*\neq 0$ *каждая из функций*

$$w_{n-1}^2+w_{n-2}^2+b_*w_{n-1}\sin\xi+\sin^2\xi \tag{1.238}$$

и (1.237) по отдельности не является первым интегралом системы (1.223). Однако отношение функций (1.238), (1.237) является первым интегралом системы (1.223) при любом b_*.

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (1.223). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (1.233) при $u_1\neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2+\frac{b_*}{2}\right)^2+\left(u_1-\frac{C_1}{2}\right)^2=\frac{b_*^2+C_1^2}{4}-1. \tag{1.239}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b_*^2+C_1^2-4\geqslant 0, \tag{1.240}$$

и фазовое пространство системы (1.223) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых в координатах u_1,u_2 равенством (1.239).

Таким образом, в силу соотношения (1.233) первое уравнение системы (1.230) примет вид

$$\tau\frac{du_2}{d\tau}=\frac{2(1+b_*u_2+u_2^2)-C_1U_1(C_1,u_2)}{-u_2-b_*}, \tag{1.241}$$

где

$$U_1(C_1,u_2)=\frac{1}{2}\{C_1\pm\sqrt{C_1^2-4(u_2^2+b_*u_2+1)}\}, \tag{1.242}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (1.240).

Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (1.223) примет вид

$$\int\frac{d\tau}{\tau}=\int\frac{(-b_*-u_2)du_2}{2(1+b_*u_2+u_2^2)-C_1\{C_1\pm\sqrt{C_1^2-4(u_2^2+b_*u_2+1)}\}/2}. \tag{1.243}$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln|\sin\xi|. \tag{1.244}$$

Если

$$u_2 + \frac{b_*}{2} = r_1, \;\; b_1^2 = b_*^2 + C_1^2 - 4, \tag{1.245}$$

то правая часть равенства (1.243) примет вид

$$-\frac{1}{4}\int \frac{d(b_1^2 - 4r_1^2)}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} - b\int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}}{C_1} \pm 1\right| \pm \frac{b}{2}I_1, \tag{1.246}$$

где

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)}, \;\; r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}. \tag{1.247}$$

При вычислении интеграла (1.247) возможны три случая.

I. $b_* > 2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b_*^2 - 4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b_*^2 - 4} + \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b_*^2 - 4}}\right| +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{b_*^2 - 4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b_*^2 - 4} - \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b_*^2 - 4}}\right| + \mathrm{const}. \tag{1.248}$$

II. $b_* < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - b_*^2}}\arcsin\frac{\pm C_1 r_3 + b_1^2}{b_1(r_3 \pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{1.249}$$

III. $b_* = 2$.

$$I_1 = \mp\frac{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{C_1(r_3 \pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{1.250}$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1 = \frac{w_{n-1}}{\sin\xi} + \frac{b_*}{2}, \tag{1.251}$$

имеем окончательный вид для величины I_1:

I. $b_* > 2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b_*^2 - 4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b_*^2 - 4} \pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b_*^2 - 4}}\right| +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{b_*^2 - 4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b_*^2 - 4} \mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b_*^2 - 4}}\right| + \mathrm{const}. \tag{1.252}$$

II. $b_* < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4 - b_*^2}}\arcsin\frac{\pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{1.253}$$

III. $b_* = 2$.

$$I_1 = \mp\frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2} \pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{1.254}$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (1.223) — предъявлен полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Замечание 1.8. *В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (1.233).*

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_{n-1}, w_{n-2}; \xi) = G_2\left(\sin\xi, \frac{w_{n-1}}{\sin\xi}, \frac{w_{n-2}}{\sin\xi}\right) = C_2 = \mathrm{const}. \tag{1.255}$$

Итак, найдены два первых интеграла (1.234), (1.255) независимой системы третьего порядка (1.223). Осталось указать по одному первому интегралу — для систем (1.224) (их всего $n-3$) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (1.225).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (1.220), (1.221), а именно:

$$\Theta_{s+2}(w_s; \eta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\sin\eta_s} = C''_{s+2} = \mathrm{const}, \;\; s = 1, \ldots, n-3, \tag{1.256}$$

$$\Theta_n(w_{n-3}, w_{n-4}; \eta_{n-4}, \eta_{n-3}, \eta_{n-2}) = \eta_{n-2} \pm \operatorname{arctg} \frac{C_{n-1}\cos\eta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2 \sin^2\eta_{n-3} - C_{n-1}^2}} = C_n'' = \text{const}, \tag{1.257}$$

при этом в левую часть равенства (1.257) вместо C_{n-2}, C_{n-1} необходимо подставить интегралы (1.256) при $s = n-4, n-3$.

Теорема 1.16. *Система (1.223)–(1.225) порядка $2(n-1)$ обладает достаточным количеством (n) независимых первых интегралов (1.234), (1.255), (1.256), (1.257).*

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (1.21)–(1.29) имеет n первых интегралов, выражающийся соотношениями (1.234), (1.255), (1.256), (1.257) (при этом используются выражения (1.243)–(1.254)), являющихся трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа) и выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Теорема 1.17. *Три группы соотношений (1.6), (1.8), (1.9) при условиях (1.10)–(1.12), (1.1), (1.5) обладают n первыми интегралами (полным набором), являющимися трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа, выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций.*

1.6. Топологические аналогии

Предъявим далее две группы аналогий, связанных с системой, описывающей движение свободного твердого тела при наличии следящей силы.

Первая группа аналогий касается случая наличия в системе неинтегрируемой связи

$$v \equiv \text{const}. \tag{1.258}$$

При выполнении условий (1.1), (1.5) рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -Z_{n-1} + b\sin\alpha, \tag{1.259}$$

$$Z_{n-1}' = \sin\alpha\cos\alpha - (Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1.260}$$

$$Z_{n-2}' = Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{1.261}$$

$$Z_{n-3}' = Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} -$$

$$-(Z_1^2 + \ldots + Z_{n-4}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{1.262}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Z_1' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}, \tag{1.263}$$

$$\beta_1' = Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1.264}$$

$$\beta_2' = -Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{1.265}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_{n-3}' = (-1)^n Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \tag{1.266}$$

$$\beta_{n-2}' = (-1)^{n+1} Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \tag{1.267}$$

если ввести безразмерные параметр, переменные и дифференцирование по аналогии с (1.15):

$$b = \sigma n_0,\ \ n_0^2 = \frac{AB}{(n-2)I_2},\ \ z_k = n_0 v Z_k,\ \ k = 1, \ldots, n-1,\ \ <\cdot> = n_0 v <'>\ . \tag{1.268}$$

В частности, при $n = 5$ получим следующую систему восьмого порядка:

$$\alpha' = -Z_4 + b\sin\alpha, \tag{1.269}$$

$$Z_4' = \sin\alpha\cos\alpha - (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1.270}$$

$$Z_3' = Z_3Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (Z_1^2 + Z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{1.271}$$

$$Z_2' = Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{1.272}$$

$$Z_1' = Z_1 Z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1 Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1 Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{1.273}$$

$$\beta_1' = Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1.274}$$

$$\beta_2' = -Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{1.275}$$

$$\beta_3' = Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}. \tag{1.276}$$

Теорема 1.18. *Система (1.259)–(1.267) (для свободного тела) эквивалентна системе (1.21)–(1.29) (для закрепленного маятника).*

Действительно, достаточно положить

$$\xi = \alpha,\ \ \eta_1 = \beta_1,\ \ \ldots,\ \ \eta_{n-2} = \beta_{n-2},\ \ b_* = -b, \tag{1.277}$$

а также сопоставить переменные $Z_k \leftrightarrow -Z_k,\ k = 1, \ldots, n-1$.

Для полного интегрирования системы (1.259)–(1.267) необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов (в частности, для полного интегрирования системы (1.269)–(1.276) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов). Однако после следующей замены переменных

$$\begin{pmatrix} Z_{n-1} \\ Z_{n-2} \\ \ldots \\ Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_{n-2} \\ \ldots \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{gathered} w_{n-1} = Z_{n-1},\ \ w_{n-2} = \sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}, \\ w_{n-3} = \frac{Z_2}{Z_1},\ \ w_{n-4} = \frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}},\ \ \ldots, \\ w_2 = \frac{Z_{n-3}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-4}^2}},\ \ w_1 = \frac{Z_{n-2}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2}}, \end{gathered} \tag{1.278}$$

система (1.259)–(1.267) распадается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= -w_{n-1} + b\sin\alpha, \\ w_{n-1}' &= \sin\alpha\cos\alpha - w_{n-2}^2 \tfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ w_{n-2}' &= w_{n-2} w_{n-1} \tfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \end{aligned}\right\} \tag{1.279}$$

$$\left.\begin{aligned} w_s' &= d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \tfrac{1+w_s^2}{w_s} \tfrac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \\ \beta_s' &= d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}),\ \ s = 1, \ldots, n-3, \end{aligned}\right\} \tag{1.280}$$

$$\beta_{n-2}' = d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \tag{1.281}$$

где

$$\begin{gathered} d_1(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = Z_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1) \tfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ d_2(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = -Z_{n-3}(w_{n-1}, \ldots, w_1) \tfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \\ = (-1)^{n+1} Z_1(w_{n-1}, \ldots, w_1) \tfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \end{gathered} \tag{1.282}$$

при этом

$$Z_k = Z_k(w_{n-1}, \ldots, w_1),\ \ k = 1, \ldots, n-2, \tag{1.283}$$

— функции в силу замены (1.278).

В частности, при $n = 5$ система (1.269)–(1.276) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_4 + b\sin\alpha,\ \ w_4' = \sin\alpha\cos\alpha - w_3^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \ w_3' = w_3 w_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1.284}$$

$$\left.\begin{aligned} w_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \tfrac{1+w_2^2}{w_2} \tfrac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \beta_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{aligned}\right\} \tag{1.285}$$

$$\left.\begin{aligned} w_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \tfrac{1+w_1^2}{w_1} \tfrac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \beta_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{aligned}\right\} \tag{1.286}$$

$$\beta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \tag{1.287}$$

где

$$\begin{array}{c} d_1(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = Z_3(w_4,w_3,w_2,w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \\ = \pm\frac{w_1w_3}{\sqrt{1+w_1^2}}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = -Z_2(w_4,w_3,w_2,w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1} = \\ = \mp\frac{w_2w_3}{\sqrt{1+w_1^2}\sqrt{1+w_2^2}}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \\ d_3(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = Z_1(w_4,w_3,w_2,w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2} = \\ = \pm\frac{w_3}{\sqrt{1+w_1^2}\sqrt{1+w_2^2}}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}, \end{array} \tag{1.288}$$

при этом

$$Z_k = Z_k(w_4,w_3,w_2,w_1), \;\; k=1,2,3, \tag{1.289}$$

— функции в силу замены (1.278).

Система (1.279)–(1.281) рассматривается на касательном расслоении

$$\begin{array}{c} T_*\mathbf{S}^{n-1}\{(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})\in\mathbf{R}^{2(n-1)}: \\ 0\leqslant\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-3}\leqslant\pi,\;\;\beta_{n-2} \mod 2\pi\} \end{array} \tag{1.290}$$

$(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})\in\mathbf{R}^{n-1}:\;\; 0\leqslant\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-3}\leqslant\pi,\;\;\beta_{n-2} \mod 2\pi\}$.

В частности, система (1.284)–(1.287) рассматривается на касательном расслоении

$$T_*\mathbf{S}^4\{(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\in\mathbf{R}^8:\;\; 0\leqslant\alpha,\beta_1,\beta_2\leqslant\pi,\;\;\beta_3 \mod 2\pi\} \tag{1.291}$$

четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\in\mathbf{R}^4:\;\; 0\leqslant\alpha,\beta_1,\beta_2\leqslant\pi,\;\;\beta_3 \mod 2\pi\}$.

Видно, что в системе (1.279)–(1.281) порядка $2(n-1)$ выделяется независимая подсистема третьего порядка (1.279), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, $n-3$ независимых систем второго порядка (1.280) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_{n-2}) уравнение (1.281) на β_{n-2} отделяется.

В частности, в системе восьмого порядка (1.284)–(1.287) выделяется независимая подсистема третьего порядка (1.284), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, две независимых системы второго порядка (1.285), (1.286) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_3) уравнение (1.287) на β_3 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.279)–(1.281) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.279), по одному — для систем (1.280) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (1.281) (*т.е. всего* n).

В частности, для полной интегрируемости системы (1.284)–(1.287) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.284), по одному — для систем (1.285), (1.286) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (1.287) (*т.е. всего пять*).

Следствие 1.1.

1. *Угол атаки α и углы $\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}$ для свободного тела эквивалентны соответственно углам отклонения ξ и $\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}$ закрепленного маятника.*

2. *Расстояние $\sigma=CD$ для свободного тела соответствует длине державки $l=OD$ закрепленного маятника.*

3. *Первые интегралы системы (1.279)–(1.281) могут быть автоматически получены через равенства (1.234), (1.255), (1.256), (1.257) после подстановок (1.277) (см. также [8, 9]):*

$$\Theta_1'(w_{n-1},w_{n-2};\alpha) = \frac{w_{n-1}^2+w_{n-2}^2-bw_{n-1}\sin\alpha+\sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha} = C_1 = const. \tag{1.292}$$

$$\Theta_2'(w_{n-1},w_{n-2};\alpha) = G\left(\sin\alpha,\frac{w_{n-1}}{\sin\alpha},\frac{w_{n-2}}{\sin\alpha}\right) = C_2 = const. \tag{1.293}$$

$$\Theta_{s+2}'(w_s;\beta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\beta_s} = C_{s+2} = const, \;\; s=1,\ldots,n-3, \tag{1.294}$$

$$\begin{array}{c} \Theta_n'(w_{n-3},w_{n-4};\beta_{n-4},\beta_{n-3},\beta_{n-2}) = \\ = \beta_{n-2}\pm arctg\dfrac{C_{n-1}\cos\beta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2\sin^2\beta_{n-3}-C_{n-1}^2}} = C_n = const, \end{array} \tag{1.295}$$

при этом в левую часть равенства (1.295) вместо C_{n-2},C_{n-1} необходимо подставить интегралы (1.294) при $s=n-4,n-3$.

Вторая группа аналогий касается случая движения с постоянной скоростью центра масс тела, т.е. когда выполнено свойство

$$\mathbf{V}_C \equiv \mathbf{const}. \tag{1.296}$$

Тогда, в силу условий (1.296), (1.1), (1.5), (1.268) преобразованная динамическая часть уравнений движения примет вид аналитической системы

$$\alpha' = -Z_{n-1} + b\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha, \tag{1.297}$$

$$Z'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - \left(\sum_{s=1}^{n-2} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} +$$

$$+ bZ_{n-1}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{1.298}$$

$$Z'_{n-2} = Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(\sum_{s=1}^{n-3} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} +$$

$$+ bZ_{n-2}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{1.299}$$

$$Z'_{n-3} = Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} -$$

$$- \left(\sum_{s=1}^{n-4} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} +$$

$$+ bZ_{n-3}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_{n-3}\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{1.300}$$

. . . .

$$Z'_1 = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\} +$$

$$+ bZ_1\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{1.301}$$

$$\beta'_1 = Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1.302}$$

$$\beta'_2 = -Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{1.303}$$

. . . .

$$\beta'_{n-3} = (-1)^n Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \tag{1.304}$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1} Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \tag{1.305}$$

при этом выбирая постоянную n_1 следующим образом:

$$n_1 = n_0. \tag{1.306}$$

В частности, при $n = 5$ получим следующую систему восьмого порядка:

$$\alpha' = -Z_4 + b\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha, \tag{1.307}$$

$$Z'_4 = \sin\alpha\cos\alpha - \left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} +$$

$$+ bZ_4\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha - bZ_4\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{1.308}$$

$$Z'_3 = Z_3Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(Z_1^2 + Z_2^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} +$$

$$+ bZ_3\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2\right)\cos\alpha - bZ_3\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{1.309}$$

$$Z'_2 = Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} +$$

$$+bZ_2\left(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2\right)\cos\alpha-bZ_2\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{1.310}$$

$$Z_1'=Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}+Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}+$$

$$+bZ_1\left(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2\right)\cos\alpha-bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{1.311}$$

$$\beta_1'=Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1.312}$$

$$\beta_2'=-Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{1.313}$$

$$\beta_3'=Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}. \tag{1.314}$$

Для полного интегрирования системы (1.297)–(1.305) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (1.278) система (1.297)–(1.305) распадается следующим образом:

$$\left.\begin{array}{c}\alpha'=-w_{n-1}+b(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)\sin\alpha+b\sin\alpha\cos^2\alpha,\\ w_{n-1}'=\sin\alpha\cos\alpha-w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\\ +bw_{n-1}(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)\cos\alpha-bw_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha,\\ w_{n-2}'=w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\\ +bw_{n-2}(w_{n-2}^2+w_{n-1}^2)\cos\alpha-bw_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha,\end{array}\right\} \tag{1.315}$$

$$\left.\begin{array}{c}w_s'=d_s(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})\frac{1+w_s^2}{w_s}\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s},\\ \beta_s'=d_s(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}),\quad s=1,\ldots,n-3,\end{array}\right\} \tag{1.316}$$

$$\beta_{n-2}'=d_{n-2}(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}), \tag{1.317}$$

где выполнены условия (1.282).

В частности, при $n=5$ система (1.307)–(1.314) распадается следующим образом:

$$\left.\begin{array}{c}\alpha'=-w_4+b(w_3^2+w_4^2)\sin\alpha+b\sin\alpha\cos^2\alpha,\\ w_4'=\sin\alpha\cos\alpha-w_3^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\\ +bw_4(w_3^2+w_4^2)\cos\alpha-bw_4\sin^2\alpha\cos\alpha,\\ w_3'=w_3w_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\\ +bw_3(w_3^2+w_4^2)\cos\alpha-bw_3\sin^2\alpha\cos\alpha,\end{array}\right\} \tag{1.318}$$

$$\left.\begin{array}{c}w_2'=d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\frac{1+w_2^2}{w_2}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2},\\ \beta_2'=d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3),\end{array}\right\} \tag{1.319}$$

$$\left.\begin{array}{c}w_1'=d_1(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\frac{1+w_1^2}{w_1}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1},\\ \beta_1'=d_1(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3),\end{array}\right\} \tag{1.320}$$

$$\beta_3'=d_3(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3), \tag{1.321}$$

где выполнены условия (1.288).

Система (1.315)–(1.317) рассматривается на касательном расслоении (1.290) $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})\in\mathbf{R}^{n-1}:\ 0\leqslant\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-3}\leqslant\pi,\ \beta_{n-2}\mod 2\pi\}$.

В частности, система (1.318)–(1.321) рассматривается на касательном расслоении (1.291) четырехмерной сферы $\mathbf{S}^4\{(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3)\in\mathbf{R}^4:\ 0\leqslant\alpha,\beta_1,\beta_2\leqslant\pi,\ \beta_3\mod 2\pi\}$.

Видно, что в системе (1.315)–(1.317) порядка $2(n-1)$ выделяется независимая подсистема третьего порядка (1.315), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, $n-3$ независимых систем второго порядка (1.316) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_{n-2}) уравнение (1.317) на β_{n-2} отделяется.

В частности, в системе восьмого порядка (1.318)–(1.321) выделяется независимая подсистема третьего порядка (1.318), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем трехмерном многообразии, две независимых системы второго порядка (1.319), (1.320) (после замены независимой переменной), а также (по причине цикличности переменной β_3) уравнение (1.321) на β_3 отделяется.

Таким образом, для полной интегрируемости системы (1.315)–(1.317) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.315), по одному — для систем (1.316) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, "привязывающи" уравнение (1.317) (*т.е. всего* n).

В частности, для полной интегрируемости системы (1.318)–(1.321) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (1.318), по одному — для систем (1.319), (1.320) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (1.321) (*т.е. всего пять*).

Если вопрос о первых интегралах системы (1.259)–(1.267) (или (1.279)–(1.281)) решается с помощью следствия 1.1, то аналогичный вопрос для системы (1.297)–(1.305) (или (1.315)–(1.317)) решает следующая теорема 1.19.

Сначала отметим, что один из первых интегралов системы (1.315) имеет следующий вид [10, 11, 12]:

$$\Theta_1''(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = \frac{w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2 - bw_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha} = C_1 = \text{const}. \tag{1.322}$$

Далее, изучим вопрос дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (1.315), используя при этом первый интеграл (1.322). Для этого введем следующие обозначения и новые переменные:

$$\tau = \sin\alpha,\ \ w_{n-1} = u_2\tau,\ \ w_{n-2} = u_1\tau,\ \ p = \frac{1}{\tau^2}. \tag{1.323}$$

Тогда вопрос о явном виде искомого первого интеграла сводится к решению линейного неоднородного уравнения:

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2(u_2 - b)p + 2b(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2)}{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}, \tag{1.324}$$

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)}\right\},$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия

$$b^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0. \tag{1.325}$$

Последний факт означает, что может быть найден еще один трансцендентный первый интеграл в явном виде. При этом общее решение уравнения (1.324) зависит от произвольной постоянной C_2. Полные выкладки в данном месте приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (1.324), даже в частном случае $b = C_1 = 2$ имеет следующее решение:

$$p = p_0(u_2) = C[\sqrt{1 - (u_2 - 1)^2} \pm 1]\exp\left[\sqrt{\frac{1 \mp \sqrt{1 - (u_2 - 1)^2}}{1 \pm \sqrt{1 - (u_2 - 1)^2}}}\right],\ \ C = \text{const}. \tag{1.326}$$

Тогда искомый дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2''(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = G\left(\sin\alpha, \frac{w_{n-1}}{\sin\alpha}, \frac{w_{n-2}}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \text{const}, \tag{1.327}$$

используя при этом обозначения и замены (1.323).

Итак, найдены два первых интеграла (1.322), (1.327) независимой системы третьего порядка (1.315). Осталось указать по одному первому интегралу — для систем (1.316) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, "привязывающий" уравнение (1.317).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (1.294), (1.295), а именно:

$$\Theta_{s+2}''(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\sin\beta_s} = C_{s+2} = \text{const},\ \ s = 1, \ldots, n-3, \tag{1.328}$$

$$\Theta_n''(w_{n-3}, w_{n-4}; \beta_{n-4}, \beta_{n-3}, \beta_{n-2}) =$$

$$= \beta_{n-2} \pm \operatorname{arctg}\frac{C_{n-1}\cos\beta_{n-3}}{\sqrt{C_{n-2}^2\sin^2\beta_{n-3} - C_{n-1}^2}} = C_n = \text{const}, \tag{1.329}$$

при этом в левую часть равенства (1.329) вместо C_{n-2}, C_{n-1} необходимо подставить интегралы (1.328) при $s = n-4, n-3$.

Теорема 1.19. *n первых интегралов (1.322), (1.327), (1.328), (1.329) системы (1.315)–(1.317) являются трансцендентными функциями своих фазовых переменных и выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.*

Теорема 1.20. *n первых интегралов (1.322), (1.327), (1.328), (1.329) системы (1.315)–(1.317) эквивалентны n первым интегралам (1.292), (1.293), (1.294), (1.295) системы (1.279)–(1.281).*

Действительно, пары первых интегралов (1.322), (1.292), (1.328), (1.294) и (1.329), (1.295) совпадают. Осталось формально отождествить фазовые переменные w_k, $k = 1, \ldots, n-1$, для системы (1.315)–(1.317) с фазовыми переменными w_k, $k = 1, \ldots, n-1$, для системы (1.279)–(1.281). Аналогичные рассуждения, касающиеся пары первых интегралов (1.327), (1.293), не приводим ввиду громоздкости изложения.

Итак, мы имеем следующие топологичекие и механические аналогии в том смысле, в котором они объяснены выше.

1) Движение закрепленного на (обобщенном) сферическом шарнире многомерного физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил).

2) Движение многомерного свободного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи).

3) Сложное движение многомерного твердого тела, вращающегося вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно, и находящегося в неконсервативном поле сил.

О более общих топологических аналогиях см. также [13, 14].

Литература

[1] Шамолин М.В. Случаи интегрируемости, соответствующие движению маятника на плоскости // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2015. № 10(132). С. 91–113.

[2] Шамолин М.В. Случаи интегрируемости, соответствующие движению маятника в трехмерном пространстве // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2016. № 3–4. С. 75–97.

[3] Шамолин М.В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле // Итоги науки и техники. Сер. "Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры", Т. 125, "Динамические системы". 2013. С. 5–254.

[4] Походня Н.В., Шамолин М.В. Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2013. № 9/1(110). С. 35–41.

[5] Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия // Доклады РАН. 2017. Т. 477. № 2. С. 168–172.

[6] Шамолин М.В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле // Доклады РАН. 2015. Т. 461. № 5. С. 533–536.

[7] Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНИТИ, 1985. 304 с.

[8] Трофимов В.В. Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств // Вестн. Моск. ун–та. Сер. 1. Математика. Механика. 1984, № 6. С. 31–33.

[9] Трофимов В.В., Шамолин М.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фунд. и прикл. мат. 2010. Т. 16. Вып. 4. С. 3–229.

[10] Шамолин М.В. Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле // Доклады РАН, 2015. Т. 460. № 2. С. 165–169.

[11] Шамолин М.В. Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твердого тела в неконсервативном поле // Доклады РАН, 2013. Т. 453. № 1. С. 46–49.

[12] Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам // Доклады РАН. 2016. Т. 471. № 5. С. 547–551.

[13] Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере // Доклады РАН, 2017. Т. 474. № 2. С. 177–181.

[14] Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия // Доклады РАН. 2017. Т. 475. № 5. С. 519–523.

References

[1] Shamolin M.V. *Sluchai integriruemosti, sootvetstvuiushchie dvizheniiu maiatnika na ploskosti* [Cases of integrability corresponding to the pendulum motion on the plane]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Sciences Series], 2015, no. 10(132), pp. 91–113 [in Russian].

[2] Shamolin M.V. /Cases of integrability corresponding to the pendulum motion on the three-dimensional space]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Sciences Series], 2016, no. 3–4, pp. 75–97 [in Russian].

[3] Shamolin M.V. Shamolin M.V. *Mnogoobrazie sluchaev integriruemosti v dinamike malomernogo i mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole* [Variety of cases of integrability in dynamics of lower-, and multi-dimensional body in nonconservative field]. *Itogi nauki i tekhniki. Ser.: "Sovremennaia matematika i ee prilozheniia. Tematicheskie obzory". T. 125. "Dinamicheskie sistemy"*. [Journal of Mathematical Sciences. Vol 125. Dynamical Systems], 2013, pp. 5–254 [in Russina]

[4] Pokhodnya N.V., Shamolin M.V. *Nekotorye usloviia integriruemosti dinamicheskikh sistem v transtsendentnykh funktsiiakh* [Some cases of integrability of dynamic systems in transcedent functions]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of Samara State University. Natural Science Series], 2013, no. 9/1(110), pp. 35–41 [in Russian].

[5] Shamolin M.V. *Novye sluchai integriruemykh sistem s dissipatsiei na kasatel'nom rassloenii trekhmernogo mnogoobraziia* [New Cases of Integrable Systems with Dissipation on the Tangent Bundle of a Three-Dimensional Manifold]. *Doklady RAN* [Physics Doklady], 2017, Vol. 477, no. 2, pp. 168–172 [in Russian].

[6] Shamolin M.V. *Polnyi spisok pervykh integralov dinamicheskikh uravnenii dvizheniia mnogomernogo tverdogo tela v nekonservativnom pole* [Complete List of First Integrals of Dynamic Equations for a Multidimensional Solid in a Nonconservative Field. *Doklady RAN* [Physics Doklady], 2015, Vol. 461, no. 5, pp. 533–536 [in Russian].

[7] Arnold V.I., Kozlov V.V., Neyshtadt A.I. Arnold V.I., Kozlov V.V., Neyshtadt A.I. *Matematicheskie aspekty klassicheskoi i nebesnoi mekhaniki* [Mathematical aspects in classical and celestial mechanics]. M.: VINITI, 1985, 304 p. [in Russian]

[8] Trofimov V.V. *Simplekticheskie struktury na gruppakh avtomorfizmov simmetricheskikh prostranstv* [Symplectic structures on symmetruc spaces automorphysm groups]. *Vestn. Mosk. un–ta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [Moscow University Mathematics Bulletin], 1984, no. 6, pp. 31–33 [in Russian].

[9] Trofimov V.V., Shamolin M.V. *Geometricheskie i dinamicheskie invarianty integriruemykh gamil'tonovykh i dissipativnykh sistem* [Geometrical and dynamical invariants of integrable Hamiltonian and dissipative systems]. *Fund. i prikl. mat.* [Journal of Mathematical Sciences], 2010, Vol. 16, no. 4, pp. 3–229 [in Russian].

[10] Shamolin M.V. *Metody analiza dinamicheskikh sistem s peremennoi dissipatsiei v dinamike tverdogo tela* [Methods of analysis of various dissipation dynamical systems in dynamics of a rigid body]. M.: Izd-vo "Ekzamen ", 2007, 352 p. [in Russian].

[11] Shamolin M.V. *Nekotorye model'nye zadachi dinamiki tverdogo tela pri vzaimodeistvii ego so sredoi* [Some model problems of dynamics for a rigid body interacting with a medium]. *Prikl. mekhanika* [International Applied Mechanics], 2007, Vol. 43, no. 10, pp. 49–67 [in Russian].

[12] Shamolin M.V. *Novye sluchai integriruemosti sistem s dissipatsiei na kasatel'nykh rassloeniiakh k dvumernoi i trekhmernoi sferam* [New Cases of Integrable Systems with Dissipation on Tangent Bundles of Two- and Three-Dimensional Spheres]. *Doklady RAN* [Physics Doklady], 2016, Vol. 471, no. 5, pp. 547–551 [in Russian].

[13] Shamolin M.V. *Novye sluchai integriruemykh sistem s dissipatsiei na kasatel'nom rassloenii k mnogomernoi sfere* [New Cases of Integrable Systems with Dissipation on a Tangent Bundle of a Multidimensional Sphere]. *Doklady RAN* [Physics Doklady], 2017, Vol. 474, no. 2, pp. 177–181 [in Russian].

[14] Shamolin M.V. *Novye sluchai integriruemykh sistem s dissipatsiei na kasatel'nom rassloenii dvumernogo mnogoobraziia* [New Cases of Integrable Systems with Dissipation on a Tangent Bundle of a Two-Dimensional Manifold]. *Doklady RAN* [Physics Doklady], 2017, Vol. 475, no. 5, pp. 519–523 [in Russian].

M.V. Shamolin[3]

ON A PENDULUM MOTION IN MULTI-DIMENSIONAL SPACE. PART 2. INDEPENDENCE OF FORCE FIELDS ON THE TENSOR OF ANGULAR VELOCITY[4]

In the proposed cycle of work, we study the equations of the motion of dynamically symmetric fixed n-dimensional rigid bodies–pendulums located in a nonconservative force fields. The form of these equations is taken from the dynamics of real fixed rigid bodies placed in a homogeneous flow of a medium. In parallel, we study the problem of the motion of a free n-dimensional rigid body also located in a similar force fields. Herewith, this free rigid body is influenced by a nonconservative tracing force; under action of this force, either the magnitude of the velocity of some characteristic point of the body remains constant, which means that the system possesses a nonintegrable servo constraint. In this work, we study the case of independence of force fields on the tensor of angular velocity.

Key words: multi-dimensional rigid body, non-conservative force field, dynamical system, case of integrability.

Статья поступила в редакцию $7/XI/2017$.
The article received $7/XI/2017$.

[3] *Shamolin Maxim Vladimirovich* (`shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru`), Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, 1, Leninskie Gory, Moscow, 119192, Russian Federation.

[4] The work is carried out at the financial support of the grant of the Russian Foundation for Basic Research 15-01-00848-a.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Бейлин Александр Борисович, канд. техн. наук, доц. кафедры "Автоматизированные станочные и инструментальные системы" Самарского государственного технического университета. Тема канд. дис.: "Обеспечение точности монтажа пространственно расположенных трубопроводов ГТД" (защ. в 1988 г.). Автор и соавтор 40 научных работ.

Область научных интересов: диагностика состояния станочного оборудования, виброакустическая диагностика, размерный анализ машин и механизмов.

Пулькина Людмила Степановна, д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры уравнений математической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева. Тема канд. дис.: "Краевые задачи для уравнения смешанного типа с двумя параллельными линиями сингулярности коэффициентов" (защ. в 1975 г.); Тема докт. дис.: "Нелокальные задачи для гиперболических уравнений" (защ. в 2003 г.). Автор и соавтор 100 научных работ, в том числе монографии "Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений".

Область научных интересов: краевые, нелокальные и нелинейные задачи для уравнений с частными производными.

Кожанов Александр Иванович, главный научный сотрудник, д-р физ.-мат. наук, проф. Институт математики сибирского отделения академии наук РФ.

Область научных интересов: дифференциальные уравнения с частными производными, неклассические и обратные задачи.

Рогач Дарья Александровна, аспирант кафедры теории вероятностей и математической статичтики Самарского университета.

Область научных интересов: линейные операторы, цифровая обработка сигнала.

Срибная Татьяна Аркадьевна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры функционального анализа и теории функций Самарского университета. Тема канд. дис.: "Функции множества со значениями в упорядоченном пространстве и их применение" (защ. в 1994 г.). Автор и соавтор 30 научных работ.

Область научных интересов: теория меры, непрерывность и равномерная непрерывность неаддитивных функций множества, продолжение неаддитивных функций множества.

Шамолин Максим Владимирович, д-р физ.-мат. наук, проф., ведущий научный сотрудник Института механики МГУ им. М. В. Ломоносова, академик РАЕ. Тема докт. дис.: "Методы анализа классов неконсервативных систем в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой" (защ. в 2004 г.). Имеет более 450 печатных работ, в т. ч. 10 монографий.

Область научных интересов: прикладная математика, методы математического моделирования; классическая механика, динамика твердого тела, взаимодействующего со средой; качественная теория динамических систем, типичность, абсолютная и относительная грубость; динамика многомерного твердого тела в неконсервативных силовых полях; дифференциальная и топологическая диагностика, задачи дифференциальной диагностики в диагностических пространствах; теория фракталов; дискретная математика, математическая логика и информатика.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Beylin Alexander Borisovich, Candidate of Technical Sciences, assisstant professor of the Department of Automated Machine-tool and Instrumental Systems, Samara State Technical University. Subject of Candidate's thesis "Control of accuracy of assembly of spatial pipelines GTE". Author and coauthor of 40 scientific works.

Research interests: diagnostics of state of machine's equipment, vibro-aucoustic diagnostics, dimensional analysis of machines and tools.

Pulkina Ludmila Stepanovna, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Equations of Mathematical Physics, Samara National Research University. Subject of Candidate's thesis: "Boundary value problems for a mixed type equation with two parallel lines of coefficient's singularity" (1975); Subject of Doctoral thesis: "Nonlocal problems for hyperbolic equations" (2003). Author and coauthor of 100 scientific works, including monograph "Problems with nonclassical conditions for hyperbolic equations".

Research interests: boundary-value, nonlocal and nonlinear problems for partial differential equations.

Kozhanov Aleksander Ivanovich, chief research scientist, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences.

Research interests: differential equations with partial derivatives, nonclassical and inverse problems.

Rogach Daria Alexandrovna, post-graduate student of the Department of Probability Theory and Mathematical Statistics, Samara National Research University.

Research interests: linear operators, digital signal processing.

Sribnaya Tatyana Arcadievna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Functional Analysis and Theory of Functions, Samara National Research University. Subject of Candidate's thesis: "Set functions with values in ordered space and their application" (1994). Author and coauthof of 30 scientific works.

Research interests: measure theory, continuous and uniform continuous non-additive set functions, extension non-additive set functions, functions on an ortomodular lattice.

Shamolin Maxim Vladimirovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, full professor, leading researcher of the Institute of Mechanics at Lomonosov Moscow State University. Academician of the Russian Academy of Natural History. Subject of Doctoral thesis: "Methods of analysis of certain classes of nonconservative systems in dynamics of a rigid body interacting with a medium" (2004). Author of more then 450 publications (including 10 monographs).

Research interests: applied mathematics, methods of mathematical modeling, classical mechanics, dynamics of a rigid body interacting with a medium, qualitative theory of dynamic systems, tipicity, absolute and relative roughness, dynamics of multi-dimensional rigid body in nonconservative fields of forces, differential and topological diagnostics, problems of differential diagnostics in diagnostical spaces, fractal theory, discrete mathematics, mathematical logic, and informatics.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СТАТЕЙ

Журнал "Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия" издается с 1995 г. и является регулярным научным изданием, выпускаемым Самарским университетом с целью развития научно-исследовательской деятельности, поддержки ведущих научных школ и подготовки кадров высшей квалификации. Журнал выходит как в печатном, так и в электронном виде. Электронная версия журнала размещается на сайте Самарского университета по адресу *http://journals.ssau.ru/index.php/vestnik-est.*

В журнале "Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия" печатаются оригинальные научные результаты из различных областей естествознания, ранее не публиковавшиеся и не представленные к публикации в других изданиях. **Ежегодно выходят в свет четыре регулярных выпуска журнала.**

Представляемая в журнал работа должна быть законченным научным исследованием и содержать новые научные результаты. Статьи должны подписываться всеми авторами, что означает их согласие на передачу всех прав на распространение работ с помощью печатных и электронных носителей информации Самарскому университету и издательству. Статьи могут быть написаны на русском или английском языках, при этом авторы обязаны предъявлять повышенные требования к стилю изложения и языку. Статьи должны сопровождаться направлением организации, в которой выполнена работа. Статьи обзорного характера, рецензии на научные монографии пишутся, как правило, по просьбе редколлегии журнала. Все представленные работы редакция журнала направляет на рецензирование. Решение об опубликовании принимается редколлегий журнала на основании рецензии. Авторам рекомендуется ознакомиться с правилами подготовки статей перед представлением их в редакцию. Работы, оформленные не по правилам, редколлегией рассматриваться не будут. **Редакция просит авторов при оформлении работы придерживаться следующих правил и рекомендаций:**

1. Статьи представляются в двух форматах: твердая копия, распечатанная с одной стороны листа формата А4, и электронном (e-mail: nsvestnik@ssau.ru). Электронный вариант должен точно соответствовать печатному.

2. Статья должна содержать: название работы, список авторов, представленный в алфавитном порядке, с указанием места работы и адресов электронной почты каждого из них; аннотацию не менее 10 строк, которая дается перед основным текстом; основной текст, который рекомендуется разделять на подразделы с целью облегчения чтения работы; заключение с краткой характеристикой основных полученных результатов; название работы на английском языке с указанием всех авторов; аннотацию на английском языке. Название работы должно адекватно отражать ее содержание, и быть, по возможности, кратким. Не допускается включение формул в название работы и текст аннотации.

3. Статья должна быть снабжена индексом универсальной десятичной классификации (УДК), необходимо представить ключевые слова на русском и английском языках.

4. Объем статьи не должен превышать 15 страниц машинописного текста, иллюстрированного не более чем 5 рисунками и 5 таблицами. Базовый размер шрифта — 10 пунктов. Опубликование работ, не соответствующих этим ограничениям, возможно только после специального решения редколлегии журнала.

5. Подписи к рисункам должны размещаться снизу от рисунка и должны содержать их краткое описание и, возможно, объяснение использованных символов и условных обозначений.

6. Указатель таблицы должен быть размещен справа сверху от таблицы. Заголовок таблицы (как и сама таблица) должен быть отцентрирован по ширине основного текста.

7. Нумерация рисунков и таблиц должна быть пораздельной по тексту статьи. Не допускается размещать в тексте рисунки и таблицы до появления на них ссылки в тексте.

8. Текст статьи должен быть подготовлен средствами издательской системы $\LaTeX 2_\varepsilon$ с использованием стиля `samgu.cls`. Стиль `samgu.cls` и пример оформления статьи можно найти на сайте Самарского университета (адрес указан выше). Использование других реализаций $\TeX$'а крайне нежелательно. Подготовка электронной версии статьи с помощью других средств должна быть заранее согласована с редакцией. Иллюстративный материал (рисунки, таблицы, диаграммы) готовится стандартными средствами $\LaTeX$'а. Рисунки могут быть также подготовлены в любом графическом редакторе и предоставлены в формате EPS. Электронные представления фотографий допускаются только в форматах EPS или TIFF с разрешением не менее 600 dpi. В случае использования нестандартных стилевых файлов автор обязан предоставить редакции необходимые стилевые файлы. Изменения стандартных стилевых файлов недопустимы.

9. При подготовке электронного варианта статьи следует принимать во внимание следующие рекомендации:

а) при наборе статьи необходимо различать следующие знаки препинания и контрольные последовательности, им соответствующие: одинарный дефис ("-"), двойной дефис ("–")[1], тройной дефис ("—")[2]. Одинарный дефис используют в составных словах; двойной дефис рекомендуется для указания диапазона чисел и "двойных"фамилий; тройной дефис означает тире;

б) допустимо использование только обратных кавычек (") с помощью контрольной последовательности `\textquotedblright`;

в) недопустимо нахождения рядом двух и более закрывающих или открывающих скобок одного вида. Рекомендуется внимательно относиться к балансу скобок;

г) допускается использование следующих команд переключения шрифтов: `\rm`, `\it`, `\bf`, `\sl` и стандартных шрифтов семейства AMS с использованием следующих команд переключения шрифтов `\mathbf`, `\mathcal`, `\mathfrak`. Использование других шрифтов должно быть согласовано с редакцией журнала;

д) на графиках должна быть нанесена сетка (желательно квадратная) с обозначением делений. Рекомендуемый размер рисунков — 11-15 см по горизонтали и 5-15 см по вертикали. Необходимо тщательно следить за точным соответствием обозначений в тексте и на рисунках и за подобием шрифтов. Надписи, загромождающие рисунки, должны быть заменены цифрами или буквенными обозначениями и внесены в подрисуночные подписи. Сами подрисуночные подписи должны быть, по возможности, краткими. Редакция оставляет за собой право требовать от автора более качественного выполнения графического материала;

[1]Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash--~`

[2]Соответствующая контрольная последовательность есть `\cdash---`

е) для математических обозначений рекомендуется употреблять, по возможности, стандартные и наиболее простые символы. Не следует применять индексы из букв русского алфавита. Векторы и тензоры выполняются жирным шрифтом. Вместо одинаковых повторяющихся блоков в формулах желательно использовать их сокращенные обозначения;

ж) при нумерации формул редакция просит пользоваться десятичной системой. Рекомендуется двойная нумерация: первая цифра — номер раздела статьи, вторая цифра после точки — номер формулы внутри раздела. Номер должен стоять справа от формулы. Не следует нумеровать формулы, на которые нет ссылок в тексте;

з) теоремы, леммы, примеры, утверждения и т.п. выполняются обычным шрифтом; их заголовки даются жирным шрифтом;

и) список литературы составляется по порядку цитирования, располагается в конце статьи на русском и английском языках (не менее 6–10 пунктов). Для книг сообщается следующая информация: фамилии и инициалы авторов, полное название книги, издательство, год издания и количество страниц; для статей в сборниках и журналах — фамилии и инициалы авторов, полное название статьи, название журнала (сборника) полностью или, если есть стандартное сокращение, сокращенно, полная информация об издании (серия, том, номер, выпуск, год), номера начальной и конечной страниц статьи;

к) ссылки на иностранные источники (включая переведенные на русский язык статьи и книги) даются обязательно на языке оригинала и сопровождаются в случае перевода на русский язык с указанием названия и выходных данных перевода.

Цитирование осуществляется командой `\cite` с соответствующей меткой. Ссылки на неопубликованные работы недопустимы.

Невыполнение авторами перечисленных выше правил может повлечь за собой задержку с опубликованием работы.

В журнале дается указание на дату поступления работы в редакцию. Просьба редакции о переработке статьи не означает, что статья принята к печати; после переработки статья вновь рассматривается редколлегией журнала.

Редакция журнала

Уважаемые авторы, просим предоставить сведения для размещения в журнале на странице "Сведения об авторах"

1. ФИО
2. Научное звание
3. Должность
4. Название кафедры и вуза
5. Тема кандидатской диссертации
6. Тема докторской диссертации
7. Количество научных работ, публикаций, название монографий.
8. Область научных интересов

Аспирантам указать год окончания вуза и поступления в аспирантуру по специальности.

Английский вариант сведений об авторах проверит специалист издательства.

СТИЛЕВОЙ БЛОК, ГДЕ НУЖНО ВСТАВИТЬ ИЛИ НАБРАТЬ ИНФОРМАЦИЮ.

Иванов Иван Иванович, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой математики и информатики Самарского государственного университета, почетный академик РАН.

Иванов Иван Иванович, аспирант Самарского государственного университета кафедры ...., в 2012 г. окончил Самарский государственный технический университет по специальности "..........".

Тема канд. дис.: "Функционально-геометрический метод решения задач со свободной границей для гармонических функций" (защ. в 2008 г.), тема докт. дис.: "Кратные интегралы и обобщенные полилогарифмы" (защ. в 2014 г.). Автор и соавтор 20 науч. работ, в т. ч. монографий "Двухточечная краевая задача нелинейной системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом" (2012), "Законы больших чисел и глобальная асимптотическая устойчивость в сетях массового обслуживания" (2014).

Область научных интересов: математика, механика, гармонические функции, кратные интегралы, обобщенные полилогарифмы.

STYLE UNIT WHERE YOU SHOULD INSERT OR TYPE INFORMATION

Ivanov Ivan Ivanovich, Dr. of Physical and Mathematical sciences, prof., head of the Department of Mathematics and Informatics, Samara State University, honourable academician of the RAS.

Ivanov Ivan Ivanovich, postgraduate student of Samara State University, the Dept. of ...., in 2012 graduated from Samara State Technical University with a degree in "...........".

Subject of Candidate's thesis: "Functional geometric method for solving free boundary problems for harmonic functions" (2008), subject of Doctoral thesis: "Multiple integrals and generalized polylogarithms" (2014). Author and coauthor of 20 scientific works including monographs "The two-point boundary value problem of nonlinear system of differential equations with deviating argument" (2012), "The laws of large numbers and the global asymptotic stability in queuing networks" (2014).

Research interests: mathematics, mechanics, harmonic functions, multiple integrals, generalized polylogarithms.